Геометрическая волновая инженерия

Псевдогиперболоиды высших порядков

Геометрическая основа управления волнами

Хаустов Владимир Игоревич

ORCID: 0009-0007-3657-2309

Лаборатория геометрической волновой инженерии https://vihrihaosa.ru/

Лицензия: CC BY 4.0

Дата публикации: 30 апреля 2026 года

DOI: 10.5281/zenodo.19926174

Научно-технический перевод с английского языка.

Редакция, адаптированная для русскоязычного инженера-исследователя.

Оригинал: Khaustov, V. Higher-Order Pseudohyperboloids with the Merge Operation: A Geometric Foundation for Programmable Wave Confinement. https://doi.org/10.5281/zenodo.19926174

Аннотация

Представлены псевдогиперболоиды высшего порядка с операцией слияния (Merge) — геометрический каркас для программируемого удержания волн и основа более широкого подхода к проектированию, названного геометрической волновой инженерией. Построение задаётся семью независимыми параметрами (a, b, R, R_1, h, m, n) и формирует внутренний объём $\Omega_{n,m}$ рекурсивными интервальными операциями с последующим геометрическим объединением. В отличие от известных классов резонаторов — резонаторов с модами шепчущей галереи (WGM), оптических волноводов на связанных резонаторах (CROW), фотонных кристаллов, связанных состояний в континууме (BIC) и гиперболических метаматериалов — в предлагаемом каркасе топология ограничивающей области рассматривается как управляемая конструктивная переменная.

Работа содержит четыре вклада. Во-первых, формальное рекурсивное построение $\Omega_{n,m}$ в терминах интервальных семейств и оператора Merge. Во-вторых, ряд геометрических свойств конструкции: переключение связности осевым параметром h, бифуркация «диск/кольцо» третьего порядка по R_1 и сжатие формального рекурсивного ветвления в физически объединённые области. В-третьих, явные принципы проектирования, которые в совокупности определяют геометрическую волновую инженерию как целостную проектную позицию. В-четвёртых, ограниченное, но необходимое утверждение о волновой проверке в скалярном приближении; полное электромагнитное и акустическое моделирование отнесено к ближайшим следующим шагам.

В теории линейных волн построение масштабно-инвариантно и совместимо с ВЧ, СВЧ, оптическим и акустическим диапазонами при соблюдении материальных ограничений конкретной области. Геометрия ориентирована на аддитивное изготовление (3D-печать, литография). Все геометрические утверждения обеспечены полностью воспроизводимым расчётным скриптом, приведённым в дополнительных материалах.

Ключевые слова: геометрическая волновая инженерия; рекурсивная геометрия; программируемая топология; проектирование внутреннего объёма; псевдогиперболоид; локализация волн; аддитивное производство; вычислительная геометрия.

Оглавление

Аннотация ... 2
1. Введение ... 4
2. Математическое построение ... 4
2.1. Рекурсивное ядро ветвления ... 4
2.2. Интервальная рекурсия с операцией слияния ... 5
2.3. Построение рядной системы ... 6
3. Установленные геометрические эффекты ... 8
3.1. Топологическое переключение по h: программируемая связность ... 8
3.2. Бифуркация «диск/кольцо» третьего порядка по R_1 ... 9
3.3. Сжатие рекурсивного ветвления ... 10
3.4. Разделение радиальной рекурсии и осевой композиции ... 10
3.5. Зависимость от ориентации ... 11
4. Принципы проектирования геометрической волновой инженерии ... 11
5. Предварительная волновая проверка ... 12
5.1. Скалярная волновая модель-заместитель ... 12
5.2. Перестройка мод, управляемая связностью ... 12
5.3. Переход от диска к кольцевому пространству ... 13
5.4. Масштабная инвариантность ... 13
5.5. Утверждение о минимальной проверке ... 13
6. Волновые гипотезы и программа исследований ... 14
7. Обсуждение ... 15
7.1. Сначала геометрия — затем уравнение ... 15
7.2. Программируемость топологии ... 15
7.3. Сжатие комбинаторной сложности ... 15
7.4. Технологические перспективы ... 15
7.5. Ограничения настоящей работы ... 16
7.6. Соотношение с существующими структурами ... 16
8. Выводы ... 16
10. Литература ... 17
Приложения ... 18
Приложение A. Краткое описание нотации ... 18
Приложение B. Заявление о воспроизводимости ... 18
Приложение C. Доступность данных и кода ... 19

1. Введение

Современная волновая инженерия работает преимущественно в заранее заданных топологических каркасах: параметры настраиваются внутри фиксированных топологий. Резонаторы с модами шепчущей галереи (WGM) опираются на гладкие выпуклые границы [1]; оптические волноводы на связанных резонаторах (CROW) связывают дискретные резонаторы [2]; фотонные кристаллы используют периодические решётки [3]; связанные состояния в континууме (BIC) опираются на интерференцию, защищённую симметрией [4]; гиперболические метаматериалы используют анизотропную дисперсию [5]. Во всех этих случаях топология ограничивающей области фактически фиксируется на концептуальной стадии, а настройка выполняется внутри этой фиксированной топологии.

