Геометрическая волновая инженерия

Фокально-транспортный лучевой закон в псевдогиперболоидах

Точное фокальное сжатие, перенос по порядку событий, развёртывание косых лучей и вычислительные испытания при конечной длине волны

Хаустов Владимир Игоревич

ORCID: 0009-0007-3657-2309

Лаборатория геометрической волновой инженерии https://vihrihaosa.ru/

Лицензия: CC BY 4.0

Дата публикации: 21 августа 2026 г.

DOI: 10.5281/zenodo.21969312

Научно-технический перевод с английского языка.

Редакция, адаптированная для русскоязычного инженера-исследователя.

Оригинал: Khaustov. V. Focal–Transport Ray Law in Pseudohyperboloidal Cavities with Variable Negative Gaussian Curvature: Exact Focal Contraction, Event-Order Transport, Skew-Ray Unfolding, and Finite-Wavelength Computational Tests.
https://doi.org/10.5281/zenodo.21969312

Аннотация

Формулируется фокально-транспортный лучевой закон для семейства открытых полостей, получаемых вращением гиперболы, смещённой в радиальном направлении. В настоящей работе такие полости называются псевдогиперболоидными: речь идёт о конструктивном семействе поверхностей вращения, а не о стандартном квадрическом гиперболоиде.

В инвариантной меридиональной плоскости ($J_x=0$) любой регулярный луч из унаследованного фокально-сопряжённого семейства удовлетворяет точному рекуррентному соотношению $t_{n+1}=\kappa t_n$, где $t=\tanh(u/2)$, а $\kappa=(\sqrt{(1+\beta^2)}-1)/(\sqrt{(1+\beta^2)}+1)$. Сжатие имеет геометрическую природу: весь участок перелёта между рупорами равномерно приближается к внутреннему отрезку фокальной прямой между двумя переходными кольцами с коэффициентом κ, зависящим только от отношения формы $\beta=b/a$ и не зависящим от радиального смещения R. Избыток осевой координаты конечной точки асимптотически уменьшается с коэффициентом κ^2, то есть быстрее радиального отклонения. Предельная траектория приближается к переходным кольцам ($|x|=a$, $\rho=R$), а не к оси вращения и не к внешним фокусам. Фокальное свойство исходной коники организует направления отражённых лучей, при этом осевой момент импульса J_x сохраняется. Поэтому меридиональный сектор является инвариантной областью применимости точного рекуррентного соотношения, а лучи с конечным J_x образуют трёхмерное отклонение от этого точного каркаса.

За пределами этого точного каркаса эффекты конечного размера формируют отдельные уровни:

- Перенос по порядку событий. Адаптивное разрешение выявляет несколько границ PASS/RETURN и отдельные, зависящие от выбранного сечения случаи фокально-транспортной инверсии.
- Конечная косость. Целенаправленная трёхмерная проверка выявляет чётную, почти квадратичную зависимость первого виртуального промаха относительно фокуса ($\propto j^2$) и подтверждает, что малый осевой момент импульса возмущает идеальный каркас, а не разрушает его.
- Испытания при конечной длине волны. Осесимметричные расчёты Maxwell/FDTD показывают, что фокально-согласованное возбуждение вызывает воспроизводимое раннее перераспределение поля вблизи внутреннего геометрического множества при $a/\lambda\approx2$. После отключения источника ($t=5$) действительно наблюдается воспроизводимое переходное перераспределение: при одинаковой амплитуде тока источника фокально-согласованное возбуждение создаёт более сильный и узкий отклик, чем согласованные контрольные варианты. Эти результаты конечноволновых расчётов представляют собой численные прогнозы и требуют экспериментальной проверки.

Работа устанавливает глобальное рекуррентное соотношение в замкнутой аналитической форме для заданного класса полостей и предлагает проверяемую иерархию, разделяющую точную фокальную геометрию, вычислительную топологию переноса и наблюдения на дифракционном масштабе.

Ключевые слова: псевдогиперболоидная полость; фокально-транспортный лучевой закон; фокальное сжатие; геометрическая оптика; смещённая гипербола; переменная отрицательная гауссова кривизна; перенос по порядку событий; фокально-транспортная инверсия; косые лучи; Maxwell/FDTD; геометрическая волновая инженерия; внутренняя фокальная прямая; переходная фокально-селективная концентрация.

Содержание

Аннотация....2
Обозначения и операционные величины....5
1. Научные рамки, терминология и иерархия утверждений....6
1.1. Операционные определения....7
1.2. Три организующих уровня и соответствующие математические вопросы....8
2. Геометрия идеального РНВ....8
2.1. Гауссова кривизна....10
2.2. Безразмерная геометрия и различные роли β и R/a....10
3. Точная локальная механика лучей и инвариант вращения....11
4. Точный закон меридионального фокального сжатия....12
4.1. Полный вывод отображения сжатия....13
4.2. Точное сжатие в физических координатах....14
4.3. Сжатие фокально-согласованного семейства лучей....15
4.4. Зависимость интенсивности сжатия от отношения формы....16
4.5. Почему сжатие не является диссипацией в фазовом пространстве....16
4.6. Интерпретация вращения: от меридиональных фокальных прямых к кольцевой организации....16
4.8. Трёхмерное обобщение на косые лучи: гипотезы и целевые вычислительные проверки18
5. Точное стационарное построение первого отражения и определение основной границы транспортного класса....23
5.1. Утверждение о существовании для центрального источника....24
5.2. Точный эталон при β=1....24
5.3. От стационарного луча к границе порядка событий....24
6. Карта переноса по порядку событий на заданном стартовом сечении....24
6.1. Канонический порядок при единственной границе: T<F....25
6.2. Фокально-транспортная инверсия....26
6.3. Критические направления и локальный спектр транспорта....26
6.4. Фиксированное число фокальных организаторов и переменное число транспортных границ....27
6.5. Угловой порядок T и F на каноническом сечении....27
6.6. Совпадение координат и действительная фокально-транспортная инверсия....28
7. Вычислительные следствия для конечной области и атлас режимов....28
7.1. Аудит разрешения и неразрешённые сечения....29
7.2. Выборочная проверка через первое отражение....31
7.3. Конечные полосы RETURN....31
7.4. Что устанавливает многоветвистый атлас и чего он не устанавливает....32
7.5. Следствие аудита неразрешённых сечений....36
8. Отклонение от точного меридионального сектора при конечном J_x....36
9. Уровень времени пребывания: RETURN не означает длительного удержания....38
9.1. Детерминированные доли сетки, а не вероятности....38
9.2. В проверенной выборке расходимость времени пребывания у T не выявлена....39
9.3. Выход траекторий в выборочном ансамбле и невыходящие множества....39
9.4. Почему транспортная граница не обязана быть сингулярностью времени пребывания .39
10. Закон подобия....40
11. Протокол численной верификации и проверки на опровержение....40
11.1. Явные критерии опровержения....41
11.2. Модель Maxwell/FDTD, определения наблюдаемых и испытание фокально-селективного перераспределения....42

