Геометрическая волновая инженерия

Кольцевая локализация мод высокого порядка в псевдогиперболоиде второго порядка

Воспроизводимая скалярная верификация C1–C3 с контрольными геометриями и оценкой неопределённости

Хаустов Владимир Игоревич

ORCID: 0009-0007-3657-2309

Лаборатория геометрической волновой инженерии https://vihrihaosa.ru/

Лицензия: CC BY 4.0

Дата публикации: 14 июня 2026 года

DOI: 10.5281/zenodo.20690427

Научно-технический перевод с английского языка.

Редакция, адаптированная для русскоязычного инженера-исследователя.

Оригинал: Khaustov. V. Annular High-m Localization in a Closed Second-Order Vertical Pseudohyperboloid Cavity: A Reproducible Scalar C1-C3 Verification with Benchmark Controls and Uncertainty Diagnostics. https://doi.org/10.5281/zenodo.20690427

Аннотация

В статье представлена восстановленная и расширенная научная редакция исследования по верификации C1–C3 замкнутой полости вертикального псевдогиперболоида второго порядка. Рассматривается новая резонаторная геометрия геометрической волновой инженерии (ГВИ), полученная вращением гиперболической меридиональной образующей, смещённой относительно оси вращения. Верификация намеренно ограничена редуцированной осесимметричной скалярной задачей на собственные значения для уравнения Гельмгольца. Это не полновекторный расчёт по уравнениям Максвелла; он не подтверждает генерацию лазерного излучения, вывод энергии, потери на излучение или селекцию мод усилением. Центральный вопрос существенно уже и допускает воспроизводимую проверку: поддерживает ли такая геометрия скалярные собственные моды, взвешенная энергия которых сосредоточена в окрестности кольцевого уровня $\rho = R$ между опорными плоскостями внешних фокусов $x = -c$ и $x = +c$?

Восстановлено последовательное научное изложение, необходимое для описания новой геометрии: её построение, наследование фокальных колец, сопоставление с известными классами резонаторов, математическая постановка, скалярные аналоги граничных условий, численное отображение области, диагностические критерии C2 и C3, базовые расчёты, серии по большим значениям m, целевые спектральные сканирования, проверка параметрического семейства, сравнение с контрольными геометриями, диагностика неопределённости и испытания на устойчивость. Численно надёжные результаты сохранены. Результаты, представляющие интерес, но ещё не позволяющие сделать окончательный вывод, прямо отнесены к вспомогательной диагностике или гипотезам для последующих исследований.

Наиболее устойчив результат C2: при $a = 0{,}3$, $b = 0{,}6$, $R = 3{,}0$ и $m = 15$ приблизительно 92–93 % взвешенной скалярной энергии находятся в диагностическом кольцевом слое шириной ±10 % R при последовательном измельчении сетки от 70×48 до 160×112. Однако сопоставимые негиперболические контрольные формы также обеспечивают около 91–92 %, поэтому сама по себе кольцевая локализация мод высокого порядка не доказывает исключительности гиперболической поверхности. C3 подтверждается лишь несколькими дискретными модальными максимумами выше установленного порога после исключения дублирующихся собственных мод; речь не идёт ни о непрерывном спектральном окне, ни о физической добротности Q. Коэффициент осевого удержания CF и утечка через рупорные участки представляют самостоятельный научный интерес, поскольку позволяют оценивать энергию за пределами фокальных опорных плоскостей. Однако их минимальные значения близки к эмпирическому уровню сеточной изменчивости; поэтому такие показатели остаются вспомогательными, пригодными для формулирования гипотез, но не для окончательного доказательства превосходства гиперболической геометрии.

Научно обоснованный вывод положителен, но ограничен: вертикальный псевдогиперболоид второго порядка является новой аналитически воспроизводимой полостью с фокальными кольцами, поддерживающей выраженную кольцевую локализацию скалярных мод высокого m и открывающей возможность изучения более широкого класса оптимизированных резонаторов псевдогиперболоидного типа.

Ключевые слова: геометрическая волновая инженерия; псевдогиперболоид; скалярная спектральная задача Гельмгольца; кольцевая локализация; моды высокого m; моды типа шепчущей галереи; контрольные геометрии; оценка неопределённости; фокальные кольца; утечка через рупорные участки.

Содержание

Аннотация 2
1. Область исследования и научный статус верификации 4
2. Научный контекст: отличие от классических резонаторов....4
3. Геометрическая волновая инженерия и вертикальный псевдогиперболоид второго порядка 6
4. Замкнутая скалярная полость: область, граничные аналоги и диагностика....8
5. Критерии C1–C3 и численная стратегия....9
6. Базовые скалярные собственные моды и первое смещение к кольцу....9
7. Расширенное исследование по m и эффективный барьер углового момента 10
8. Целевой результат C2 и сеточная проверка....13
9. Спектральная локализация C3: дискретные максимумы, а не сплошное окно....14
10. Параметрическое семейство и устойчивость C2....16
11. Контрольные сравнения: что является уникальным, а что нет....17
12. Межфокальное осевое удержание, CF, утечка через рупоры и неопределённость 20
13. Испытания на устойчивость и оптимизированные PHB-подобные резонаторы 22
14. Физическая интерпретация и возможные технические применения 25
15. Ограничения, фальсифицируемость и дальнейшие этапы проверки 26
16. Заключение....27
Приложение. Пакет воспроизводимости и основной скрипт....28
Литература 28

1. Область исследования и научный статус верификации

В настоящей работе проверяется свойство собственных мод новой замкнутой скалярной полости, образованной вертикальным псевдогиперболоидом второго порядка. Термин «резонатор» применяется здесь в ограниченном значении: геометрия рассматривается как замкнутая скалярная полость, способная поддерживать собственные моды. Статья не утверждает, что уже создан полноценный электромагнитный, акустический или лазерный резонатор. Это принципиальное разграничение: одна геометрическая форма может изучаться как лучевой бильярд, скалярная полость Гельмгольца, векторный резонатор Максвелла и, в перспективе, как возбуждаемое устройство с открытым выходом. Здесь существенны только первые два уровня, причём численная часть относится именно к редуцированной скалярной постановке Гельмгольца.

Полное геометрическое описание необходимо потому, что изучаемая форма не является незначительной модификацией известного резонатора. Это конструктивно задаваемая поверхность, формируемая вращением гиперболической меридиональной ветви, смещённой относительно оси. Такое построение преобразует точечные фокусы исходной гиперболы во внешние фокальные кольца. Без последовательного объяснения данного механизма читатель не сможет корректно оценить результаты расчётов. Поэтому в статье совместно рассматриваются геометрия, определяющая диагностические области, и расчёты собственных скалярных мод, проверяющие фактическое сосредоточение энергии в этих областях.

Наиболее надёжен результат C2. В целевой геометрии моды высокого m концентрируют около 92–93 % взвешенной энергии в кольцевой области ±10 % R. Не менее существен и отрицательный результат: негиперболические контрольные формы могут обеспечивать сопоставимые доли энергии. Следовательно, одной метрики η_{100R} недостаточно, чтобы признать новую поверхность обладающей доказанным исключительным преимуществом. Это не неудача исследования, а главное научное уточнение, полученное в программе контрольных сравнений.

Более предварительны выводы о коэффициенте межфокального удержания CF и утечке в рупорные участки. Эти показатели введены потому, что геометрически обусловленная лучевая гипотеза для гиперболической образующей относится не только к радиальному, но и к осевому направлению: предполагаемое волновое проявление фокального построения должно не только локализоваться около $\rho = R$, но и подавлять выход энергии за опорные плоскости внешних фокусов $|x| = c$. Расчёты выявляют перспективные различия, но минимальные утечки близки к уровню сеточной изменчивости и зависят от контрольных форм с согласованным наклоном стенки или объёмом. Поэтому CF рассматривается как вспомогательный диагностический показатель, а не окончательное доказательство уникальности.

2. Научный контекст: отличие от классических резонаторов

Псевдогиперболоидную полость необходимо отличать от нескольких известных семейств резонаторов. Резонаторы с модами шепчущей галереи также поддерживают кольцевые либо приповерхностные моды высокого m. В таких системах высокий азимутальный порядок удерживает энергию возле криволинейной границы; соответствующий механизм хорошо известен. Исследуемая геометрия разделяет этот высокоазимутальный механизм, и потому величина η_{100R} сама по себе не подтверждает новизну. Отличие PHB состоит в том, что его граница не сводится к тороидальной, круговой или сфероидальной: рупорные участки задаются смещённой гиперболической зависимостью и наследуют внешние фокально-кольцевые ориентиры исходной гиперболы.

Классические устойчивые и неустойчивые лазерные резонаторы, в том числе рассматриваемые в подходах Когельника—Ли и Зигмана, обычно характеризуют зеркалами, ABCD-матрицами распространения, усилением, дифракционными потерями и выводом излучения. Здесь такие задачи не решаются. Новизна не состоит в утверждении, что PHB уже лучше известного лазерного резонатора. Предлагается новая замкнутая скалярная геометрия, в которой фокальные ориентиры конструктивно переведены в кольцевую форму. Сравнение открытых лазерных устройств потребует отдельного исследования по Максвеллу либо методами Фокса—Ли/Френеля.

В качестве сопоставлений имеют значение также биконические, коаксиальные и рупорные СВЧ-полости. Эти системы показывают, что конические и рупорные поверхности давно применяются для формирования электромагнитных мод. Отличие нового построения заключается в применении гиперболической меридиональной образующей и анализе поля относительно плоскостей её внешних фокусов. Это не доказывает автоматически нового физического механизма, но точно определяет, где следует проверять возможную новизну.

Таким образом, литературный контекст требует сдержанной формулировки. PHB не является первой кольцевой полостью для мод высокого m или первым рупорным резонатором. Новизна заключается в построении фокальных колец посредством вращения смещённой гиперболической образующей и в систематической скалярной проверке C1–C3 с сопоставимыми контрольными геометриями. Поэтому представлены как положительные, так и отрицательные результаты: геометрия нова, однако некоторые характеристики её волнового поведения совпадают с известной физикой мод шепчущей галереи высокого порядка.

Таблица 1. Классический контекст геометрии PHB.