Работа закладывает фундаментальную основу нового направления, в котором топология ограничивающей области рассматривается как основная конструктивная переменная. Этот подход называется геометрической волновой инженерией. Псевдогиперболоиды высшего порядка с операцией Merge представлены здесь как конкретная геометрическая реализация данной парадигмы.

Внутренний объём $\Omega_{n,m}$, построенный рекурсивными интервальными операциями и объединённый операцией Merge, образует пространство проектирования, в котором при критических значениях параметров ($h = 0$; $R_1/R = 1$ для третьего порядка) возникают дискретные изменения связности. Это обеспечивает топологическую программируемость, недоступную в традиционных каркасах.

Задачи документа:

1. Изложить математическое построение $\Omega_{n,m}$ с помощью рекурсивных интервальных операций и геометрического объединения.
2. Документировать геометрические эффекты, установленные прямой конструктивной и аналитической проверкой.
3. Сформулировать минимальный набор волновых гипотез для последующей численной и экспериментальной проверки.

Геометрические эффекты устанавливаются конструктивно. Волновые эффекты сформулированы как проверяемые гипотезы, а предварительный путь проверки в скалярном приближении описан явно.

2. Математическое построение

2.1. Рекурсивное ядро ветвления

Построение начинается с гиперболической порождающей кривой, задаваемой параметрами (a, b). Пусть d(ξ) — базовая радиальная функция второго порядка, где ξ = s для вертикального типа и ξ = u для горизонтального типа.

Рекурсивное ядро ветвления задаётся как

$$B_2 = \{d\}, \quad B_{k+1} = \{R_{k-1} + r,\ R_{k-1} - r : r \in B_k\}, \quad k \geq 2.$$

Число формальных ветвей растёт как

$$N_n = 2^{n-2}.$$

Это формальный скелет ветвления, а не физический объём.

2.2. Интервальная рекурсия с операцией слияния

Физически содержательный объект — объединённый внутренний объём $\Omega_{n,m}$, получаемый интервальными операциями.

Для второго порядка

$$I_2(\xi) = \{[0, d(\xi)]\}.$$

Оператор интервальной рекурсии C_R действует на каждый интервал $[\alpha, \beta]$:

$$C_R([\alpha, \beta]) = [\max(R - \beta, 0), \max(R - \alpha, 0)] \cup [R + \alpha, R + \beta].$$

Следующий порядок получается применением оператора $C_{R(k-1)}$ ко всем интервалам предыдущего порядка с последующей операцией Merge, объединяющей перекрывающиеся или соприкасающиеся интервалы:

$$I_{k+1}(\xi) = Merge(\cup_{[\alpha, \beta] \in I_{k}(\xi)} C_{R(k-1)}([\alpha, \beta])).$$

Предложение 1 (корректность интервальной рекурсии).

Для всех $k \geq 2$ семейство $I_k(\xi)$ состоит из конечного объединения непересекающихся замкнутых интервалов с неотрицательными конечными точками, так что соответствующая повёрнутая область геометрически корректно определена.

Схема доказательства. Индукция по k. База $k = 2$ выполняется по построению, поскольку $d(\xi) \geq 0$. Индуктивный переход следует из того, что оператор C_R сохраняет неотрицательность благодаря операции $\max(\cdot, 0)$, а Merge по определению переводит конечное входное объединение в конечное объединение непересекающихся замкнутых интервалов.

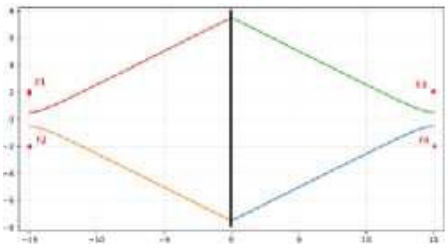

Рис. 1. Вертикальный тип, второй порядок; 2D меридиональное сечение Ω_2. Параметры: a = 0,5; b = 1; R = 15; m = 1; h = 0.

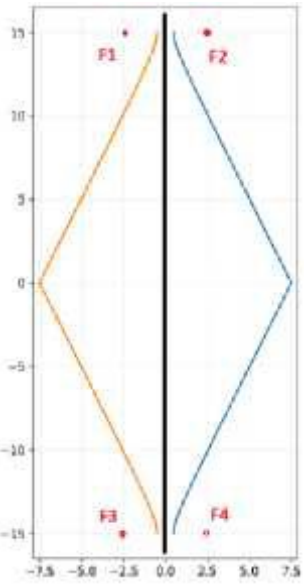

Рис. 2. Горизонтальный тип, второй порядок; 2D меридиональное сечение. Параметры: a = 0,5; b = 1; R = 15; m = 1; h = 0.

2.3. Построение рядной системы

Пусть H — осевая полудлина единичного экземпляра: H = L для вертикального типа и H = R для горизонтального, где $L = a\cdot\sqrt{(1 + (R/b)^2)}$.