11.3. Направленный отклик Maxwell/FDTD при переходе от T к F 46
11.4 Dense T-to-F resolution study, direct skew closure, and reflection persistence 49
12. Каноническая формулировка, эквивалентные формы и использование закона фокального сжатия при проектировании 55
12.1. Точный закон фокального сжатия PHB 55
12.2. Вычислительные следствия 57
13. Связь с классической оптикой, бильярдами и утверждением о специфической новизне PHB 57
13.1. Механистическая интерпретация: два частично независимых геометрических механизма управления 58
13.2. Научный потенциал разграничения 58
13.3. Инженерные правила проектирования, вытекающие из закона 59
13.4. Пассивное кодирование направления в состояние и обнаружение 59
13.5. Многополосные угловые селекторы и геометрические маршрутизаторы 59
13.6. Фокально-селективное формирование переходного поля 60
13.7. Управление пребыванием и длиной взаимодействия 60
13.8. Масштабирование для электромагнитных и акустических реализаций 60
14. Область применимости, ограничения и недоказанные положения 61
15. Программа экспериментальной и конечноволновой верификации 61
15.1. Почему сканирование T–F физически различает механизмы 62
15.2. Различимые исходы последовательной волновой программы 62
15.3. Текущие конечноволновые свидетельства и оставшиеся решающие проверки 63
16. Вычислительные пакеты для верификации 63
17. Выводы 63
Приложение A. Примечания к доказательствам и выводам 64
A.1. Знак кривизны 64
A.2. Сохранение J_x 65
A.3. Доказательство фокального сжатия 65
A.4. Сжатие семейства и показатель фокального сжатия 65
A.5. Общее восстановление бассейнов 65
A.6. Параметрические свойства κ 65
A.7. Канонический угловой порядок и трансверсальность FTI 65
A.8. Ограниченный характер отображения сжатия семейства 65
Приложение B. Сводные численные свидетельства 65
Приложение C. Вычислительные свидетельства, происхождение данных и полное итоговое резюме 66
C.1. Численный аудит слабой косости 66
C.2. Калибровка направленного источника 67
C.3. Направленные волновые случаи T–F 67
C.4. Итоговая сводка устойчивости плотного волнового сканирования по разрешению 68
Литература 68

Обозначения и операционные величины

Наблюдаемые величины конечноволновой модели:

- N_res — пространственное разрешение сетки MEEP;
- G_target — нормированный на объём коэффициент концентрации в целевой области, определённый в разделе 11;
- показатель плотности в целевой области — U_target/V_target;
- радиальная полуширина энергии — медиана величины $|r-R|$, взвешенная по энергии в центральной области;
- return-share и post-source return-share — нормированные прокси-показатели интегрированного по времени потока Пойнтинга;
- normalized dwell — интеграл внутренней энергии по времени после отключения источника, делённый на её максимум после отключения.

Ни один из этих прокси-показателей по определению не является вероятностью для луча, коэффициентом энергетического усиления или КПД.

Лучевая динамика:

- $t=\tanh(u/2)$ — меридиональная полууугловая координата;
- $\kappa=(C-1)/(C+1)$ — точный коэффициент фокального сжатия;
- J_x — осевой момент импульса, $j=J_x/a$;
- F — фиксированный внешний фокальный организатор;
- T_i — граница порядка событий на заданном сечении;
- H_m — множество траекторий с временем пребывания выше заданного порога;
- ξ — координата стартового сечения, μ — остальные фиксированные параметры.

Геометрия:

- a и b — параметры полуосей исходной гиперболы;
- R — радиальное смещение;
- $\beta=b/a$; $c=\sqrt{(a^2+b^2)}$;
- $C=c/a$; L — координата идеального острия;
- R1 — конечный радиус входа, используемый только при построении стенки для конечноволновой модели; $z_{inlet}=-a\sqrt{[1+((R-R1)/b)^2]}$.

Введённый автором термин «псевдогиперболоидный» обозначает это конструктивное семейство поверхностей вращения, получаемых из радиально смещённой гиперболы, а не стандартный полный квадрический гиперболоид.

1. Научные рамки, терминология и иерархия утверждений

Настоящий препринт разграничивает четыре уровня доказательности. Термин «закон» относится к точному рекуррентному соотношению фокального сжатия, доказанному для указанной идеальной геометрии РНВ-2 и ограниченного унаследованного меридионального семейства. Он не означает нового микроскопического взаимодействия, не изменяет уравнений Максвелла и не заменяет классический закон зеркального отражения. Перенос по порядку событий на сечениях, развёртывание при конечной кососити, время пребывания и конечноволновые наблюдаемые величины рассматриваются отдельно. Теоретической основой служат классическая геометрическая оптика, фокальные свойства коник и динамика бильярдов [1,2,10].