Класс	Общее с PHB	Главное отличие	Статус в статье
Моды шепчущей галереи	Кольцевая / пристеночная локализация высокого m	PHB добавляет внешние фокальные кольца гиперболического происхождения	Контекст; η не уникальна
Диэлектрические / оптические микрополости	Удержание мод кривизной границы	Здесь PHB — макроскопическая замкнутая скалярная геометрия, а не диэлектрическая микрополость	Только литературный ориентир
Классические лазерные резонаторы	Понятие резонатора и селекции мод	Не учтены усиление, потери, вывод и поля Максвелла	Будущая работа
Биконические / рупорные полости	Осевая рупорная геометрия	Гиперболический закон стенки и фокальные кольца	Ближайшее инженерное сравнение
Моды OAM / углового момента	Азимутальный порядок m и локализация высокого m	Скалярный m не равнозначен полновекторному оптическому OAM	Только физическая аналогия

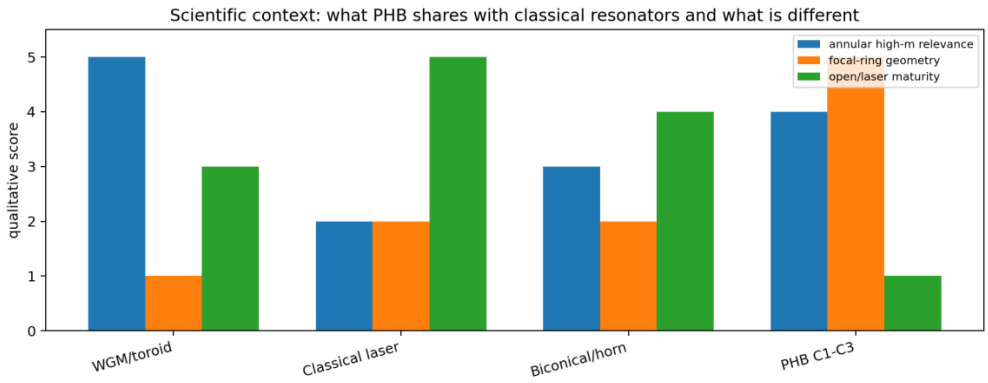

Рисунок 1. Качественное сопоставление с известными классами резонаторов.

Интерпретация. PHB обладает общими с полостями типа шепчущей галереи механизмами кольцевой локализации при высоком m, но отличается построением внешних фокальных колец из смещённой гиперболической образующей. Возможность его практического использования в лазерных устройствах с открытыми границами данной работой не установлена.

3. Геометрическая волновая инженерия и вертикальный псевдогиперболоид второго порядка

Вертикальный псевдогиперболоид второго порядка строится на основе гиперболического закона меридиональной образующей рупора. В верхней полуплоскости радиус рупора определяется как $\rho_horn(x) = R - b\sqrt{((|x|/a)^2 - 1)}$, $|x| \geq a$. Конец рупора расположен при $L = a\sqrt{(1 + (R/b)^2)}$, где аналитический радиус обращается в нуль. В замкнутых скалярных тестах центральная область $|x| \leq a$ закрывается полутороидальным участком $\rho_cap(x) = R + \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Расчётная меридиональная область задаётся условиями $0 < \rho < \rho_wall(x)$, $-L < x < L$; в скалярной осесимметричной редукции ей соответствует тело вращения вокруг оси x.

Половина расстояния между фокусами исходной гиперболы равна $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Поскольку перед вращением гипербола смещена на радиус R, два фокуса двумерной образующей в трёхмерной геометрии превращаются не в точки, а в два внешних фокальных кольца при $x = -c$ и $x = +c$ радиуса R. Определение «внешние» принципиально: эти кольца не являются внутренними точками полости. Они представляют собой унаследованные от образующей геометрические опорные множества, по которым определяется диагностическая кольцевая область.

Следовательно, диагностический слой выбирается не произвольно. В резонаторе с точечным фокусом исследовали бы малый объём около точки. Для геометрии с фокальными кольцами надлежит исследовать полосу вблизи $\rho = R$ между плоскостями $|x| \leq c$. Здесь используется семейство $D_h = \{|x| \leq c, |\rho - R| \leq hR\}$, где $h = 0{,}025; 0{,}050; 0{,}100$. Основной показатель C2 — η_100R — соответствует $h = 0{,}100$; показатели η_050R и η_025R позволяют определить, действительно ли мода образует узкое кольцо или занимает относительно широкую кольцевую область.

Центральное замыкание и два рупора образуют единую составную геометрию. Последующее испытание на зависимость от формы замыкающего участка показывает, что он не является пассивным дополнением. Сильные моды обусловлены совместным действием центральной кольцевой области, двух замыкающих рупоров и азимутальной структуры высокого порядка m. Поэтому PHB следует рассматривать как конструктивно определённое семейство резонаторов, а не просто как отдельную гиперболу.

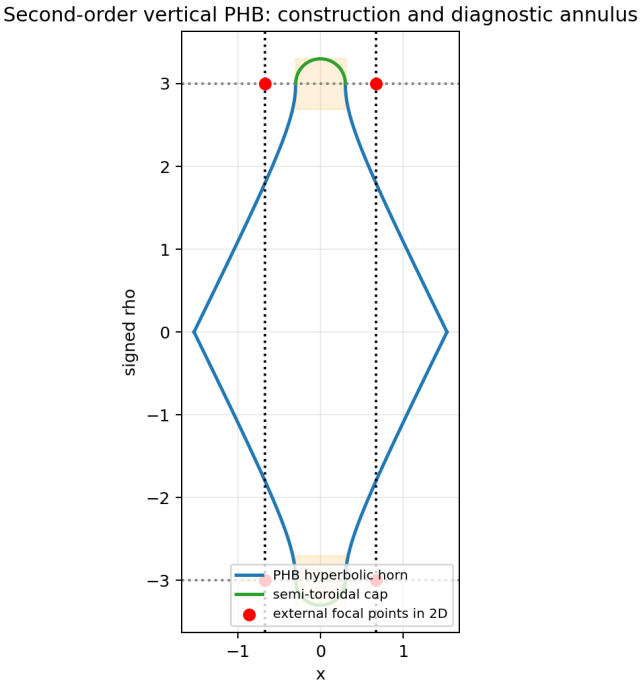

Рисунок 2. Меридиональное построение вертикального псевдогиперболоида второго порядка и его диагностическая кольцевая область.

Интерпретация. Показаны два гиперболических рупора, центральное полутороидальное замыкание, внешние фокальные ориентиры и диагностический кольцевой слой. После вращения точечные фокусы исходной гиперболы превращаются в кольцевые опорные множества.

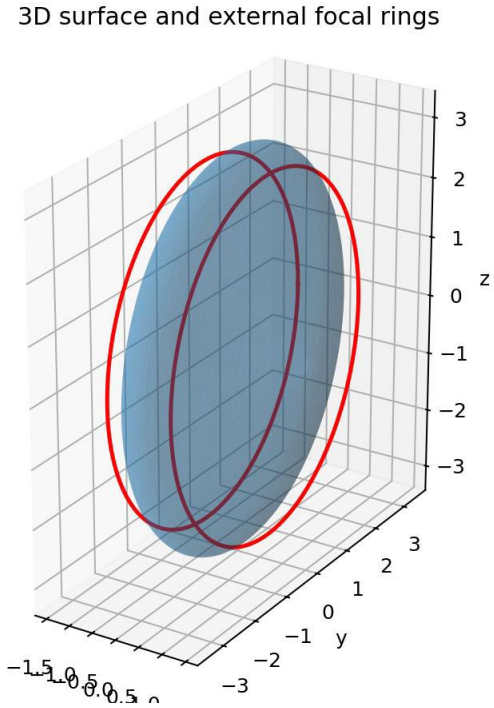

Рисунок 3. Трёхмерная поверхность псевдогиперболоида с внешними фокальными кольцами.

Интерпретация. Трёхмерное представление показывает, почему задача не относится к обычной точечной фокусировке. Опорными геометрическими объектами являются круговые фокальные кольца радиуса R в плоскостях x = ±c.

4. Замкнутая скалярная полость: область, граничные аналоги и диагностика

Для каждого азимутального порядка m скалярное поле задаётся представлением $u(x,\rho,\varphi) = U_m(x,\rho)\exp(im\varphi)$. После разделения переменных скалярный оператор Гельмгольца в цилиндрических координатах содержит член m^2/ρ^2. В сильной форме спектральная задача схематически записывается как $[-\partial^2_x - (1/\rho)\partial_\rho(\rho\partial_\rho) + m^2/\rho^2]U_m = k^2U_m$, при цилиндрической мере энергии $\rho d\rho dx$. Используемый решатель вводит приспособленную к границе координату $s = \rho/\rho_{wall}(x)$, отображающую меридиональную область на прямоугольник.

Два скалярных аналога граничных условий не следует отождествлять с полными электромагнитными TE/TM-модами Максвелла. Аналог с естественным граничным условием соответствует условию, вытекающему из слабой скалярной постановки. Аналог Дирихле задаёт U = 0 на стенке. В обоих случаях проверяется возможность существования кольцевых скалярных собственных полей в данной геометрии. Если не оговорено иное, основные целевые результаты получены для естественного скалярного граничного условия; в исходных базовых проверках также представлены величины для аналога Дирихле, чтобы показать, что переход к высокоазимутальной кольцевой моде не зависит от единственного скалярного условия.

Ось ρ = 0 является сингулярной для цилиндрического оператора. При m > 0 регулярная азимутальная компонента должна обращаться в нуль на оси по закону ρ^m. Численная сетка исключает точную сингулярную точку с помощью малого внутреннего отсечения s_min в редуцированной конечно-разностной реализации с отображением по границе. В сопровождающем скрипте значение s_min выводится и проверяется его влияние, поскольку при достаточно малом отсечении высокоазимутальная мода должна быть к нему нечувствительна.

Концевые точки рупоров $\rho_{wall}(\pm L) = 0$ также численно сложны. Область замкнута, но аналитический профиль образует осевое острие. Решатель не располагает крайние узлы x точно в сингулярной точке, а применяет небольшое отсечение по координате. Поэтому расчёты трактуются как воспроизводимая редуцированная модель, но не как строгое математическое доказательство для идеально гладкого многообразия.

Таблица 2. Математическая область, модель поля и граничные аналоги.

Объект	Определение / выражение	Интерпретация
Область	$0 < \rho < \rho_{wall}(x)$, $-L < x < L$	Замкнутая меридиональная скалярная полость
Конец стенки	$L = a\sqrt{(1 + (R/b)^2)}$	Радиус рупора равен нулю при $\|x\| = L$
Поле	$u = U_m(x,\rho)\exp(im\varphi)$	Разделение по азимуту
Энергия	$E(A) = \int_A \|U\|^2 \rho d\rho dx$	Взвешенная цилиндрическая энергия
Естественное условие	Естественная граница слабой формы	Только скалярный аналог, подобный TE
Условие Дирихле	U = 0 на границе	Только скалярный аналог, подобный TM

5. Критерии C1–C3 и численная стратегия

Обозначения C1–C3 используются как операционная последовательность верификации, а не как универсальная классификация физических явлений. C1 означает, что геометрия, область, оператор, граничные аналоги, диагностические зоны и программные скрипты определены достаточно полно для воспроизведения расчёта. C2 означает выраженную кольцевую локализацию при $\eta_100R \geq 70$ %. Этот порог не является законом природы; он выбран как достаточно консервативный инженерный критерий, отделяющий само наличие энергии в кольцевой области от преобладания энергии в ней. Поскольку целевой результат превышает 92 %, основной вывод C2 практически не зависит от выбора порога 70 либо 80 %.

Критерий C3 требует наиболее осторожной интерпретации. Единственная локализованная собственная мода подтверждает лишь существование одной такой моды. Непрерывное спектральное окно потребовало бы исследования вынужденного отклика либо плотной последовательности различных мод выше порога без промежутков с низкой локализацией. Полученный результат слабее: в исследованном диапазоне после удаления дубликатов обнаружены две моды выше порога. Поэтому здесь применяется выражение «дискретные модальные максимумы выше порога», а не «непрерывное окно» или «физическая добротность».