Рядная система. Для системы из m идентичных экземпляров зададим осевой шаг

$$шаг = 2H + h$$

и смещения $\Delta_j = -j(2H + h)$, $j = 0, 1, \ldots, m - 1$. Полный внутренний объём:

$$\Omega_{n,m} = \bigcup_{j=0}^{m-1} (\Omega_n + \Delta_j \cdot e_\xi).$$

Параметры играют различные геометрические роли:

- n — глубина радиальной рекурсии;
- m — число экземпляров в стеке;
- h — управление осевым зазором, контактом или перекрытием;
- $R_1, R_2, \ldots$ — радиусы рекурсии;
- (a, b) — форма порождающего гиперболического профиля.

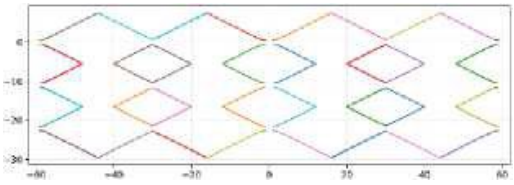

Рис. 3. Вертикальный тип, четвёртый порядок; m = 3; h = −4. Режим перекрытия: объединённый объём.

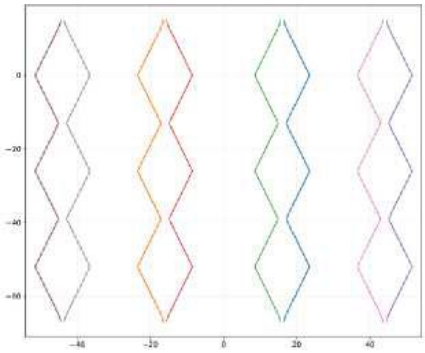

Рис. 4. Горизонтальный тип, четвёртый порядок; m = 3; h = −4. Те же параметры, иная связность.

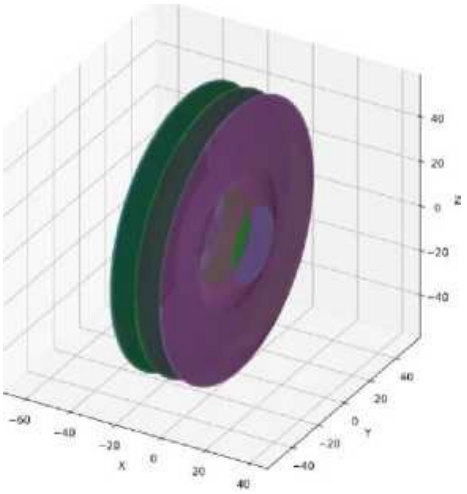

Рис. 5. 3D-визуализация: вертикальный тип, четвёртый порядок; m = 3; h = −4.

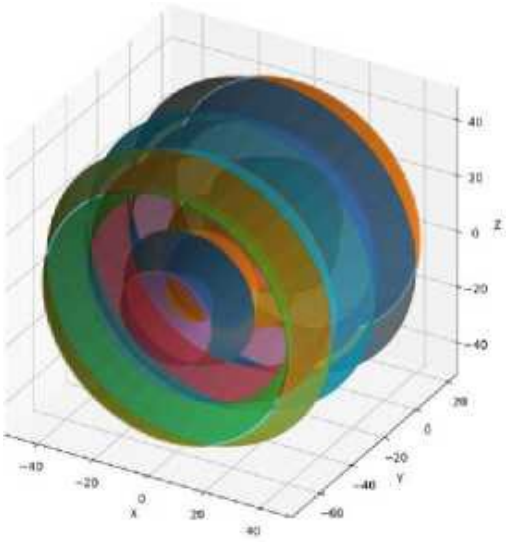

Рис. 6. 3D-визуализация: горизонтальный тип, четвёртый порядок; m = 3; h = −4.

3. Установленные геометрические эффекты

Эффекты, рассмотренные в этом разделе, — геометрические утверждения, выводимые из явной конструкции и её вычислительной реализации. Они не требуют решения волнового уравнения внутри $\Omega_{n,m}$.

3.1. Топологическое переключение по h: программируемая связность

Осевой параметр h изменяет расстояние между последовательными экземплярами стековой системы.

Предложение 2 (режимы связности стековой системы).

Для описанной выше конструкции стековой системы:

1. если $h > 0$, последовательные экземпляры разделены осевыми зазорами;
2. если $h = 0$, последовательные экземпляры соприкасаются в осевых крайних точках;
3. если $h < 0$, последовательные экземпляры перекрываются в осевом направлении и после объединения образуют единую связную область.

Схема доказательства. Расстояние между центрами равно $2H + h$, а осевая протяжённость одного экземпляра равна $2H$. Поэтому:

- $2H + h > 2H$ при $h > 0$ — зазор;
- $2H + h = 2H$ при $h = 0$ — критический контакт;
- $2H + h < 2H$ при $h < 0$ — перекрытие.

Для рассматриваемых здесь осесимметричных тел перекрытие последовательных экземпляров даёт связное объединение.