Наиболее сильное точное утверждение — меридиональное фокальное сжатие, выведенное в разделе 4. Атлас транспортных классов относится к иному логическому уровню. Классы PASS и RETURN определяются порядком двух событий за конечное время, а не различными асимптотическими аттракторами. Поэтому найденная на выбранном одномерном стартовом сечении граница T_i называется границей переноса по порядку событий либо границей транспортных классов. Для упорядоченного множества таких границ на данном сечении сохраняется сокращение FTSS, но не утверждается, что объединение одномерных границ образует глобально инвариантную сепаратрису полного многомерного фазового пространства бильярда.

Аналогично, фокальная геометрия, классификация переноса и увеличенное время пребывания — неэквивалентные структуры. Для отдельных значений параметров их координаты могут совпадать; неэквивалентность не означает поточечного неравенства. Это различие принципиально, поскольку фокально-транспортная инверсия определяется именно совпадением $T_i=F$ при переходе через определённое значение параметра.

Таблица 1. Иерархия научных утверждений и область их применимости.

Статус	Класс утверждений	Область применимости
Точно доказано аналитически	Стенка РНВ; $K<0$ на гладком рупоре; внешние фокальные кольца; зеркальное отражение; сохранение J_x; точное меридиональное фокальное сжатие; сжатие семейства; стационарное уравнение первого отражения; эталон $\beta=1$; подобие	Идеальный РНВ при заявленных условиях регулярности и событий
Подтверждено вычислениями	Множество границ транспорта по порядку событий; FTI; выборочное соответствие первому отражению; конечные полосы RETURN; квадратичное масштабирование при малом J; уменьшение области длительного пребывания	Заданные конечные сетки параметров и численные допуски

Статус	Класс утверждений	Область применимости
Открытые вопросы / будущие исследования	Глобальная топология многообразий фазового пространства; полное происхождение ветвей; универсальные критические β или j; подлинная теорема постоянного захвата / глобального выхода; энергоэффективность с нормировкой принятой мощности; характеристики потерь, Q и полосы; экспериментальная валидация	Требуются теория продолжения, независимое воспроизведение, волновые исследования с нормировкой мощности и учётом потерь и/или эксперимент
Вычислительные данные при конечной длине волны	Раннее фокально-селективное переходное перераспределение; калиброванный направленный отклик поля/потока T–F; гладкая связь направления запуска с состоянием; устойчивые по сетке относительные T/F-показатели; нет абсолютного обогащения широкой области или резкой волновой копии T/F	Заданные геометрии Maxwell/FDTD, источники, разрешения и определённые решателем метрики; не входит в точную лучевую теорему

1.1. Операционные определения

Пусть начальное состояние на заданном стартовом сечении параметризовано ориентированной координатой ξ при фиксированных вспомогательных параметрах μ. Определим полную карту конечных событий $E(\xi;\mu)$. PASS означает, что первое пересечение центральной цилиндрической поверхности выхода в направлении наружу происходит до первого достижения противоположного рупора. RETURN означает, что сначала достигается противоположный рупор. Если модель содержит конечное отверстие у вершины, TIP_EXIT означает выход через него до соответствующего события центрального выхода. Таким образом, для модели с усечённой вершиной $E(\xi;\mu)\in\{\text{PASS, RETURN, TIP_EXIT}\}$, тогда как на рассматриваемом сечении идеальная модель с закрытой вершиной и открытой центральной частью может иметь лишь два класса.

Определим бинарную область $D_{bin}(\mu)=\{\xi:E(\xi;\mu)\neq\text{TIP_EXIT}\}$. Только на D_{bin} задаётся $B(\xi;\mu)$, причём $B=0$ для PASS и $B=1$ для RETURN. Следовательно, конечный интервал TIP_EXIT исключается из области бинарной проекции, а не переименовывается без указания. Любое представление B через функцию Хевисайда применимо в пределах связных бинарных подобластей и не должно вычисляться через исключённый интервал TIP_EXIT.

Границей транспортного класса T_i называется значение ξ, при котором при двусторонней проверке вблизи границы меняется класс порядка событий. Ориентация $\omega_i=+1$ либо -1 характеризует направление бинарного скачка. Фокальный организатор F определяется исходной гиперболой. Множество времени пребывания H_m — зависимое от порога подмножество, определяемое выбранным критерием времени пребывания, числа отражений или длины пути m. Поэтому структурное утверждение состоит в неэквивалентности семейств F, $T_{sec}(\mu)$ и $\{H_m\}$, а не в буквальном утверждении, что их координаты никогда не могут совпадать.

1.2. Три организующих уровня и соответствующие математические вопросы

Фокальная, транспортная и временная структуры отвечают на три различных математических вопроса. Фокальное множество F показывает, где исходная коника располагает геометрические организаторы и какое точное наследование отражений следует из геометрии этой кривой. Транспортное множество на сечении T_sec(μ) показывает, какие начальные условия меняют порядок двух заданных событий за конечное время. Семейство {H_m} определяет начальные состояния, удовлетворяющие указанному порогу времени пребывания, длины пути или числа отражений. Смешение этих вопросов превращало бы совпадение координат в не доказанную физическую тождественность.

Для PHB число фокусов фиксировано: N_F=2. Напротив, число N_T границ переноса по порядку событий зависит от начального состояния и геометрии и может превышать два даже на одном разрешённом стартовом сечении. Противопоставление фиксированного и переменного числа объектов является ключевым для интерпретации результатов. Два фокальных кольца принадлежат самой геометрии; T_i характеризуют выбранное сечение начальных условий; множества пребывания дополнительно зависят от назначенного пользователем порога m.

Эта иерархия также уточняет статус будущих приложений. Фокус способен организовывать сжимающееся семейство лучей, не являясь переключателем транспортного класса. Переключатель транспорта может направлять луч к противоположному рупору, не вызывая длительного пребывания. Траектория с большим временем пребывания может возникать вдали от любой фокальной координаты или транспортной границы. Поэтому утверждения на уровне устройства требуют наблюдаемой величины, относящейся к соответствующему уровню, а не общего заявления о том, что особая геометрическая точка «удерживает» энергию.