Численная стратегия основана на разреженном решении спектральной задачи методом shift-invert. Исходные результаты для соседних сдвигов не равнозначны перечню физических мод, поскольку одна и та же собственная мода может повторно появляться при нескольких близких целевых сдвигах. Следовательно, необходимо удалять дубликаты по собственным значениям. Все утверждения о C3 основаны именно на очищенном списке мод, а не на сырой оболочке результатов отдельных сканирований.

Таблица 3. Применяемые операционные критерии верификации.

Критерий	Операционное определение	Установленный статус
C1	Воспроизводимые скалярная геометрия, оператор и скрипты	Выполнен для редуцированной модели
C2	$\eta_100R \geq 70$ % в диагностическом кольце	Уверенно выполнен для целевых семейств высокого m
C3	Несколько различных мод выше порога либо непрерывное окно отклика	Лишь ограниченное дискретное подтверждение: два максимума, без сплошного окна
Специфичность	Сопоставление с контролями	Геометрия нова; η не уникальна; CF вторичен и неопределён

6. Базовые скалярные собственные моды и первое смещение к кольцу

Базовая конфигурация a = 0,2, b = 0,2, R = 1 послужила первой компактной проверкой способности скалярного решателя формировать поле вблизи заданного кольцевого уровня. При m = 6 для скалярного аналога естественного граничного условия в слое ±5 % R содержится 27,71 % энергии, а в слое ±10 % R — 53,19 %. Этого недостаточно для выполнения C2, однако результат имеет физическое значение: мода не просто локализована вдоль оси, а уже смещена к кольцевому уровню, заданному геометрией фокальных колец.

Базовый результат включён потому, что представление новой геометрии не должно начинаться только с самого сильного оптимизированного случая. Исходный расчёт показывает постепенность организации поля и исключает восприятие итоговой высокоазимутальной локализации как одного специально отобранного числа. Переход от m = 6 к m = 15 свидетельствует о связи кольцевого состояния с азимутальным порядком и, следовательно, с цилиндрическим оператором, а не только с профилем стенки.

Таблица 4. Базовое кольцевое собственное поле при m = 6.

Граничный аналог	m	Сетка	kR	η_025R	η_050R	η_100R	E(|x|≤c)
Естественный / скалярный TE-подобный	6	100 × 70	6.576265	12.87 %	27.71 %	53.19 %	99.66 %

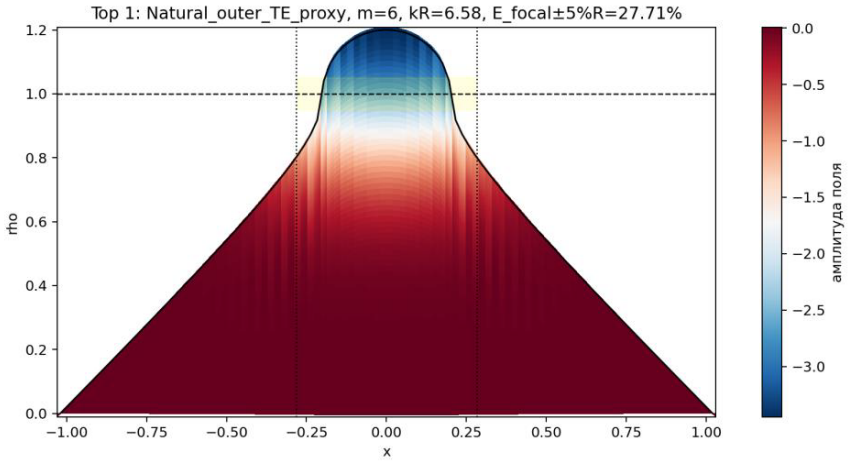

Рисунок 4. Базовое скалярное собственное поле при m = 6, a = 0,2, b = 0,2, R = 1.

Интерпретация. Первое волновое решение уже смещено к кольцевому уровню, однако порог C2 пока не достигнут. Результат служит связующим звеном между геометрией и сильной локализацией при высоком m.

7. Расширенное исследование по m и эффективный барьер углового момента

Расширенный перебор азимутального порядка m — не вспомогательный численный приём, а физическая основа полученного скалярного результата. После разделения по азимуту член m^2/ρ^2 играет роль эффективного центробежного потенциала. Вблизи оси он велик и подавляет поле. При увеличении m энергетически благоприятная область сдвигается наружу, поэтому кольцевые и пристеночные моды становятся всё более естественными. Этим объясняется, почему m = 0 не даёт наиболее выраженной кольцевой локализации и почему m = 15 является удобной рабочей точкой.

Тот же механизм ограничивает утверждения об уникальности. Если высокий m сам по себе выталкивает поле в кольцевые и пристеночные области, то достаточно гладкая осесимметричная полость со сходным кольцевым поперечным сечением также может давать большую η_100R. Именно это установлено контрольными сравнениями. Таким образом, член m^2/ρ^2 одновременно объясняет реальность наблюдаемого эффекта в РНВ и показывает, почему одной метрики η_100R недостаточно для доказательства исключительности гиперболической поверхности.

В базовом семействе при m = 15 порог 70 % преодолён и для аналога условия Дирихле, и для естественного скалярного условия. Такое согласие полезно, но должно оцениваться на правильном уровне: кольцевая локализация не является артефактом единственного скалярного граничного аналога. Оно не означает верификации электромагнитных TE/TM-мод Максвелла.

Таблица 5. Достижение порога C2 при высоком m и сеточная проверка.

Граничный аналог	Сетка	kR	η_100R	η_050R
Дирихле / TM-подобный	70 × 48	18.5529	75.73 %	44.50 %
Дирихле / TM-подобный	100 × 70	18.5903	74.68 %	44.53 %
Дирихле / TM-подобный	130 × 92	18.6140	74.60 %	42.00 %
Естественный / TE-подобный	70 × 48	18.5408	75.57 %	44.49 %
Естественный / TE-подобный	100 × 70	18.5859	74.93 %	44.50 %
Естественный / TE-подобный	130 × 92	18.6119	74.80 %	42.25 %

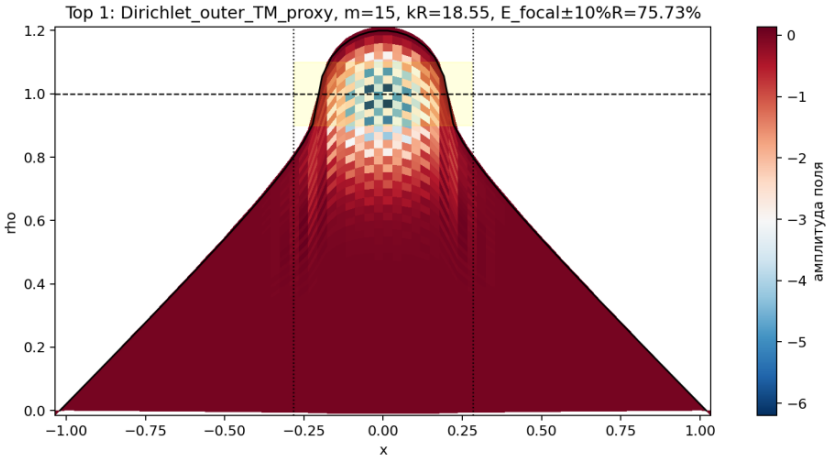

Рисунок 5. Характерное кольцевое скалярное собственное поле высокого m для базовой геометрии.

Интерпретация. При m = 15 поле избегает оси и занимает кольцевую область. Это иллюстрирует роль азимутального порядка и эффективного центробежного слагаемого.

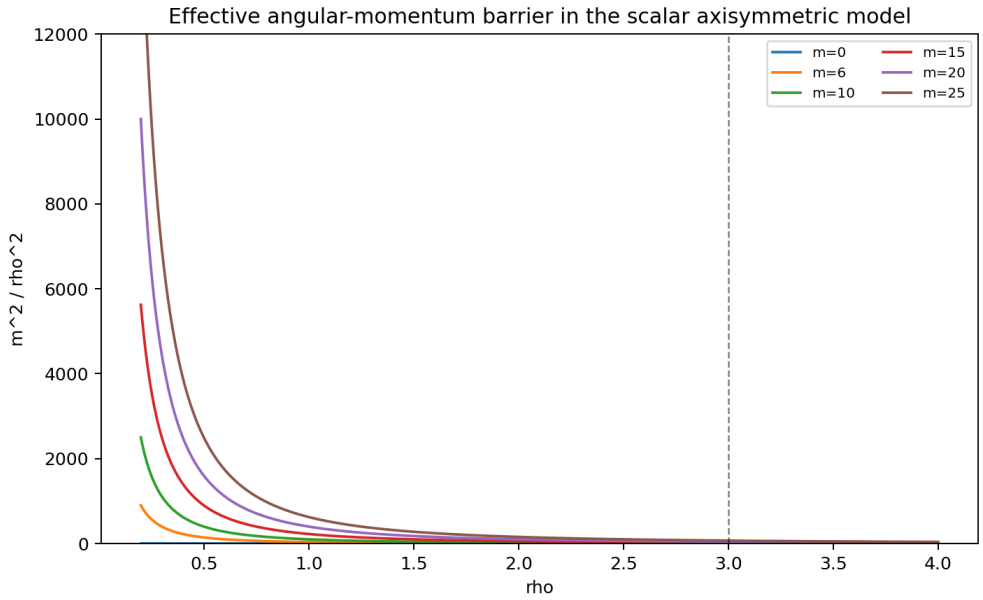

Рисунок 6. Эффективный центробежный барьер m^2/ρ^2.

Интерпретация. При большом m скалярный оператор препятствует локализации у оси. Это главная причина общности кольцевых мод в осесимметричных высокоазимутальных полостях и недостаточности η_100R для доказательства уникальности гиперболической формы.

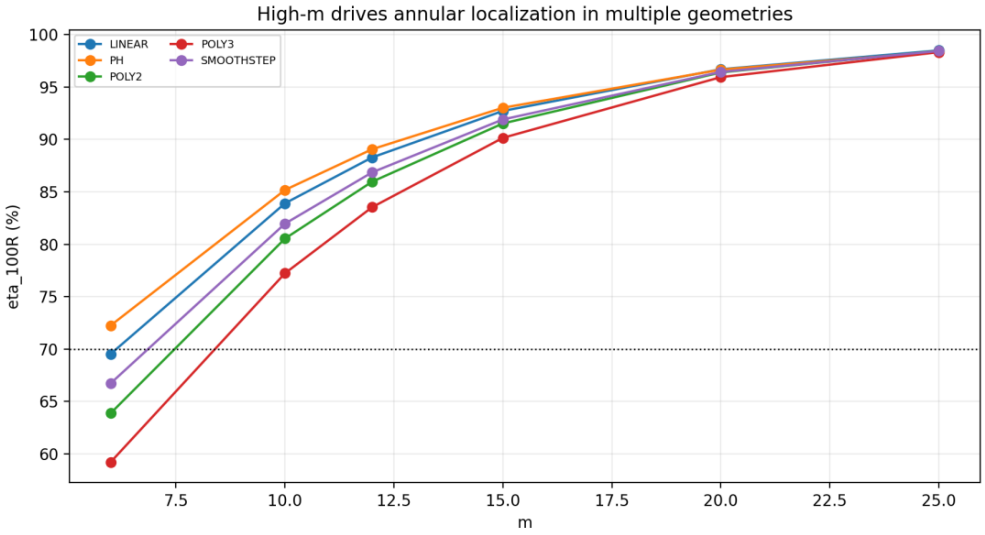

Рисунок 7. Изменение η_100R с азимутальным порядком m для PHB и контрольных геометрий.