Это подлинное топологическое переключение: число связных компонент изменяется при непрерывном изменении геометрического параметра.

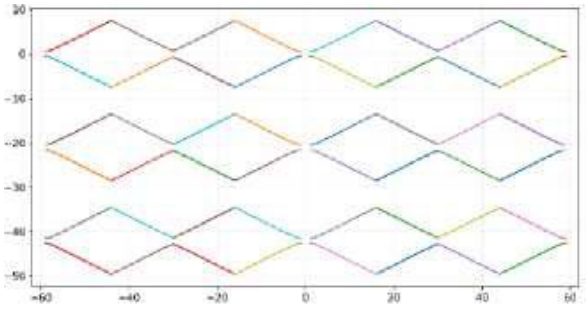

Рис. 7. Вертикальный тип, четвёртый порядок; m = 3; h = 6. Раздельные экземпляры с осевыми зазорами.

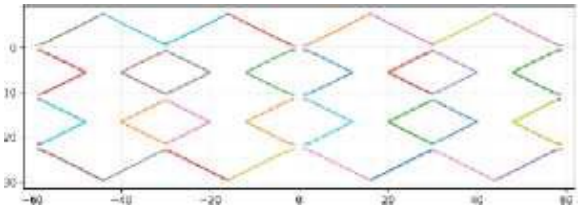

Рис. 8. Та же геометрия при h = −4: объединённый объём после перекрытия.

3.2. Бифуркация «диск/кольцо» третьего порядка по R_1

Пусть

$$D = \sup_{\xi} d(\xi).$$

Для третьего порядка первый рекурсивный образ интервала [0, d(ξ)] имеет вид

$$C_{R1}([0, d(\xi)]) = [\max(R_1 - d(\xi), 0), R_1] \cup [R_1, R_1 + d(\xi)].$$

Следовательно, внутренняя граница достигает оси тогда и только тогда, когда $R_1 \le D$.

Предложение 3 (критерий «диск/кольцо» для третьего порядка).

Для геометрии третьего порядка:

1. если $R_1 > D$, тело вращения является кольцевым;
2. если $R_1 = D$, внутренняя граница достигает оси в критическом случае;
3. если $R_1 < D$, поперечное сечение достигает оси вращения и область приобретает форму диска.

Доказательство. Внутренний интервал начинается с $\max(R_1 - d(\xi), 0)$. Он остаётся строго положительным при всех ξ тогда и только тогда, когда $R_1 > d(\xi)$ при всех ξ, то есть тогда и только тогда, когда $R_1 > D$. Два оставшихся случая следуют непосредственно.

Этот результат установлен только для первого нетривиального шага рекурсии. При более высоких порядках морфология определяется полной рекурсивной интервальной эволюцией, а общая классификация оставлена для последующей работы.

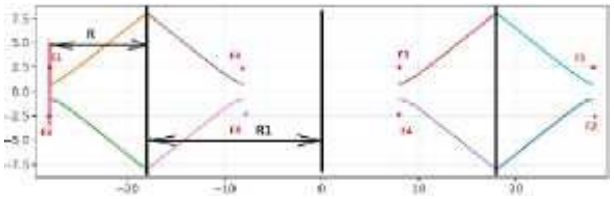

Рис. 9. Вертикальный тип, третий порядок, режим «кольцо» ($R_1 > D$).

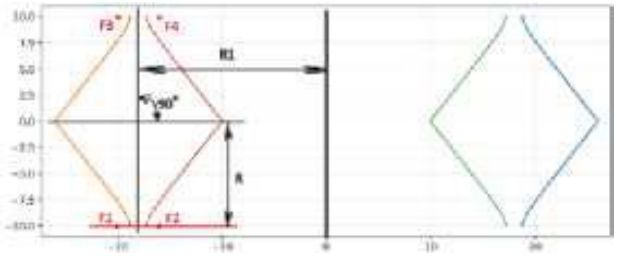

Рис. 10. Горизонтальный тип, третий порядок, режим «кольцо» ($R_1 > D$).

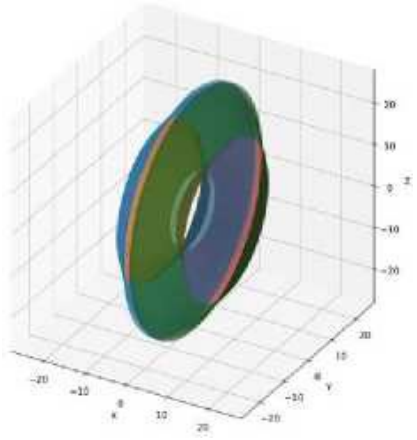

Рис. 11. 3D-визуализация: вертикальный тип, третий порядок.