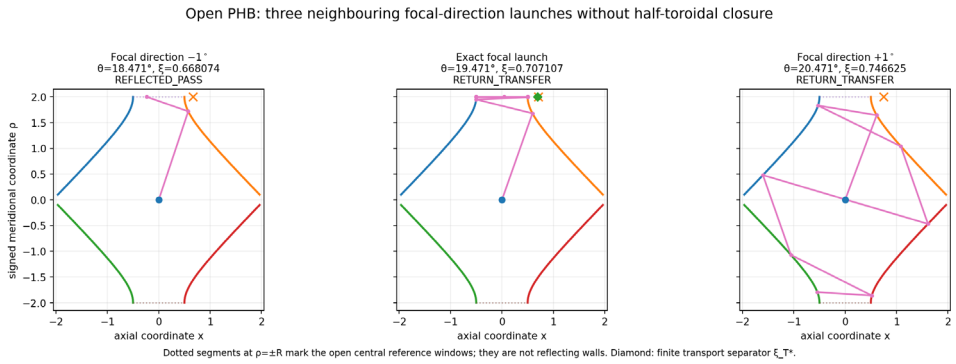

Рисунок 1. Три соседних направления запуска в открытом PHB: θ_F−1°, точное фокальное направление θ_F и θ_F+1°. Ромб обозначает независимо найденную конечную транспортную границу ξ_T. Пунктирные центральные участки показывают открытые контрольные окна и не являются отражающими стенками.

2. Геометрия идеального PHB

Используем цилиндрические координаты относительно оси x, где ρ=(y²+z²)^(1/2). Исходная меридиональная гипербола смещена на R в радиальном направлении:

$$x^2/a^2 - (\rho-R)^2/b^2 = 1, \quad a>0,\ b>0,\ R>0. \quad (1)$$

Физический внутренний рупор образован ветвью, направленной к оси симметрии:

$$\rho(x)=R-b[(|x|/a)^2-1]^{(1/2)}, \quad a\le|x|\le L, \quad (2)$$

$$L=a[1+(R/b)^2]^{(1/2)}. \quad (3)$$

При |x|=a гиперболический рупор достигает переходных колец (|x|=a,ρ=R). Сама гиперболическая поверхность в этих точках регулярна в естественной параметризации коники. Однако отражающий участок стенки заканчивается на том же геометрическом кольце, где начинается центральная поверхность события выхода. Поэтому переходное кольцо является ребром границы событий составной модели открытой полости, а не геометрической особенностью гиперболы. В открытой лучевой модели цилиндрическая поверхность ρ=R при |x|<a служит поверхностью выхода и не отражает. Идеальный рупор заканчивается осевым остриём ρ=0, x=±L, где описание поверхности вращения становится сингулярным. Численное усечение вершины при ρ_tip>0 рассматривается как отдельная модель. Для событий, приходящихся точно на переходное ребро либо идеальное остриё, необходимо явно задавать приоритет событий.

Два фокуса исходной меридиональной гиперболы лежат при x=±c на смещённой прямой ρ=R, где

$$c=(a^2+b^2)^{(1/2)}. \quad (4)$$

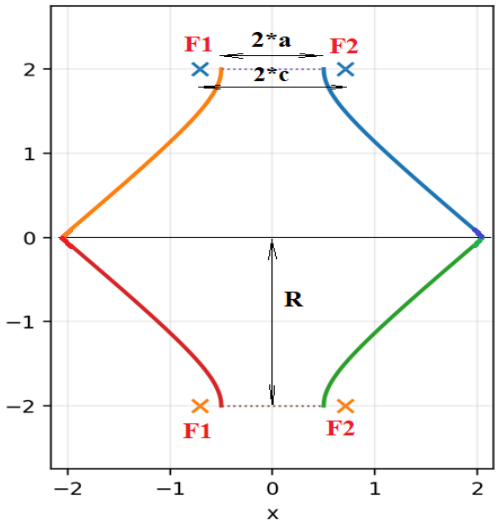

Рисунок 2. Точная меридиональная геометрия идеального РНВ-2 с замкнутыми рупорами.

После вращения вокруг оси x каждый меридиональный фокус образует внешнее фокальное кольцо. Следовательно, идеальная геометрия РНВ всегда содержит ровно два внешних фокальных кольца:

$$\mathcal{F}_{\pm} : x=\pm c,\ \rho=R, \quad N_F=2. \quad (5)$$

Определение «внешние» принципиально: эти кольца — геометрические организаторы, унаследованные от исходной коники; они необязательно расположены внутри доступного объёма полости. Луч может быть направлен относительно внешнего фокуса, не достигая самого кольца физически, поскольку сначала пересекает стенку РНВ.

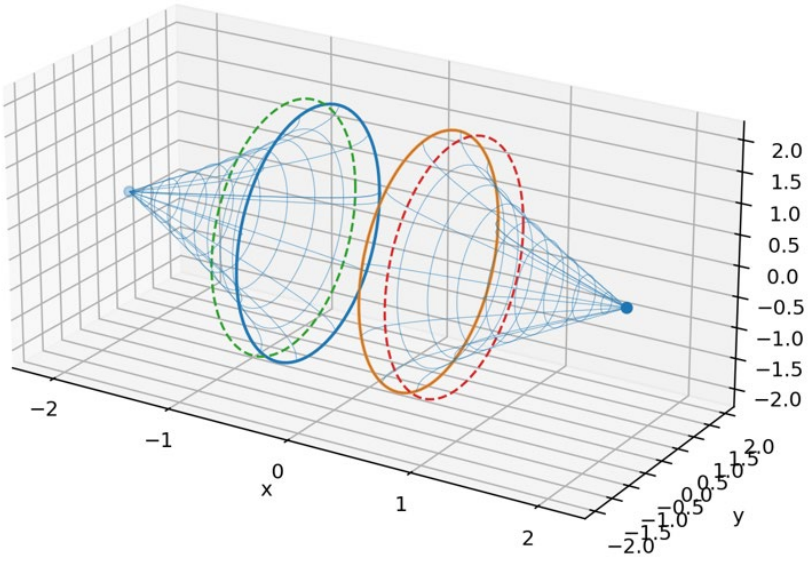

Рисунок 3. Геометрия РНВ с замкнутыми рупорами. Переходные кольца расположены при x=±a, ρ=R; фокальные кольца исходной гиперболы — при x=±c, ρ=R.