Интерпретация. При росте m величина η_100R увеличивается у нескольких геометрий. Следовательно, высокоазимутальная кольцевая локализация представляет собой общий осесимметричный механизм, а не эффект, присущий исключительно PHB.

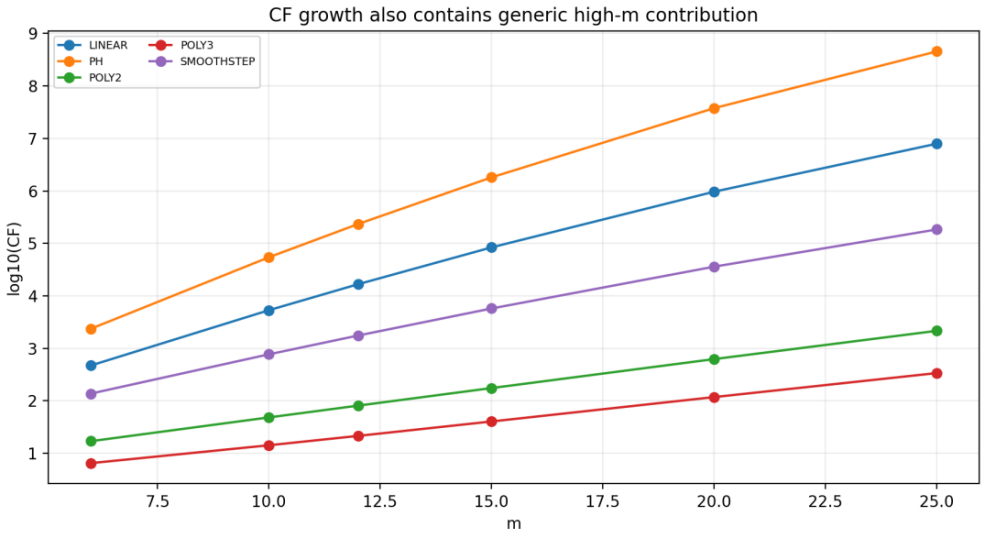

Рисунок 8. Зависимость $\log_{10}(CF)$ от m для PHB и контрольных геометрий.

Интерпретация. CF также быстро растёт с увеличением m, что одновременно подтверждает диагностическую чувствительность показателя и необходимость учитывать неопределённость, связанную с распространением поля вдоль стенки при высоком m.

8. Целевой результат C2 и сеточная проверка

Наиболее устойчивое воспроизводимое целевое семейство сосредоточено около a = 0,3, b = 0,6, R = 3,0 и m = 15. Для скалярного аналога естественного граничного условия PHB даёт η_100R = 93,026 % на сетке 70 × 48; 92,501 % на 100 × 70; 92,444 % на 130 × 92 и 92,380 % на 160 × 112. Изменение при переходе от 100 × 70 к 160 × 112 невелико по абсолютной величине. Поэтому C2 — наиболее устойчивый количественный результат статьи.

Существенны также показатели более узких слоёв. На сетке 130 × 92 получены η_025R = 25,346 %, η_050R = 50,740 % и η_100R = 92,444 %. Следовательно, мода не представляет собой дельта-подобное кольцо: её энергия распределена по слою конечной радиальной толщины. Для применений это важно, поскольку полезный кольцевой резонатор не обязательно требует сосредоточения всей энергии в чрезвычайно тонкой оболочке. Вместе с тем конечная ширина означает, что C2 является операционным порогом локализации, а не точным законом фокусировки.

Сеточную устойчивость следует характеризовать аккуратно. Незначительное изменение η_100R подтверждает вывод C2, но не служит строгим математическим доказательством асимптотической сходимости. Кажущиеся показатели Ричардсона, вычисленные по трём сеткам, имеют лишь описательное значение. Они полезны для оценки неопределённости, но не подтверждают сходимость высокого порядка. Эта оговорка особенно важна для других показателей — прежде всего CF и утечки через рупоры, — которые значительно чувствительнее к сетке.

Таблица 6. Сеточная последовательность для целевого PHB.

Сетка	kR	η_025R	η_050R	η_100R	$\log_{10}(CF)$	Утечка через рупоры
70 × 48	15.7678	23.89 %	46.51 %	93.03 %	6.258	5.52e−05 %
100 × 70	15.8017	25.05 %	50.65 %	92.50 %	6.678	2.10e−05 %
130 × 92	15.8140	25.35 %	50.74 %	92.44 %	6.487	3.25e−05 %

160 × 112	15.8153	25.82 %	51.19 %	92.38 %	6.645	2.26e−05 %

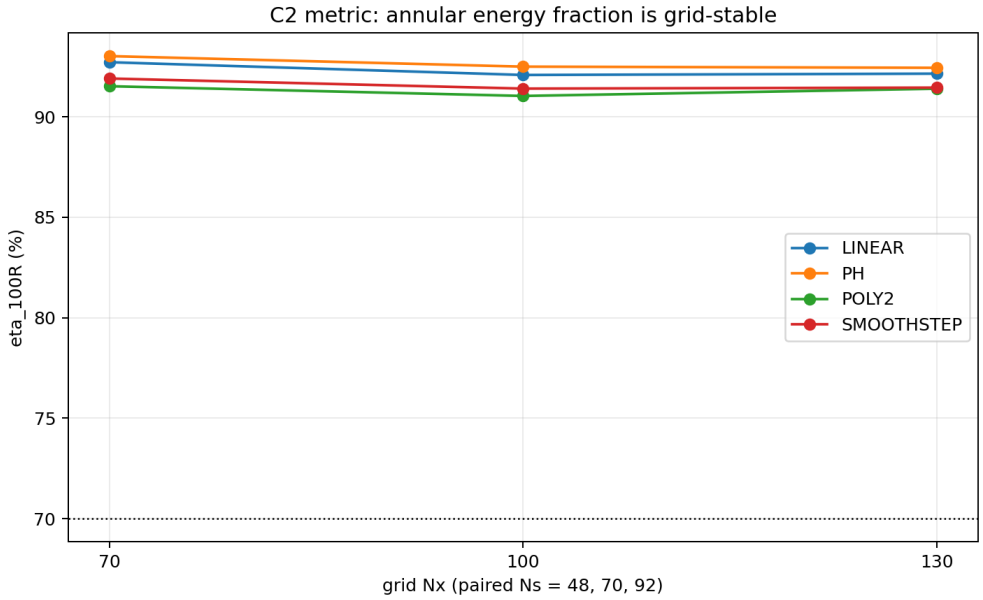

Рисунок 9. Сеточная устойчивость η_100R для целевого семейства.

Интерпретация. На всех исследованных сетках основной показатель C2 остаётся вблизи 92–93 %. Это наиболее надёжный количественный результат скалярной верификации.

Примечание о согласованности повторных расчётов. Исправленные скрипты верификации воспроизводят значения C2 на уровне статьи по опорным CSV-таблицам: η_100R = 93,026 %; 92,501 %; 92,444 % и 92,380 % на сетках PHB 70 × 48, 100 × 70, 130 × 92 и 160 × 112 соответственно. Повторный расчёт не требует изменения основного вывода C2; напротив, подтверждает, что именно C2 представляет устойчивую часть скалярной верификации.

9. Спектральная локализация C3: дискретные максимумы, а не сплошное окно

Сканирование C3 предназначено для ответа на иной вопрос, чем проверка C2. C2 определяет, может ли одна мода сосредоточить большую часть энергии в диагностическом кольце. C3 устанавливает, сохраняется ли такое поведение за пределами одной изолированной собственной моды. В целевом сканировании при m = 15 в диапазоне kR = 10…25 после удаления дубликатов найдены две различные моды PHB выше порога 70 %: kR = 15,7678 и kR = 17,6892. Ряд последующих мод порога не достигает.

Поэтому статья не утверждает существования непрерывного спектрального окна. Для такого вывода необходимы либо промежуточные моды выше порога, либо расчёт вынужденного отклика, показывающий устойчивую локализацию на конечном интервале частот. Нынешние данные слабее, но всё же содержательны: кольцево-локализованное состояние не является единичным численным совпадением и обнаруживается по меньшей мере в двух дискретных модальных максимумах исследованного диапазона.

Введённая ранее величина, называвшаяся аналогом Q, может сохраняться только как характеристика ширины кластера, если вообще используется. Она не является физической добротностью резонатора. Для определения физической добротности потребовались бы потери, ширина линии, комплексные собственные частоты или полоса вынужденного отклика. В окончательной интерпретации C3 означает дискретную спектральную повторяемость, но не добротность или спектральную селективность лазера.

Таблица 7. Полный список уникальных целевых мод PHB в сканировании C3.

kR	η_100R	η_050R	Обогащение η_100R	Статус
15.7678	93.03 %	46.51 %	5.33×	Выше порога C2
17.6892	81.45 %	40.98 %	4.66×	Выше порога C2
20.1143	52.49 %	26.84 %	3.00×	Ниже порога C2
20.3628	32.41 %	5.79 %	1.86×	Ниже порога C2
21.7768	35.17 %	11.27 %	2.01×	Ниже порога C2
22.1449	53.19 %	29.47 %	3.05×	Ниже порога C2
22.2592	33.02 %	13.75 %	1.89×	Ниже порога C2
22.5921	56.94 %	31.53 %	3.26×	Ниже порога C2
23.8147	29.31 %	11.82 %	1.68×	Ниже порога C2
23.9544	28.31 %	15.03 %	1.62×	Ниже порога C2
24.3037	38.83 %	28.40 %	2.22×	Ниже порога C2
24.6211	17.49 %	9.47 %	1.00×	Ниже порога C2
24.8792	42.16 %	25.16 %	2.41×	Ниже порога C2
25.6025	27.70 %	9.00 %	1.59×	Ниже порога C2
25.6747	21.12 %	9.25 %	1.21×	Ниже порога C2

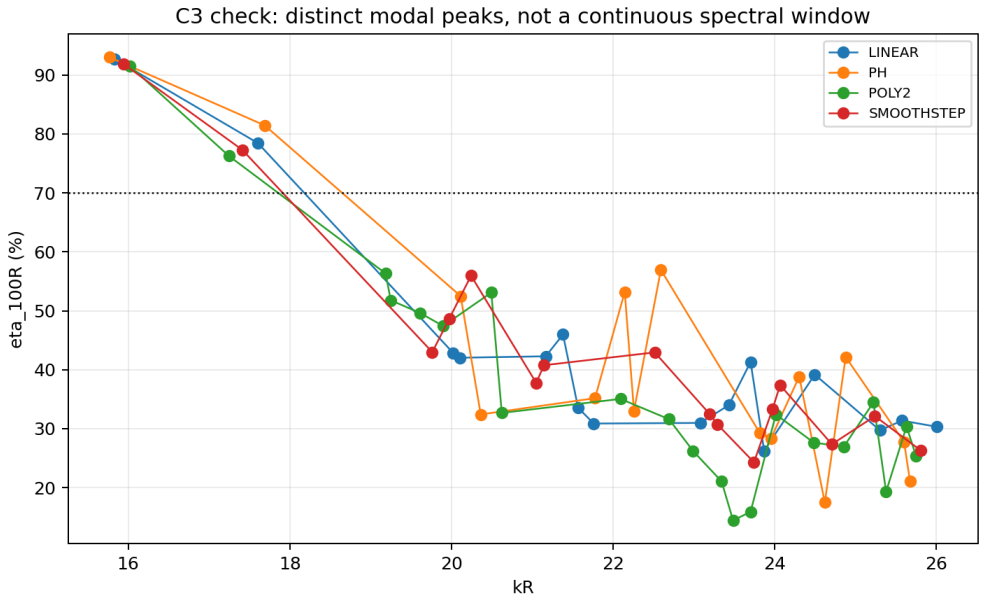

Рисунок 10. Спектр мод C3 после удаления дубликатов.