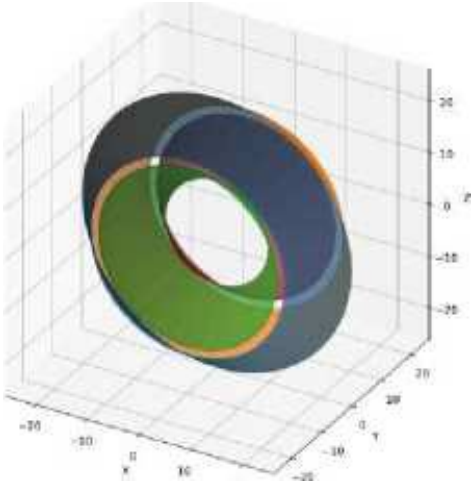

Рис. 12. 3D-визуализация: горизонтальный тип, третий порядок.

3.3. Сжатие рекурсивного ветвления

Формальное число ветвей растёт как $N_n = 2^{n-2}$. Однако число физически различных радиальных компонент после Merge растёт существенно медленнее, поскольку перекрывающиеся и соприкасающиеся ветви объединяются. Таким образом, рекурсивная конструкция увеличивает морфологическое богатство, не требуя экспоненциального роста физической фрагментации.

Это различие между формальной комбинаторной сложностью и физической объединённой сложностью — один из определяющих признаков каркаса.

3.4. Разделение радиальной рекурсии и осевой композиции

Параметры n и m влияют на разные аспекты геометрии:

- n управляет внутренней радиальной сложностью;
- m задаёт кратность вдоль оси;
- h определяет, остаются ли осевые экземпляры раздельными, соприкасающимися или объединёнными.

Такое разделение переменных важно: оно позволяет независимо программировать внутреннюю и осевую топологию.

3.5. Зависимость от ориентации

Вертикальный и горизонтальный типы порождаются одной и той же рекурсивной логикой, но разворачиваются относительно разных определений осей. В результате одинаковые наборы параметров могут давать различные ориентации границ и различные внутренние распределения кривизны и осевой протяжённости.

Это пока не подразумевает иного физического отклика, но задаёт геометрическую основу для последующего поляризационно- и модочувствительного анализа.

4. Принципы проектирования геометрической волновой инженерии

Настоящая конструкция мотивирует более широкий проектный каркас, обобщаемый следующими основополагающими принципами.

Принцип 1. Топология как конструктивная переменная

Ограничивающая область не считается фиксированной. Её связность, структура внутренней полости и осевой состав рассматриваются как управляемые результаты проектирования.

Принцип 2. Рекурсивное проектирование внутреннего объёма

Объект проектирования — не только внешняя граница, но и весь рекурсивно структурированный внутренний объём, построенный явными геометрическими операциями.

Принцип 3. Непрерывное управление при дискретном топологическом отклике

Непрерывное изменение таких параметров, как h или R_1, может вызывать дискретные изменения связности или поведения области в окрестности оси.

Принцип 4. Разделение геометрии и волнового уравнения

Геометрия строится независимо от того, является ли определяющим уравнением модель Максвелла, Гельмгольца, акустическая, упругая или иная линейно-волновая модель.

Принцип 5. Многомасштабная внутренняя геометрия без периодичности

Рекурсивное порождение интервалов вводит множество характерных масштабов длины без необходимости в периодической решётке.

Принцип 6. Геометрическая сложность, согласованная с технологией изготовления

Полученные объёмы трудно или невозможно реализовать субтрактивными методами в полной общности, но они естественно совместимы с аддитивным производством и объёмными технологиями.

Эти принципы ещё не образуют зрелой научной дисциплины; они определяют последовательную исследовательскую программу.

5. Предварительная волновая проверка

Раздел обеспечивает минимальный, но необходимый мост между геометрической конструкцией и волновым поведением. Его цель — не заменить полный электромагнитный или акустический анализ, а показать, что предлагаемые геометрии физически нетривиальны и напрямую связаны с топологией.

5.1. Скалярная волновая модель-заместитель

В качестве первого уровня проверки рассмотрим скалярную задачу на собственные значения Гельмгольца в области $\Omega_{n,m}$:

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad в\ \Omega_{n,m}$$

со стандартными граничными условиями (Дирихле, Неймана или импедансными — в зависимости от предполагаемой физической интерпретации).

Эта модель-заместитель не эквивалентна полной векторной задаче Максвелла, но достаточна для проверки трёх вопросов, чувствительных к топологии:

1. порождают ли несвязные и объединённые геометрии различные модальные опоры;
2. перераспределяется ли локализация поля при переходе от дискообразной к кольцевой геометрии;
3. даёт ли геометрическое масштабирование ожидаемое обратное масштабирование собственных частот.

Для первой публикации такая проверка научно приемлема: геометрия нова, а волновой решатель стандартен.

5.2. Перестройка мод, управляемая связностью

Первая топологически чувствительная проверка сравнивает одну и ту же рекурсивную геометрию при разных значениях h:

- h > 0 — разделённые полости;
- h = 0 — критический контакт;
- h < 0 — единый объединённый объём.

Ожидается, что моды низшего порядка будут качественно различаться:

- в разделённом режиме моды локализуются внутри отдельных экземпляров и образуют слабо взаимодействующие семейства мод полости;
- при критическом контакте связь становится особенно чувствительной к локальной геометрии шейки;
- в объединённом режиме протяжённые моды охватывают объединённую внутреннюю область и уже не распадаются на независимые моды отдельных экземпляров.