2.1. Гауссова кривизна

Для поверхности вращения ρ=ρ(x) гауссова кривизна на регулярном гладком участке рупора определяется формулой [9]:

$$K = -\rho'' / [\rho(1+\rho'^2)^2]. \quad (6)$$

Для регулярного открытого рупора a<|x|<L при ρ>0 непосредственное дифференцирование даёт ρ″>0 и, следовательно, K<0. При |x|→a+ нормаль к поверхности становится осевой, а K→0. Переходное кольцо является регулярной предельной точкой гиперболической поверхности, хотя в составной модели отражения и выхода оно выступает ребром. У идеального осевого острия при ρ→0 описание поверхности вращения сингулярно. Поэтому отрицательная гауссова кривизна — описательное свойство открытого рупора, а не изолированное причинное объяснение многоветвистого транспорта: изменение b/a одновременно меняет геометрию коники, фокальное расстояние, длину рупора, поле нормалей и карту отражений. Для причинного выделения роли кривизны необходимы согласованные контрольные поверхности из других семейств с отрицательной кривизной.

2.2. Безразмерная геометрия и различные роли β и R/a

Особенно полезны два безразмерных геометрических параметра. Отношение формы β=b/a определяет исходную гиперболу и точный коэффициент сжатия. Радиальное смещение r=R/a определяет удаление физического рупора от оси симметрии и входит в нормированную длину рупора L/a=[1+(r/β)²]^(1/2). Нормированная фокальная координата C=c/a=(1+β²)^(1/2), поэтому при нормировке координат на a положение фокальных колец зависит от β, но не от r.

$$C=(1+\beta^2)^{1/2}, \quad L/a=[1+(r/\beta)^2]^{1/2}, \quad \kappa=(C-1)/(C+1). \quad (7)$$

Это разделение научно существенно. При фиксированном β изменение R меняет положение физической стенки и геометрию событий, но оставляет κ строго неизменным. Напротив, изменение β меняет κ, фокальное расстояние, распределение кривизны, нормали рупора и обычно карту транспорта. Следовательно, зависимость точного фокального сжатия от параметров нельзя отождествить с параметрической зависимостью транспортной границы T_i. Вычислительные сканирования по R, в которых T_i смещается при постоянном β, согласуются с этим аналитическим разграничением.

Отрицательная гауссова кривизна остаётся описательным признаком на a<|x|<L, а не выделенной причиной. Полученное ниже точное сжатие использует фокальное свойство коники и конкретную физическую ветвь смещённой гиперболы. Произвольная поверхность с K<0 необязательно обладает такой же фокальной картой. Для установления причинной роли кривизны нужны контрольные варианты, в которых кривизна изменяется независимо от унаследованной структуры коники.

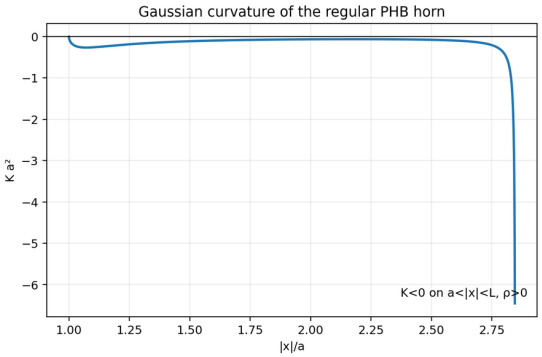

Рисунок 4. Гауссова кривизна регулярного рупора PHB, вычисленная по точному профилю смещённой гиперболы. На гладком рупоре K<0 при a<|x|<L и ρ>0; по мере приближения к переходному кольцу K стремится к нулю. Центральная контрольная поверхность выхода не принадлежит отражающему рупору.

3. Точная локальная механика лучей и инвариант вращения

Пусть d — единичный вектор падающего луча, а n — единичная нормаль к поверхности в регулярной точке отражения. Направление отражённого луча определяется классическим векторным законом [1]:

$$d' = d - 2(d\cdot n)n. \quad (8)$$

Неявное уравнение любой из гладких гиперболических ветвей имеет вид

$$F(x,y,z)=x^2/a^2 - ([(y^2+z^2)^{(1/2)}-R]^2)/b^2 - 1 = 0. \quad (9)$$

Градиент задаёт направление нормали всюду, где ρ>0. Алгебраическое исключение параметра прямой луча с использованием (8) приводит к уравнению пересечения четвёртой степени. Поскольку при выводе квадратировался радикал, уравнение может содержать посторонние корни. Поэтому каждое принятое численное пересечение должно удовлетворять исходному неквадратированному физическому профилю, лежать на допустимой ветви, соответствовать положительному параметру луча и быть самым ранним допустимым событием. Такая фильтрация является частью численного определения, а не необязательной последующей обработкой.

Вращательная симметрия относительно оси x обеспечивает сохранение осевого момента импульса

$$J_x = y\, v_z - z\, v_y = \rho\, v_\varphi. \quad (10)$$

При зеркальном отражении от поверхности вращения сохраняется азимутальная компонента канонического момента импульса. Следовательно, J_x постоянно на участках свободного полёта и при регулярных отражениях. Меридиональный сектор J_x=0 инвариантен: луч, запущенный в меридиональной плоскости, остаётся в ней. Ниже точный фокальный закон доказывается для этого инвариантного сектора. Косые лучи с конечным J_x являются его возмущением, а не автоматическим трёхмерным обобщением точной фокальной последовательности.

Условие $J_x=0$ имеет более сильный смысл, чем просто «малая косость». Оно определяет инвариантный меридиональный сектор: каждый участок свободного полёта и каждое регулярное отражение остаются в одной плоскости, проходящей через ось x. Поворот любого такого меридионального решения на произвольный азимутальный угол даёт эквивалентное решение вследствие осевой симметрии РНВ. Следовательно, точная фокальная теорема порождает непрерывное семейство повёрнутых решений в трёх измерениях, однако каждый его представитель по-прежнему имеет $J_x=0$.