Интерпретация. График разделяет исходные результаты сканирования по сдвигам и различные собственные моды. В полном очищенном списке PHB присутствуют две моды выше порога и последовательность мод ниже порога. Поэтому результат C3 описывает дискретную повторяемость, а не непрерывную спектральную полосу.

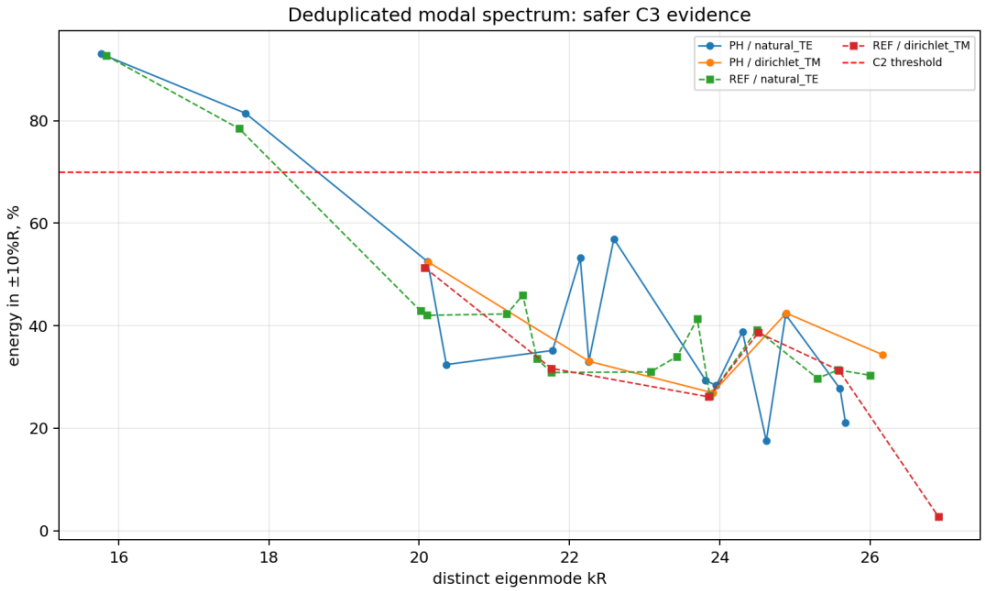

Рисунок 11. Подробное целевое сканирование C3 после исключения дублирующихся мод.

Интерпретация. Этот рисунок наглядно показывает, почему термин «спектральное окно» неприменим: моды выше порога дискретны и разделены модами со слабой локализацией. Добавленная полная таблица делает отрицательный спектральный результат явным.

10. Параметрическое семейство и устойчивость C2

Одного сильного геометрического случая недостаточно для обоснования нового класса резонаторов. Проверка параметрического семейства показывает, сохраняется ли результат в окрестности выбранной точки пространства параметров. Наиболее выраженное проверенное семейство характеризуется a = 0,3, R = 3,0 и значениями b приблизительно от 0,3 до 0,9. Несколько его представителей обеспечивают η_100R выше 92 % на проверочной сетке. Это существенно меняет интерпретацию: речь идёт уже не об одиночном численном событии, а о локальной области проектных параметров.

Результат для параметрического семейства показывает также практическую роль PHB. Параметры a, b и R не следует считать произвольными размерами чертежа. Они определяют раскрытие центрального замыкания, гиперболический закон рупоров, фокусное расстояние c и эффективную компактность полости. Проверенное семейство указывает, что кольцевая локализация C2 сильнее, когда геометрия сочетает достаточно широкую центральную кольцевую область с рупорами, которые не доминируют по объёму.

Этот раздел не утверждает глобальной оптимальности приведённого семейства. Он представляет воспроизводимый срез пространства конструкций. Его задача — показать достаточную устойчивость явления C2 для систематического изучения и наличие осмысленной стартовой области для последующей оптимизации.

Таблица 8. Представители проверенного параметрического семейства с η_100R выше 92 %.

a	b	R	kR	η_100R	η_050R
0.3	0.60	3.0	15.7678	93.03 %	46.51 %
0.3	0.75	3.0	15.7747	92.88 %	49.22 %
0.3	0.45	3.0	15.8440	92.67 %	48.19 %

0.3	0.30	3.0	15.8920	92.53 %	49.10 %
0.3	0.90	3.0	15.7134	92.32 %	47.78 %

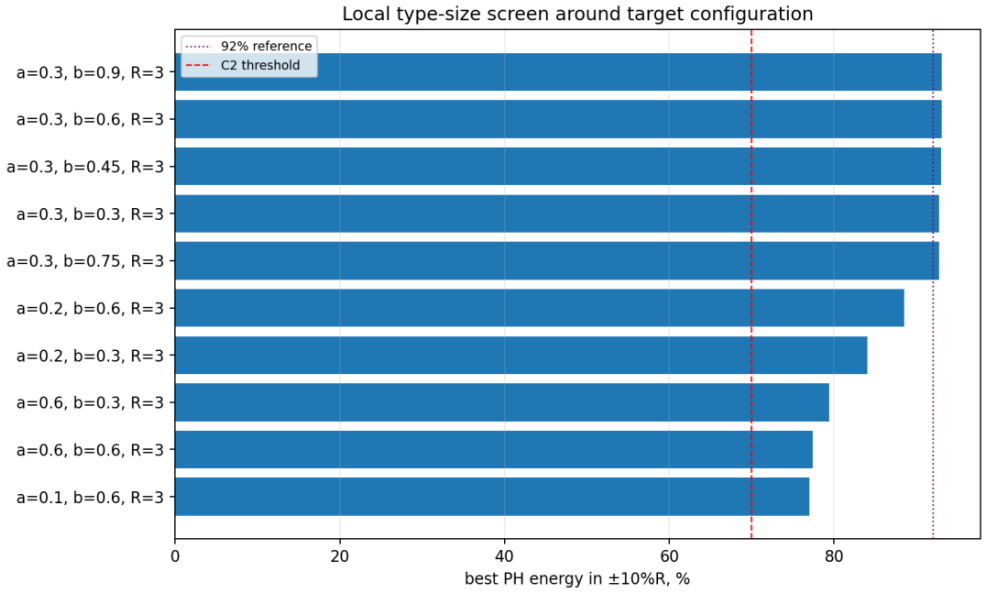

Рисунок 12. Параметрическое семейство с η_100R выше 92 %.

Интерпретация. Единственная удачная конфигурация была бы слабым доказательством. Небольшое семейство соседних значений b с η_100R выше 92 % показывает, что C2 не является изолированным численным совпадением.

11. Контрольные сравнения: что является уникальным, а что нет

Раздел с контрольными геометриями принципиально важен: он не позволяет представить общую физику высокоазимутальных мод как уникальное свойство гиперболического закона. Основные контрольные профили — LINEAR, POLY2, SMOOTHSTEP; в расширенном скрипте также используются формы, согласованные по наклону или объёму, цилиндрические и эллипсоидоподобные варианты. Основные контрольные формы имеют одинаковые R, a, получаемое из b значение L, центральное замыкание и диагностические плоскости. При этом они не полностью совпадают по объёму, локальному наклону или ρ_at_c. Это существенное разграничение: контрольные геометрии согласованы по характерным размерам, но не обязательно по объёму и наклону стенки.

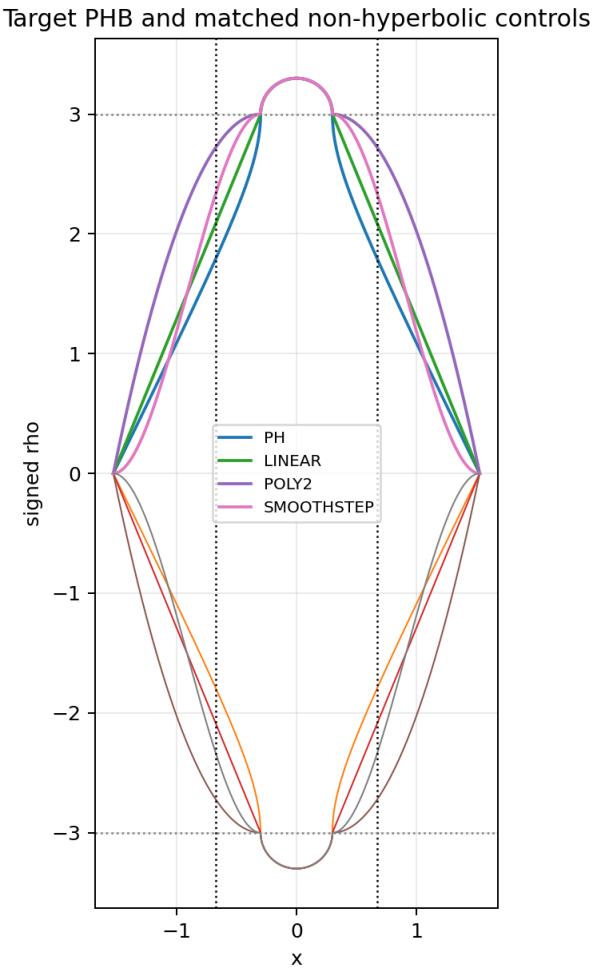

Рисунок 13. Целевой PHB и контрольные геометрии, использованные в окончательном сопоставлении.

Интерпретация. Контрольные формы имеют одинаковое центральное замыкание и продольный масштаб, но различаются законом рупорного участка. Сравнение позволяет выявить отсутствие уникальности η_100R для гиперболического профиля.

На сетке 130 × 92 получены η_100R = 92,44 % для PHB, 92,15 % для LINEAR, 91,40 % для POLY2 и 91,46 % для SMOOTHSTEP. Разность PHB–LINEAR меньше полного изменения результата PHB между грубой и мелкой сетками. Поэтому нельзя делать сильное утверждение о преимуществе по η. Корректная формулировка такова: PHB входит в класс полостей с выраженной кольцевой локализацией при большом m и находится среди лучших из проверенных основных контрольных геометрий, но не обладает доказанным уникальным отрывом по η.

Этот отрицательный результат контрольного сравнения имеет самостоятельную научную ценность. Он показывает, что основной скалярный кольцевой эффект в значительной степени определяется цилиндрическим барьером углового момента и наличием соответствующей кольцевой области. Это сближает PHB с физикой мод шепчущей галереи. Новизна геометрии при этом не опровергается: она связана с построением фокальных колец и возможностью сочетать кольцевую локализацию с межфокальной диагностикой. Однако из одной η_100R нельзя выводить доказанную уникальность гиперболического закона.