Этот эффект не заявляется здесь как полная электромагнитная теорема; это минимальный индикатор топологической чувствительности волнового отклика. Удобен компактный скалярный дескриптор:

$$\Gamma_{ext} = (\int_{\Omega(n,m)} |u|^2 \cdot \chi_{bridge}\, dV) / (\int_{\Omega(n,m)} |u|^2\, dV),$$

где χ_{bridge} обозначает зону перекрытия или контакта между соседними экземплярами. Рост Γ_{ext} при уменьшении h количественно описывает переход от локализованных мод к протяжённым.

5.3. Переход от диска к кольцевому пространству

Вторая проверка относится к переходу третьего порядка, управляемому R_1. Вопрос состоит в том, смещается ли концентрация поля от приосевой к периферийной локализации по мере перехода геометрии от дискообразной к кольцевой.

Удобный топологически чувствительный дескриптор — модальный радиальный момент:

$$M_r(u) = (\int_{\Omega(n)} r \cdot |u|^2\, dV) / (\int_{\Omega(n)} |u|^2\, dV).$$

Для мод с приосевой концентрацией M_r меньше, для периферийных мод — больше. Таким образом, при переходе через порог $R_1 = D$ ожидается измеримое изменение в семействе доминирующих мод. Для первой публикации достаточно показать, что такое перераспределение проявляется уже в скалярных расчётах по Гельмгольцу.

5.4. Масштабная инвариантность

Для линейных однородных волновых уравнений геометрическое масштабирование влечёт соответствующее спектральное масштабирование. Если

$$x \mapsto \lambda x,$$

то характеристические волновые числа масштабируются как

$$k \mapsto k/\lambda,$$

а частоты — соответствующим образом.

Это свойство особенно уместно здесь, поскольку псевдогиперболоидная конструкция определена чисто геометрически. Следовательно, как только поведение установлено численно в одном масштабе, тот же безразмерный режим может быть перенесён — с учётом материальных ограничений — в радиочастотный, микроволновый, акустический или оптический диапазон.

Это не уникальное свойство псевдогиперболоидов, но оно важно, поскольку рассматриваемая структура предназначена служить геометрически ориентированным языком проектирования.

5.5. Утверждение о минимальной проверке

В настоящей работе заявляется следующее ограниченное физическое утверждение: рекурсивная псевдогиперболоидная геометрия не только морфологически нова — ожидается, что она даёт модальное поведение, чувствительное к топологии, которое обнаруживается уже в расчётах скалярных волн.

Это ограниченное утверждение соответствует первой основополагающей публикации. Полная проверка на векторных волнах остаётся ближайшим следующим шагом.

6. Волновые гипотезы и программа исследований

Приведённые ниже гипотезы предлагаются для последующего исследования методами FEM/FDTD. Они намеренно упорядочены от наиболее непосредственных и геометрических к более широким и прикладным.

6.1. Гибридизация мод, управляемая связностью

При переходе h от положительных значений к отрицательным доминирующие моды должны эволюционировать от слабо связанных локализованных в полостях состояний к протяжённым состояниям, поддерживаемым объединённым объёмом.

6.2. Перестройка мод при переходе «диск/кольцо»

При изменении R_1/R в окрестности порога третьего порядка доминирующие моды полости должны переходить от структур поля, сосредоточенных у оси, к периферийно сосредоточенным структурам.

6.3. Спектральные возмущения, чувствительные к контакту

Вблизи $h = 0$ малые геометрические изменения могут вызывать непропорционально большие спектральные возмущения, поскольку топология находится на пороге контакта.

6.4. Рекурсивная спектральная лестница

Каждый порядок рекурсии n вводит дополнительные характерные масштабы длины. Соответственно, спектры при последовательных значениях n могут образовывать семейства резонансов с квазирегулярными интервальными соотношениями.

6.5. Эффекты медленной волны в объединённых стеках

При $h < 0$ распространение волны через объединённые осевые границы раздела может характеризоваться пониженной групповой скоростью, что потенциально даёт пассивное поведение типа задержки без периодических решёток.

6.6. Механизмы потерь, зависящие от связности

Ожидается, что радиационные потери будут качественно различаться в режимах $h > 0$, $h = 0$ и $h < 0$, поскольку пути утечки и эффективное посредничество границ изменяются вместе со связностью.

6.7. Поляризационная чувствительность вертикального и горизонтального типов

Хотя оба семейства по построению осесимметричны, вертикальный и горизонтальный типы могут проявлять разную поляризационную реакцию из-за различной ориентации границ относительно оси.

6.8. Междисциплинарный перенос масштабов

В теории линейных волн одна и та же безразмерная геометрия должна быть переносимой между электромагнитным и акустическим режимами с учётом материальных определяющих соотношений выбранной среды.