Произвольный трёхмерный луч с $J_x\neq0$ качественно иной: он имеет азимутальное движение, поэтому нельзя считать, что после отражений он обязательно проходит через меридиональные фокальные прямые. Вычисления при конечном J_x следует интерпретировать как развёртывание вокруг точного инвариантного каркаса, а не как доказательство того, что уравнение (13) является полноценным трёхмерным рекуррентным соотношением.

Теорема исключает нерегулярные случаи попадания точно на граничное ребро или остриё из рекуррентного соотношения регулярных отражений. В переходном кольце гиперболическая поверхность остаётся регулярной, но конец отражающей стенки совпадает с поверхностью выхода, и потому в численной модели необходимо указать приоритет событий. Идеальное осевое остриё действительно сингулярно как точка поверхности вращения. Эти случаи меньшей размерности ограничивают область применимости теоремы, а не свидетельствуют о недостатке геометрического построения.

4. Точный закон меридионального фокального сжатия

Введём безразмерное отношение формы $\beta=b/a$, фокальное отношение $C=c/a=(1+\beta^2)^{1/2}$ и гиперболический параметр $u\geq0$ на правой внутренней ветви:

$$x=a\cosh u,\quad \rho-R=-b\sinh u. \qquad (11)$$

Используем полууглловую координату

$$t=\tanh(u/2),\quad 0\leq t<1. \qquad (12)$$

Для математической гиперболы $0\leq t<1$, однако регулярные состояния отражения на физическом рупоре удовлетворяют $0<t\leq t_{max}$. Для идеального неусечённого рупора $u\leq u_{max}=\operatorname{asinh}(R/b)$ и $t_{max}=\tanh[(1/2)\operatorname{asinh}(R/b)]$; при конечном отверстии вершины $\rho_{tip}>0$ следует заменить R на $R-\rho_{tip}$ в выражении для u_{max}. Значение $t=0$ не рассматривается как обычное состояние регулярного отражения: это предельная неподвижная точка переходного кольца при непрерывном продолжении отображения. Поскольку $0<\kappa<1$, каждый элемент последовательности $t_n=\kappa^n t_0$ при $0<t_0\leq t_{max}$ остаётся в регулярной физической области для любого конечного n.

Утверждается, что последовательные фокально-согласованные меридиональные переносы между противоположными рупорами подчиняются линейному сжатию координаты t:

$$t_{n+1}=\kappa\, t_n,\quad \kappa=(C-1)/(C+1)=[(1+\beta^2)^{1/2}-1]/[(1+\beta^2)^{1/2}+1]. \qquad (13)$$

Поскольку $\beta>0$, выполняется $0<\kappa<1$. В отличие от транспортной границы коэффициент κ зависит только от a и b через β и не зависит от радиального смещения R.

Фокально-транспортный лучевой закон — положение о точном фокальном сжатии. Пусть луч зеркально отражается в регулярных точках внутренней ветви идеального РНВ-2, $J_x=0$ (так что траектория остаётся в одной меридиональной плоскости), а начальное состояние принадлежит унаследованному фокально-сопряжённому семейству, связывающему противоположные рупоры. Для любого регулярного начального состояния $0<t_0\leq t_{max}$ каждый следующий унаследованный перенос удовлетворяет $t_{n+1}=\kappa t_n$, где $\kappa=[\sqrt{(1+(b/a)^2)}-1]/[\sqrt{(1+(b/a)^2)}+1]$, а потому $t_n=\kappa^n t_0$. Предельное значение $t=0$ достигается

лишь асимптотически и не считается регулярным отражением. Это рекуррентное соотношение составляет строгое теоремное ядро закона. Границы порядка событий, косые отклонения, множества пребывания и конечноволновые наблюдаемые имеют иной доказательный статус.

4.1. Полный вывод отображения сжатия

Подробный вывод приведён потому, что уравнение (13) составляет теоремное ядро фокальной части статьи. Используемое здесь фокальное свойство отражения коник классическое [1,10]. Сместим меридиональную радиальную координату: $\eta=\rho-R$. Пусть P — точка отражения на правой ветви с полууглoвой координатой $t=\tanh(u/2)$, а Q — следующая фокально-связанная точка на левой ветви с координатой $s=\tanh(v/2)$. Формулы половинного угла дают:

$$P=\left(a(1+t^2)/(1-t^2),\ -2bt/(1-t^2) \right), \quad (14)$$

$$Q=\left(-a(1+s^2)/(1-s^2),\ -2bs/(1-s^2) \right). \quad (15)$$

Противоположный меридиональный фокус имеет координаты $F_-=(-c,0)=(-aC,0)$. Классическое фокальное свойство гиперболы состоит в том, что зеркальное отражение в P переводит соответствующее фокальное направление в прямую, связанную с противоположным фокусом. Поэтому следующий фокально-связанный отрезок определяется коллинеарностью точек P, F_- и Q. Вычисление двумерного определителя $\det(P-F_-,Q-F_-)=0$ и исключение ненулевых знаменателей приводит к равенству

$$(1+st)[(C+1)s-(C-1)t]=0. \quad (16)$$

На физических внутренних ветвях $0\le s,t<1$, поэтому $1+st>0$ и этот множитель не обращается в нуль. Следовательно, физически допустимый множитель даёт

$$s=[(C-1)/(C+1)]t=\kappa t. \quad (17)$$

Отождествляя s с полууглoвой координатой следующего унаследованного фокального переноса, получаем (13). Итерация даёт

$$t_n=\kappa^n t_0. \quad (18)$$

Итак, алгебраическая фокальная последовательность геометрически сжимается в полууглoвой координате. Чтобы завершить доказательство физического рекуррентного соотношения, нужно дополнительно показать, что найденная точка является следующим допустимым отражением от стенки, а не просто коллинеарной точкой коники. Это устанавливается следующей леммой.