Таблица 9. Основное сравнение PHB и контрольных форм на сетке 130 × 92.

Геометрия	kR	η_025R	η_050R	η_100R	$\log_{10}$(CF)	Утечка рупоров
PH	15.8140	25.35 %	50.74 %	92.44 %	6.487	3.25e−05 %
LINEAR	15.8870	24.62 %	50.19 %	92.15 %	4.948	1.13e−03 %
POLY2	16.0522	24.73 %	49.81 %	91.40 %	2.263	5.43e−01 %
SMOOTHSTEP	15.9811	24.47 %	49.91 %	91.46 %	3.719	1.91e−02 %

Таблица 10. Диагностика согласованности геометрий. Контроли согласованы по размерам, но не полностью по наклону и объёму.

Геометрия	ρ_at_c	|наклон при c|	Аналог объёма / π	Аналог площади / 2π
PH	1.800	2.236	11.97	12.55
LINEAR	2.095	2.440	13.66	12.71
POLY2	2.727	1.471	18.09	13.73
SMOOTHSTEP	2.346	3.083	14.51	12.94
HERMITE_SLOPE_MATCH	1.412	2.811	10.69	12.47
POLY_VOL_MATCH	1.778	2.469	11.97	12.56

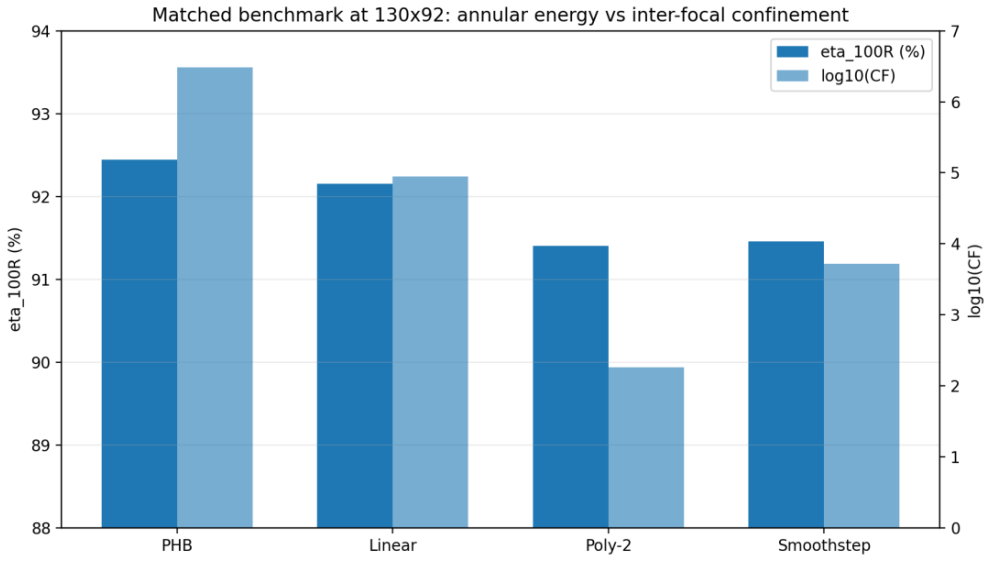

Рисунок 14. Контрольное сравнение при 130 × 92: η_100R и $\log_{10}$(CF).

Интерпретация. График показывает принципиальное разделение: η_100R велика как у PHB, так и у контрольных форм; диагностические показатели типа CF сильнее различают геометрии, но одновременно численно менее устойчивы.

12. Межфокальное осевое удержание, CF, утечка через рупоры и неопределённость

Коэффициент осевого удержания $CF = E(|x| \le c) / E(|x| > c)$ введён для проверки того, ограничивается ли поле не только радиально-кольцевой областью, но и осевым промежутком между опорными плоскостями фокусов. Такая диагностика геометрически мотивирована построением PHB, однако не является непосредственным доказательством динамики лучевого бильярда. На показатель способны влиять также локальный наклон стенки, распределение объёма, форма центрального замыкания и эффекты отображения координат, подогнанного к границе.

Особого внимания требует чрезвычайно малая величина утечки. Для PHB утечка в рупорные области может составлять порядка 10^{-5} % и менее. При таком уровне квадратурное интегрирование, положение линии $|x| = c$ относительно сетки, численный шум собственного вектора и отображение границы могут приводить к большим относительным изменениям CF. Поэтому в статье рассматриваются $\log_{10}(CF)$ и утечка с эмпирической оценкой уровня сеточной изменчивости. Под «уровнем» понимается именно изменчивость из-за сетки, а не строго определённый стохастический шумовой порог.

Расширенные расчёты вносят важную поправку: некоторые дополнительные контрольные формы, более тщательно согласованные по объёму или локальному наклону, могут достигать CF, равного или превосходящего PHB. Это ослабляет утверждение, будто CF выделяет уникальный гиперболический фокальный механизм. Корректнее считать CF полезной вспомогательной характеристикой осевого удержания, причинное происхождение которого ещё предстоит разделить посредством дополнительных согласованных контролей и независимых численных методов.

Исправленная интерпретация порога утечки. В восстановленной таблице видно, что кажущиеся нулевые значения в предыдущем документе были всего лишь артефактами форматирования. Контрольные формы с крупной утечкой, например CYLINDER_R (23,9224 %) и ELLIPSOID_L (1,328991 %), уверенно превышают соответствующие эмпирические уровни изменчивости. Напротив, PH, POLY_VOL_MATCH и HERMITE_SLOPE_MATCH находятся на этом уровне или ниже него. Поэтому научный вывод меняется: вместо «у PHB абсолютно нулевая утечка через рупоры» корректно утверждать, что для лучшей конфигурации PHB утечка меньше разрешающей способности использованной конечно-разностной диагностики.

Таблица 11. Эмпирический уровень сеточной изменчивости утечки через рупоры.

Геометрия	Утечка на мелкой сетке	Эмпирический уровень	Утечка / уровень
CYLINDER_R	23.9224 %	1.00855 %	23.720
ELLIPSOID_L	1.32899 %	0.309401 %	4.295
HERMITE_SLOPE_MATCH	5.125e−08 %	1.065e−07 %	0.481
LINEAR	7.858e−04 %	5.235e−04 %	1.501
PH	2.265e−05 %	3.422e−05 %	0.662
POLY2	0.407577 %	0.137978 %	2.954
POLY_VOL_MATCH	1.062e−05 %	1.663e−05 %	0.639
SMOOTHSTEP	0.012660 %	0.008699 %	1.455

Таблица 12. Дополнительные контрольные формы, показывающие отсутствие уникальности CF для гиперболы.

Геометрия	kR	η_100R	$\log_{10}$(CF)	Утечка через рупоры
PH	15.8017	92.50 %	6.678	2.10e−05 %
HERMITE_SLOPE_MATCH	15.7599	92.43 %	9.290	5.13e−08 %
POLY_VOL_MATCH	15.7951	92.55 %	6.974	1.06e−05 %
CYLINDER_R	17.1772	54.71 %	0.502	2.39e+01 %
ELLIPSOID_L	16.0867	90.63 %	1.871	1.33e+00 %

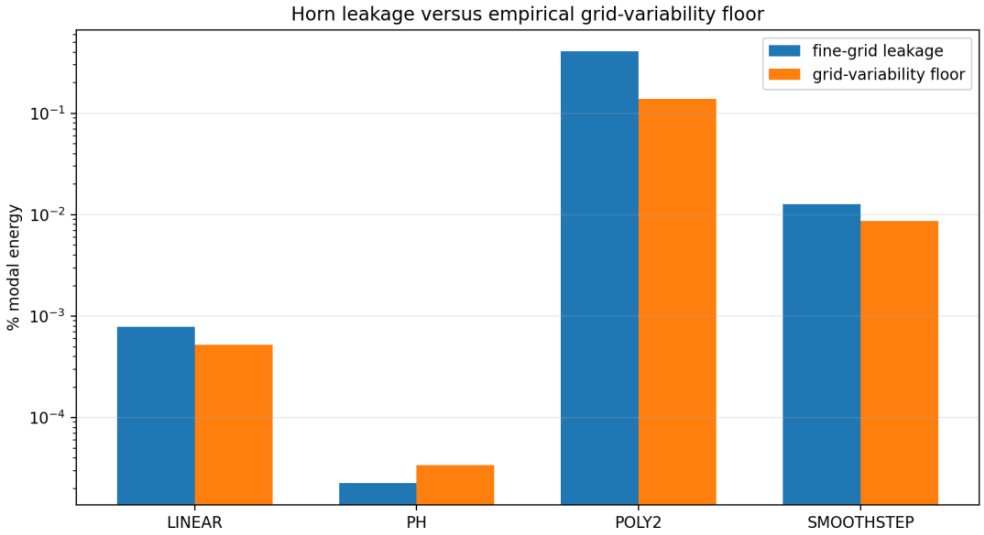

Рисунок 15. Утечка через рупоры в сопоставлении с эмпирическим уровнем сеточной изменчивости.

Интерпретация. Исправленную таблицу следует читать в экспоненциальной записи. Утечка PHB на мелкой сетке составляет 2,265e−05 %, а эмпирический уровень изменчивости — 3,422e−05 %; отношение равно 0,662. Следовательно, минимальная утечка PHB лежит на уровне численной изменчивости или ниже и не позволяет считать CF окончательным доказательством гиперболической уникальности.

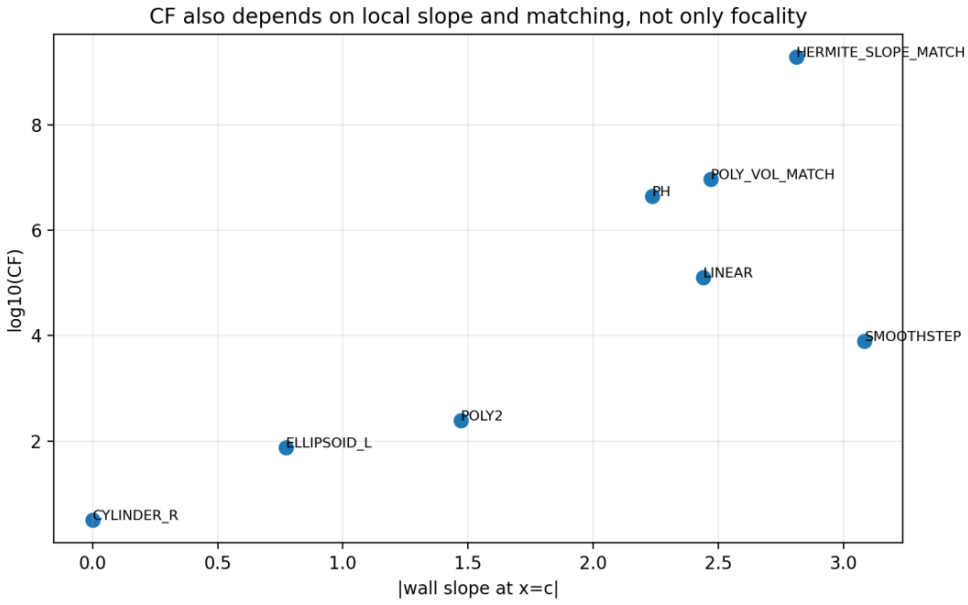

Рисунок 16. Связь $\log_{10}(CF)$ с локальным наклоном стенки.