6.9. Перераспределение производственных допусков

Поскольку геометрическая функция распределена по нескольким внутренним зонам, а не сконцентрирована в одном элементе кривизны, некоторые метрики качества могут оказаться менее чувствительными к локальным производственным несовершенствам.

Эти гипотезы задают программу численных и экспериментальных работ, а не выводы, уже установленные в данной статье.

7. Обсуждение

Значение настоящей работы состоит не столько в превосходстве над существующими классами резонаторов, сколько во введении иной категории конструктивных переменных. При традиционном проектировании сред обычно оптимизируют выбранный набор параметров в рамках фиксированной топологии; здесь сама топология становится частью набора параметров.

Несколько моментов заслуживают особого внимания.

7.1. Сначала геометрия — затем уравнение

Построение $\Omega_{n,m}$ не предполагает ни Максвелла, ни Гельмгольца, ни какого-либо иного конкретного волнового уравнения. Геометрия строится из интервальной алгебры и операции Merge. Следовательно, один и тот же геометрический каркас может быть перенесён в электромагнитный, акустический и упругий режимы с учётом только конструктивных ограничений каждой предметной области. Это согласуется с тем, как исторически фотонные кристаллы или гиперболические метаматериалы впервые предлагались как геометрические и материальные концепции — задолго до их полного физического освоения.

7.2. Программируемость топологии

Два явных перехода, документированные здесь, — переключение связности по h и бифуркация «диск/кольцо» по R_1 — не являются параметрической настройкой внутри фиксированного семейства. Это подлинные изменения базовой топологии, вызываемые непрерывными параметрами. Сочетание непрерывного управления с дискретным топологическим откликом — центральный конструктивно-теоретический признак каркаса.

7.3. Сжатие комбинаторной сложности

Формальное рекурсивное число предсказывает экспоненциальное ветвление $N_n = 2^{n-2}$. Операция Merge систематически сжимает его до существенно меньшего числа физически различных компонент. Это означает, что глубину рекурсии можно увеличивать для обогащения морфологии, не платя за это экспоненциальной физической фрагментацией. Свойство необычно для рекурсивных геометрических конструкций.

7.4. Технологические перспективы

Представленные конструкции трудно реализовать чисто субтрактивными методами в полной общности: внутренние полости и объединённые каналы не имеют прямого доступа и не могут быть получены наружной механообработкой. Вместе с тем они естественно подходят для аддитивного производства (полимерная 3D-печать, металлическая AM-печать, двухфотонная литография, многоматериальная печать) и для объёмных технологий. Таким образом, структура сознательно согласована с современными и перспективными производственными парадигмами.

7.5. Ограничения настоящей работы

Ограничения документа явно признаются:

1. Волновая проверка ограничена скалярной моделью-заместителем Гельмгольца. Полная векторная проверка по Максвеллу и полная эластодинамическая проверка здесь не выполняются.
2. Критерий «диск/кольцо» установлен только для первого нетривиального шага рекурсии. Полная классификация для всех порядков рекурсии оставлена для последующей работы.
3. Об экспериментальном изготовлении или измерениях не сообщается. Каркас является основополагающим и проектно-ориентированным.
4. Потери, дисперсия и нелинейность материала выходят за рамки настоящей работы.

Эти ограничения намеренны. Цель статьи — заложить чистую геометрическую и концептуальную основу, а не предъявить полностью проверенное физическое устройство.

7.6. Соотношение с существующими структурами

Настоящая конструкция дополняет существующие подходы, а не конкурирует с ними:

- Резонаторы WGM [1] оптимизируют гладкие выпуклые границы; здесь границы явно невыпуклы и рекурсивно структурированы.
- CROW и системы со связанными полостями [2] дискретизируют связь между неподвижными резонаторами; здесь режимы связи (разделение, контакт, объединение) получают одним непрерывным параметром h.
- Фотонные кристаллы [3] опираются на периодичность решётки; здесь многомасштабная внутренняя структура возникает из рекурсии, а не из периодичности.
- Платформы BIC [4] используют интерференцию, защищённую симметрией; здесь допущение о симметрии не требуется, а проектным рычагом служит сама топология.
- Гиперболические метаматериалы [5] используют анизотропную дисперсию через спроектированные материальные тензоры; здесь среда может быть обычной, а анизотропию внутренних масштабов длины обеспечивает геометрия.

Иными словами, настоящая структура добавляет дополнительную степень свободы проектирования — топологию ограничивающей области, — которая в значительной мере отсутствует в традиционных постановках.

8. Выводы

В статье представлены псевдогиперболоиды высшего порядка с операцией слияния как геометрический каркас программируемого удержания волн и предложена геометрическая волновая инженерия как более широкий проектный каркас, порождаемый этим построением.

Основные вклады:

1. Формальное рекурсивное построение внутреннего объёма $\Omega_{n,m}$ на основе интервальной алгебры и операции Merge, управляемое семью независимыми параметрами (a, b, R, R_1, h, m, n).