Лемма. Пусть P_n — регулярная точка унаследованной фокально-сопряжённой ветви с координатой $0<t_n\le t_{max}$, а $t_{n+1}=\kappa t_n$. Тогда луч, зеркально отражённый от P_n, сначала пересекает противоположный физический рупор в P_{n+1}, прежде чем достигнет соответствующего внешнего фокуса или центральной поверхности выхода.

Доказательство. Классическое фокальное свойство гиперболы задаёт отражённую прямую, проходящую через противоположный меридиональный фокус. Вычисление определителя даёт второе физическое пересечение с коникой при полууглoвой координате $s=\kappa t_n$. Из $0<\kappa<1$ следует $0<s<t_n\le t_{max}$, поэтому P_{n+1} принадлежит допустимой противоположной ветви. Кроме того, $s^2<\kappa=(C-1)/(C+1)$, откуда $|x_{n+1}|/a=(1+s^2)/(1-s^2)<C=c/a$; следовательно, второе пересечение со стенкой предшествует достижению внешнего фокуса по отражённой прямой. В смещённых меридиональных координатах $\eta=\rho-R$ обе конечные точки P_n и P_{n+1} имеют $\eta<0$. На прямолинейном отрезке $\eta(\lambda)=(1-\lambda)\eta_n+\lambda\eta_{n+1}<0$ для $0<\lambda<1$, так что $\rho<R$ по всей длине отрезка и центральная поверхность выхода $\rho=R$, $|x|<a$ не пересекается. Наконец, прямая пересекает меридиональную конику не более чем в двух точках, если сама не является её

компонентой. Следовательно, между P_n и P_{n+1} нет более раннего регулярного пересечения с рупором. Поэтому P_{n+1} — следующее физическое отражение от стенки. Индукция завершает доказательство физического рекуррентного соотношения t_n=κ^n t_0.

4.2. Точное сжатие в физических координатах

Полууглового закон допускает непосредственную пространственную интерпретацию, не сформулированную явно при геометрическом выводе. Из стандартных тождеств

$$\cosh u=(1+t^2)/(1-t^2),\quad \sinh u=2t/(1-t^2),\quad (19)$$

координаты n-й точки отражения на правом или левом рупоре удовлетворяют

$$|x_n|=a(1+t_n^2)/(1-t_n^2),\quad \rho_n=R-2bt_n/(1-t_n^2).\quad (20)$$

Определим радиальное и осевое расстояния от координаты переходного кольца (|x|=a,ρ=R):

$$\Delta\rho_n=R-\rho_n=2bt_n/(1-t_n^2),\quad (21)$$

$$\Delta x_n=|x_n|-a=2at_n^2/(1-t_n^2).\quad (22)$$

Подстановка t_{n+1}=κt_n даёт точные отношения для одного шага:

$$\Delta\rho_{n+1}/\Delta\rho_n = \kappa(1-t_n^2)/(1-\kappa^2t_n^2),\quad (23)$$

$$\Delta x_{n+1}/\Delta x_n = \kappa^2(1-t_n^2)/(1-\kappa^2t_n^2).\quad (24)$$

С ростом n координата t_n стремится к нулю, поэтому

$$\Delta\rho_{n+1}/\Delta\rho_n \to \kappa,\quad \Delta x_{n+1}/\Delta x_n \to \kappa^2.\quad (25)$$

$$\Delta\rho_n \sim 2b\, t_0\, \kappa^n,\quad \Delta x_n \sim 2a\, t_0^2\, \kappa^{(2n)}.\quad (26)$$

Пределом является координата переходного кольца (|x|=a,ρ=R), а не ось вращения ρ=0 и не материальная точка внешнего фокуса. Это различие исключает ошибочное толкование сжатия как осевого фокусирования на ρ=0.

Два меридиональных фокуса исходной гиперболы F_±=(±c,R) лежат на смещённой фокальной прямой ρ=R. Определим полный отрезок исходной фокальной прямой $L_F=\{(x,\rho):-c\le x\le c,\rho=R\}$ и его внутренний центральный подотрезок $L_0=\{(x,\rho):-a\le x\le a,\rho=R\}\subset L_F$. Пусть S_n — прямолинейный участок свободного полёта от n-й точки стенки P_n до следующей точки противоположного рупора P_{n+1}. Точное рекуррентное соотношение показывает не только, что конечные точки приближаются к переходным кольцам, но и что весь физический отрезок S_n приближается к L_0.

Для $S_n(\lambda)=(1-\lambda)P_n+\lambda P_{n+1}$, $0\le\lambda\le1$, радиальная координата удовлетворяет

$$R-\rho_{S_n}(\lambda)=(1-\lambda)\Delta\rho_n+\lambda\Delta\rho_{n+1}.\quad (27)$$

Поскольку $0<\Delta\rho_{n+1}<\Delta\rho_n$, каждая точка S_n при конечном n лежит строго с внутренней стороны фокальной прямой, а наибольшее поперечное отклонение равно

$$\varepsilon_n=\max_{0\le\lambda\le1}[R-\rho_{S_n}(\lambda)]=\Delta\rho_n.\quad (28)$$

Следовательно,

$$\varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n=\kappa(1-t_n^2)/(1-\kappa^2t_n^2)\to\kappa,\quad \varepsilon_n\sim 2b\,t_0\,\kappa^n.\quad (29)$$