Интерпретация. Рисунок предупреждает, что CF может частично отражать локальную геометрию вблизи фокальной плоскости, а не только гиперболические лучевые траектории. Его включение обеспечивает проверяемость интерпретации.

13. Испытания на устойчивость и оптимизированные PHB-подобные резонаторы

Программа испытаний на устойчивость восстанавливает ещё одну важную часть научной картины. Не следует считать точную форму PHB единственной неизменной окончательной конструкцией. Она представляет собой аналитически прозрачную исходную геометрию, основанную на гиперболическом фокальном принципе. Возмущения с сохранением концевых точек показывают, что небольшие деформации внутрь полости могут повышать CF в редуцированной скалярной модели. Это не означает ошибочности исходного PHB. Напротив, гиперболическое построение может задавать принцип проектирования, а не единственный окончательный оптимум.

Столь же важна проверка зависимости от центрального замыкающего участка. Его замена в ряде случаев ослабляет результат. Следовательно, наблюдаемая мода определяется свойствами всей составной полости, а не только законом рупоров. Резонатор следует проектировать как единое целое: учитываются центральное замыкание, кривизна рупоров, положение фокальных ориентиров, азимутальный порядок и граничное условие.

Масштабная инвариантность ведёт себя ожидаемым образом для недиспергирующей скалярной модели: безразмерные величины сохраняются при однородном масштабировании. Это полезная проверка внутренней согласованности программного кода, однако сама по себе она не подтверждает нового физического эффекта. Следовательно, испытания на устойчивость обосновывают дальнейший инженерный поиск, но не окончательную верификацию устройства.

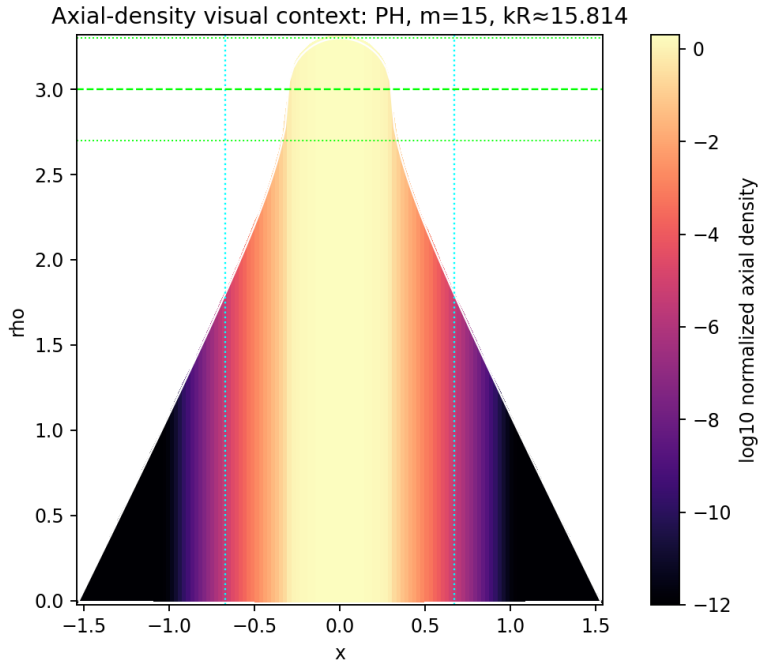

Рисунок 17. Поле осевой плотности PHB для целевой моды m = 15 на сетке 130 × 92.

Интерпретация. Визуально поле сосредоточено внутри межфокальной области. Это качественное подтверждение сочетания кольцевого и осевого удержания, но не замена количественного исследования сходимости.

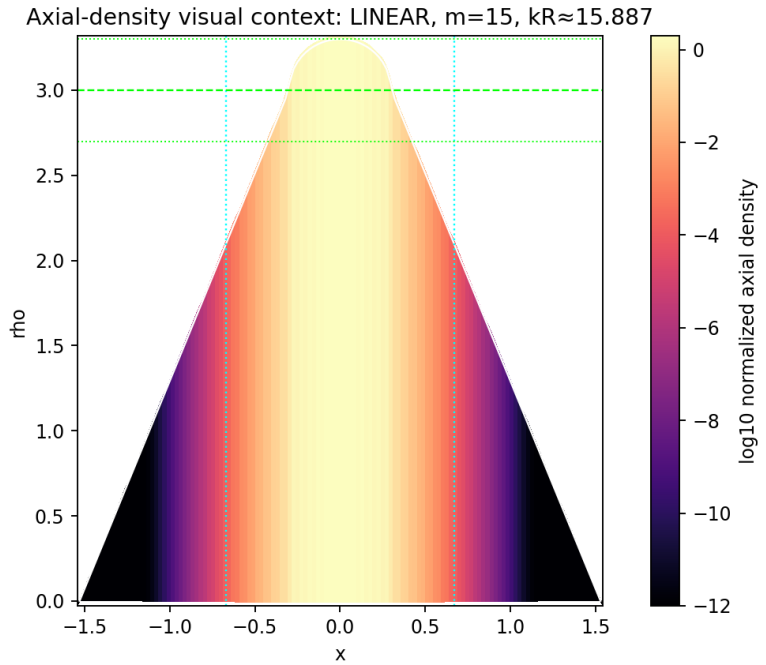

Рисунок 18. Поле согласованного контрольного резонатора с линейными рупорами на сетке 130 × 92.

Интерпретация. Контрольная форма также поддерживает кольцевую локализацию, что исключает утверждение об уникальности PHB на основании одной η_100R.

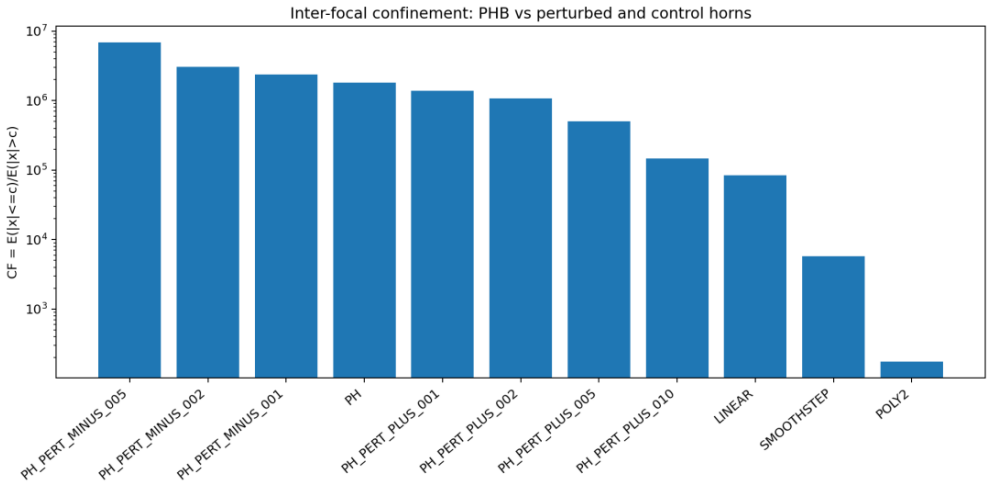

Рисунок 19. Возмущение с сохранением концевых точек и контрольное испытание.

Интерпретация. Небольшие деформации гиперболического рупора могут изменять CF. Поэтому точный PHB выступает исходной геометрией оптимизируемого семейства, а не обязательно окончательным оптимумом.

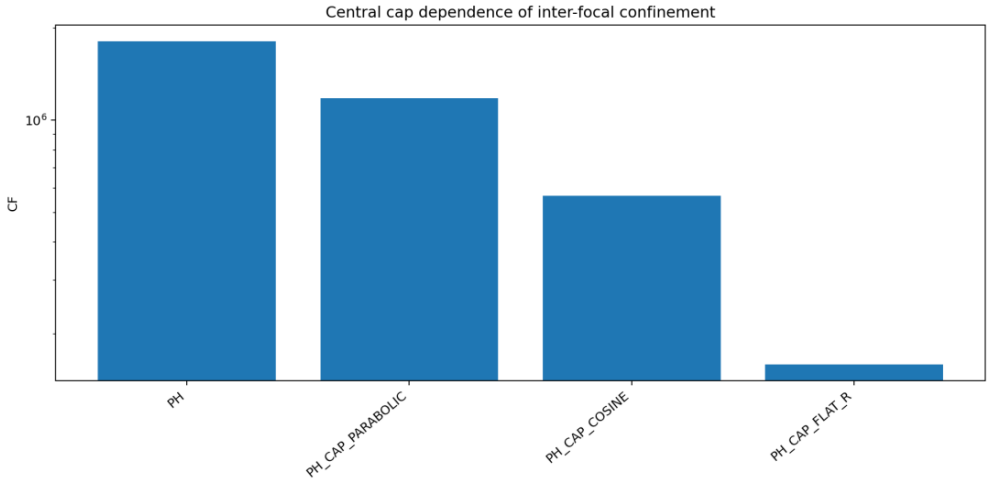

Рисунок 20. Зависимость от центрального замыкающего участка.

Интерпретация. Центральное замыкание не является пассивным элементом. Сочетание центральной крышки и рупоров представляет собой часть геометрии резонатора и должно учитываться при интерпретации.

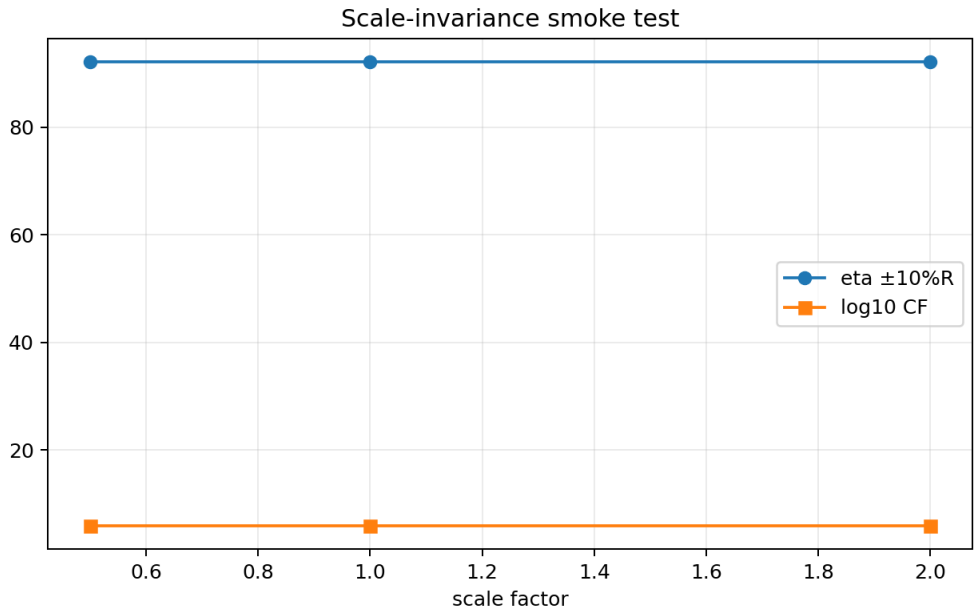

Рисунок 21. Контрольная проверка масштабной инвариантности.