2. Ряд явных геометрических свойств конструкции:
   – переключение связности, управляемое осевым параметром h;
   – критерий бифуркации «диск/кольцо» третьего порядка $R_1 \gtrless D$;
   – топологическое сжатие формального рекурсивного ветвления;
   – разделение радиальной рекурсии (n) и осевой композиции (m, h);
   – различия ориентации вертикального и горизонтального типов.
3. Согласованный набор принципов проектирования, определяющих геометрическую волновую инженерию как направление исследований, в котором топология ограничивающей области является основной конструктивной переменной.
4. Минимальный, но явный путь волновой проверки через скалярную модель-заместитель Гельмгольца, включая топологически чувствительные дескрипторы (Γ_{ext} и M_r), пригодные для прямого численного использования, вместе с чётко сформулированным и ограниченным утверждением о проверке.

Структура масштабно-инвариантна в теории линейных волн, внутренне совместима с аддитивным производством и применима к радиочастотному, микроволновому, акустическому и оптическому диапазонам с учётом физических ограничений конкретной области.

Следующие шаги:

- полное векторное моделирование по Максвеллу (FEM/FDTD) репрезентативных геометрий;
- акустические и эластодинамические расчёты в том же $\Omega_{n,m}$;
- изготовление небольших демонстрационных образцов методом аддитивного производства;
- обобщение критерия «диск/кольцо» на произвольный порядок рекурсии;
- постановка задач обратного проектирования, в которых целевые модальные свойства определяют выбор (a, b, R, R_1, h, m, n).

Настоящий документ представляет геометрическую и концептуальную основу, на которой могут строиться эти последующие работы.

10. Литература

[1] K. J. Vahala, Optical microcavities, Nature 424, 839–846 (2003).

[2] A. Yariv, Y. Xu, R. K. Lee, A. Scherer, Coupled-resonator optical waveguide: a proposal and analysis, Optics Letters 24, 711–713 (1999).

[3] J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, R. D. Meade, Photonic Crystals: Molding the Flow of Light, 2nd ed., Princeton University Press (2008).

[4] C. W. Hsu, B. Zhen, A. D. Stone, J. D. Joannopoulos, M. Soljačić, Bound states in the continuum, Nature Reviews Materials 1, 16048 (2016).

[5] А. Поддубный, И. Иорш, П. Белов, Я. Кившар, Гиперболические метаматериалы, Nature Photonics 7, 948–957 (2013).

Приложения

Приложение A. Краткое описание нотации

- a, b — параметры порождающего гиперболического профиля;
- R — радиус первичной рекурсии;
- R_1 — первый внутренний радиус рекурсии (управление морфологией третьего порядка);
- h — параметр осевого зазора стековой системы (chimney system);
- m — число экземпляров, уложенных вдоль оси;
- n — порядок рекурсии;
- L — полудлина экземпляра вертикального типа: $L = a \cdot \sqrt{(1 + (R/b)^2)}$;
- H — осевая полудлина единичного экземпляра (H = L для вертикального типа, H = R для горизонтального);
- D — супремум базового радиального профиля: $D = \sup_{\xi} d(\xi)$;
- e_{ξ} — единичный вектор вдоль общей оси суммирования;
- B_k — формальное рекурсивное множество ветвей порядка k;
- N_n — число формальных ветвей: $N_n = 2^{n-2}$;
- $I_k(\xi)$ — интервальное семейство при порядке рекурсии k;
- C_R — оператор интервальной рекурсии на радиусе R;
- Merge (слияние) — операция, объединяющая перекрывающиеся или соприкасающиеся замкнутые интервалы в конечное непересекающееся семейство;
- Ω_n — единичный рекурсивный экземпляр порядка n;
- $\Omega_{n,m}$ — полный объединённый внутренний объём стековой системы;
- Γ_{ext} — топологически чувствительный дескриптор расширения (доля поля в зоне перекрытия/bridge-зоне);
- M_r — модальный радиальный момент (приосевая или периферийная локализация).

Приложение B. Заявление о воспроизводимости

Все геометрические иллюстрации статьи (рис. 1–12) построены одним расчётным скриптом, который принимает семь параметров (a, b, R, R_1, h, m, n) и создаёт соответствующие 2D меридиональные сечения и 3D-визуализации $\Omega_{n,m}$.

Скрипт, файлы параметров для каждого рисунка и шаблоны проверки скалярных волн размещены в общедоступном архиве, указанном в разделе «Доступность данных и кода». Геометрические результаты детерминированы и полностью воспроизводимы по одним лишь входным параметрам.

Приложение C. Доступность данных и кода

Полностью воспроизводимый расчётный скрипт прилагается к статье в качестве дополнительного материала. Скрипт генерирует все геометрические иллюстрации и данные интервальной рекурсии для $\Omega_{n,m}$ по семи входным параметрам (a, b, R, R_1, h, m, n).

- Репозиторий/архив: 10.5281/zenodo.19926174
- Лицензия: CC-BY-4.0 (текст и рисунки); MIT (код)
- Версия записи: v1 от 30 апреля 2026 г.

Для воспроизведения геометрических результатов проприетарное программное обеспечение не требуется.