Интерпретация. В недиспергирующей скалярной модели безразмерные критерии инвариантны относительно однородного изменения масштаба. Это подтверждает согласованность единиц, но само по себе не доказывает новую физику.

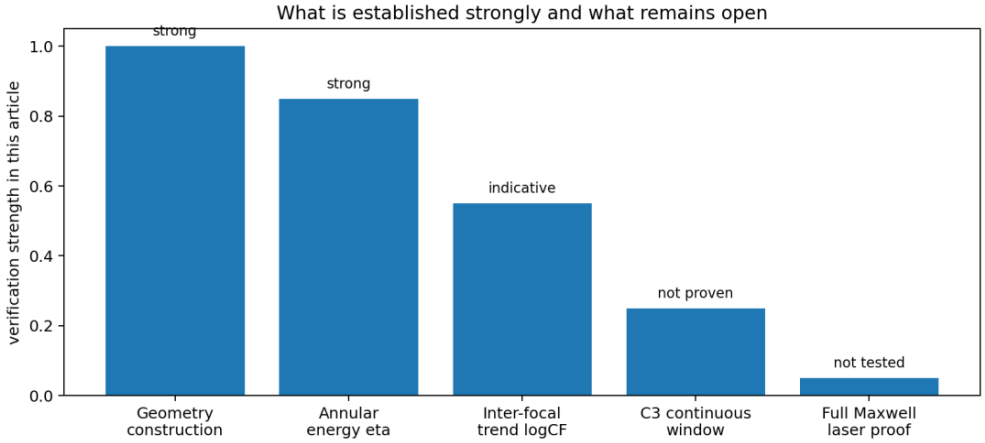

Рисунок 22. Карта научного статуса утверждений об уникальности.

Интерпретация. Заключение необходимо разделять: геометрическое построение является новым, C2 выражен, η_100R не уникальна, C3 дискретен, а CF остаётся перспективной, но ограниченной вторичной характеристикой.

14. Физическая интерпретация и возможные технические применения

Физический смысл расчётов целесообразно излагать на нескольких уровнях. Первый уровень — общая высокоазимутальная кольцевая локализация. Она действительно существует и достаточно устойчива, но не уникальна. Этот уровень связывает PHB с более широким семейством полостей типа шепчущей галереи и резонаторов с большим угловым моментом. Второй уровень — геометрия фокальных колец. Именно здесь находится новая конструктивная идея: фокусы гиперболической образующей преобразуются во внешние кольца и определяют естественную диагностическую кольцевую область. Третий уровень — межфокальное удержание. Он перспективен, но

пока не доказан окончательно, поскольку CF зависит от сетки и может изменяться при согласовании наклона и объёма.

Поэтому технические применения следует описывать как гипотезы для дальнейшей проверки, а не как уже созданные устройства. Наиболее вероятная область применения — не прямая замена обычного гауссова лазера, а создание полей с геометрически заданной кольцевой или межфокальной организацией в гладкостенных полостях: кольцевые СВЧ- и миллиметроволновые резонаторы, акустические или ультразвуковые концентраторы, модовые фильтры, геометрические датчики, а также высокомощные полости с гладкими стенками, где применение микроструктур затруднено. Во всех этих случаях скалярный результат является проектным ориентиром, но не окончательным инженерным подтверждением.

Направление оптимизации PHB может стать наиболее практически продуктивным итогом. Точный гиперболический закон задаёт физически интерпретируемую исходную форму. Затем небольшими управляемыми деформациями можно регулировать удержание поля, уменьшать утечки и учитывать технологические ограничения. Для инженерии такой подход полезнее категорического утверждения, будто пригодна только точная гипербола. Оптимизируемое семейство ценнее одной неизменной аналитической поверхности.

Таблица 13. Технический смысл результатов C1–C3 без преувеличения характеристик устройств.

Возможное направление	Что подтверждает нынешняя скалярная модель	Что ещё не проверено
Кольцевые СВЧ / мм-волновые полости	Сильная кольцевая локализация скалярных мод высокого m	Потери проводника и открытые границы в модели Максвелла
Акустические / ультразвуковые концентраторы	Геометрически заданная кольцевая локализация без микроструктур	Акустическая модель материалов и затухание
Модовые фильтры и спектральные селекторы	Дискретные модальные максимумы выше порога	Полоса вынужденного отклика и связь с внешними полями
Геометрические датчики	Возможная чувствительность межфокального удержания	Калибровка связи возмущения и частоты
Оптимизированные PHB-подобные резонаторы	Возмущения способны улучшать показатели скалярного удержания	Независимая оптимизация и верификация по Максвеллу

15. Ограничения, фальсифицируемость и дальнейшие этапы проверки

Главное ограничение состоит в скалярности расчёта. Полноценный электромагнитный резонатор требует векторных полей Максвелла, материальных граничных условий, проводниковых или диэлектрических потерь, учёта поляризации, утечки излучения и, возможно, усиления. Ничего из перечисленного настоящая работа не решает. Следовательно, её результат — скалярная верификация C1–C3, а не полная аттестация резонатора.

Второе ограничение связано с умеренным разрешением сеток. Расширение до 160 × 112 укрепляет вывод по η_100R, но не обеспечивает достаточного разрешения утечки через

рупоры для окончательного утверждения о CF. Более убедительная проверка потребует более мелких сеток, адаптивного сгущения вблизи |x| = c и концов рупоров, квадратур более высокого порядка и независимого решателя. Для тестирования численного метода следует использовать цилиндр или сферу с аналитически известными модами бесселевого типа как эталонную или специально сконструированную верификационную задачу.

Третье ограничение — причинное объяснение фокального механизма. CF мотивирован построением фокальных колец, но в скалярной модели его влияние не отделено от наклона стенки, центрального замыкания, объёма и отображения координат. Необходимы контрольные формы с согласованием наклона, объёма и кривизны. Если термин «фокальный бильярд» предполагается использовать как обозначение установленного физического механизма, а не геометрической интерпретации, требуется также сопоставление лучевых и волновых результатов.

Перечисленные ограничения не обесценивают статью. Они определяют дальнейшие этапы верификации. Корректный публикационный статус — подробный препринт Zenodo, фиксирующий новую воспроизводимую геометрию и устойчивый результат скалярной кольцевой локализации высокого m, но оставляющий открытыми вопросы полной уникальности и физических характеристик резонатора.

• Добавить сетки 200 × 140 и 260 × 180 с адаптивным сгущением вблизи |x| = c.

• Выполнить независимый расчёт методом конечных элементов либо спектральным методом и сопоставить η_100R и CF.

• Построить контрольные геометрии с согласованными наклоном, объёмом и кривизной.

• Провести скалярное частотное сканирование вынужденного отклика, а не ограничиваться собственными модами.

• Переходить к векторной модели Максвелла и открытым границам только после завершения скалярных контрольных проверок.

16. Заключение

Восстановленная полная научная статья позволяет сформулировать точный вывод. Вертикальный псевдогиперболоид второго порядка представляет собой новую аналитически заданную полость с фокальными кольцами в рамках программы геометрической волновой инженерии. В редуцированной осесимметричной скалярной модели Гельмгольца он поддерживает выраженную кольцевую локализацию собственных мод высокого азимутального порядка m. Это главный подтверждённый положительный результат.

Те же расчёты не допускают преувеличения выводов. Высокое значение η_100R не является исключительным свойством гиперболического закона: сопоставимые негиперболические контрольные формы обеспечивают очень близкие доли энергии в кольцевой области. C3 подтверждается в целевом сканировании лишь двумя различными модальными максимумами PHB выше порога, kR = 15,7678 и kR = 17,6892, но не непрерывным спектральным окном. Полная таблица уникальных мод PHB содержит другие моды ниже порога между этими максимумами и после них; следовательно, спектральный вывод должен оставаться дискретным, а не полосовым. CF и утечка через рупорные участки интересны как вторичные показатели, однако исправленная таблица численного уровня утечки показывает, что наилучшая утечка PHB, 2,265e−05 %, ниже эмпирического уровня 3,422e−05 %. Таким образом, соответствующая часть результатов ограничена разрешением сетки.

Научную новизну необходимо формулировать по уровням. Сама геометрия является новой и воспроизводимой. Скалярный результат C2 выражен и численно устойчив.

Контрольные сравнения дают объективный вывод: η_100R в существенной мере определяется общей физикой осесимметричных мод высокого m, а не уникальным гиперболическим механизмом. Показатели CF и утечки перспективны, однако пока не могут служить окончательным доказательством волнового механизма гиперболических фокальных колец: несколько случаев малой утечки находятся на эмпирическом уровне численной изменчивости или ниже. Испытания на устойчивость открывают инженерное направление — проектирование оптимизированных PHB-подобных резонаторов на основе той же геометрической идеи. Их превосходство должно подтверждаться более тонкими сетками, независимыми решателями и более строго согласованными контролями.

Такой вывод научно сильнее простого заявления об успехе. Он определяет новый аналитически воспроизводимый объект, подтверждает устойчивое скалярное свойство C2, уточняет C3 до полного перечня дискретных мод, устраняет вводящее в заблуждение отображение малых утечек как нулевых и точно обозначает нерешённые вопросы, предшествующие любой интерпретации с позиции Максвелла, открытого резонатора или эффективности лазерного устройства.

Приложение. Пакет воспроизводимости и основной скрипт

Пакет Zenodo включает исправленный основной скрипт PHB_C1C3_FINAL_ZENODO_MASTER_SCRIPT.py, полный скрипт строгого дополнительного расчёта PHB_C1C3_final_strict_extension_calc.py, ранее отсутствовавший скрипт постобработки finish_final_strict_extension.py и средство проверки согласованности чисел verify_article_numbers.py. В пакет входят CSV-таблицы и PNG-рисунки, использованные в статье. Быстрый проверочный модуль сопоставляет численные утверждения статьи по C2, C3, контрольным формам, параметрическому семейству и уровню изменчивости утечки с приложенными файлами CSV. Режим полного повторного вычисления намеренно отделён, поскольку решение редуцированной скалярной спектральной задачи Гельмгольца может быть длительным на обычных процессорах.

Литература

1. Kogelnik, H.; Li, T. Laser beams and resonators. Applied Optics, 1966.

2. Siegman, A. E. Lasers. University Science Books, 1986.

3. Keller, J. B. Geometrical Theory of Diffraction. Journal of the Optical Society of America, 1962.

4. Vahala, K. J. Optical microcavities. Nature, 2003.

5. Matsko, A. B.; Ilchenko, V. S. Optical resonators with whispering-gallery modes. IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics, 2006.

6. Allen, L.; Beijersbergen, M. W.; Spreeuw, R. J. C.; Woerdman, J. P. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. Physical Review A, 1992.

7. Jin, J. The Finite Element Method in Electromagnetics. Wiley.

8. Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.; Zhu, J. Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Butterworth-Heinemann.

9. Bohren, C. F.; Huffman, D. R. Absorption and Scattering of Light by Small Particles. Wiley.

10. Berry, M. V.; Mount, K. E. Semiclassical approximations in wave mechanics. Reports on Progress in Physics, 1972.