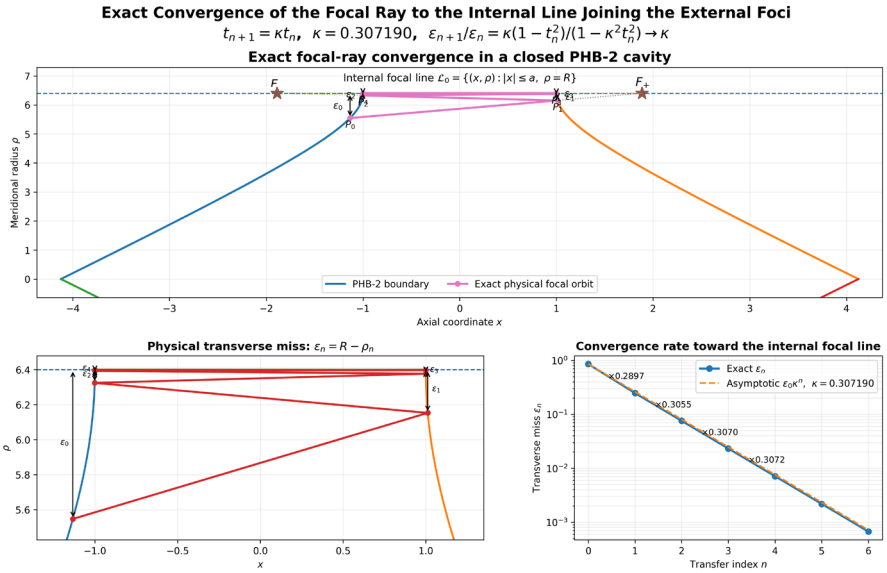

Рисунок 5. Точная сходимость фокально-согласованного меридионального луча к внутреннему отрезку фокальной прямой L_0. Последовательные физические точки отражения чередуются между двумя рупорами PHB и приближаются к координатам переходных колец (±a,R). Поперечное отклонение ε_n=R−ρ_n подчиняется точному одношаговому соотношению ε_{n+1}/ε_n=κ(1−t_n²)/(1−κ²t_n²) и асимптотически сокращается с коэффициентом κ. Логарифмическая панель показывает быстрое приближение физического коэффициента сжатия к точному коэффициенту фокальной координаты κ. Внешние фокусы F_± организуют отражённые направления, но луч физически их не достигает.

Одновременно осевой выход конечных точек отрезка за пределы x=±a равен Δx_n=O(κ^{2n}). Следовательно, расстояние Хаусдорфа от S_n до L_0 удовлетворяет d_H(S_n,L_0)=O(κ^n); асимптотически определяющим оказывается поперечное приближение. Именно это точное лучевое утверждение лежит за выражением «концентрация у фокальной прямой»: физическая траектория между рупорами геометрически ограничивается всё более тонкой окрестностью внутреннего отрезка исходной фокальной прямой. Это не формула роста интенсивности.

После вращения вокруг оси симметрии L_0 образует внутреннюю цилиндрическую поверхность C_0={|x|≤a,ρ=R,0≤φ<2π} между двумя переходными кольцами. Поэтому окрестность конечной толщины этой поверхности является естественной трёхмерной областью проверки конечноволнового отклика, соответствующего точному лучевому сжатию.

4.3. Сжатие фокально-согласованного семейства лучей

Поскольку точное отображение линейно по t, оно также сокращает расстояние между двумя представителями одного унаследованного фокально-сопряжённого семейства. Если их начальные полууглловые координаты различаются на δt_0 и обе траектории остаются на одной унаследованной ветви, то

$$\delta t_n = \kappa^n \delta t_0. \quad (30)$$

Соответственно малая ширина пучка, измеряемая в координате t, удовлетворяет

$$W_t(n) = \kappa^n W_t(0). \quad (31)$$

Полезно определить безразмерный показатель фокального сжатия на один унаследованный перенос:

$$\Lambda_F=-\ln \kappa > 0. \quad (32)$$

Уравнения (30)–(32) являются точными геометрическими утверждениями для представителей одного унаследованного фокально-сопряжённого семейства при условиях для ветвей, указанных в (13). Они не означают, что произвольный пучок, испущенный одним точечным источником, сжимается во всём оптическом фазовом пространстве. В волновой задаче пространственное сужение ограничено угловым разбросом, фазой, дифракцией, потерями и сохранением фазового объёма/этенду. Корректное утверждение на лучевом уровне относится к сжатию в ограниченном семействе координаты t, а не к созданию или неограниченному накоплению энергии [11].

4.4. Зависимость интенсивности сжатия от отношения формы

Коэффициент сжатия строго монотонен по β. Дифференцируя κ(β), получаем

$$d\kappa/d\beta = 2\beta / \{[(1+\beta^2)^{(1/2)}] [(1+\beta^2)^{(1/2)}+1]^2\} > 0. \quad (33)$$

Следовательно, малые β обеспечивают более сильное сжатие на каждый унаследованный фокальный перенос, а большие β — более слабое. Это явно показывают предельные разложения:

$$\kappa = \beta^2/4 - \beta^4/8 + 5\beta^6/64 + O(\beta^8), \quad \beta\to 0, \quad (34)$$

$$\kappa = 1 - 2/\beta + 2/\beta^2 - 1/\beta^3 + O(\beta^{-5}), \quad \beta\to\infty. \quad (35)$$

Поэтому показатель сжатия $\Lambda_F=-\ln\kappa$ уменьшается с ростом β. Если ширину фокального семейства в t-пространстве нужно сократить до доли η начальной ширины, минимальное целое число унаследованных переносов удовлетворяет $n\geq \ln(\eta)/\ln(\kappa)$, где $0<\eta<1$. Это закон для числа переносов, а не для физического времени: реальное время также зависит от длин отрезков перелёта.

4.5. Почему сжатие не является диссипацией в фазовом пространстве

Уравнение (13) нельзя интерпретировать как диссипативный аттрактор полного бильярда. Идеальная динамика зеркальных лучей консервативна между событиями выхода. Отображение $t\to\kappa t$ представляет собой условный перенос между последовательными представителями специально выделенного фокально-связанного семейства, а не якобиан полного отображения Пуанкаре в фазовом пространстве координат и углов. Поэтому уменьшение $|\delta t_n|$ не означает сжатия всего объёма оптического фазового пространства.

То же различие относится к плотности лучей. Сужение по координате t или по радиальному положению последовательных точек отражения может сопровождаться изменением углового разброса и времени прохождения. Поэтому $\kappa^{(-n)}$ само по себе не является формулой усиления интенсивности. Переход от сужения лучевого семейства к плотности энергии при конечной длине волны требует решения волновой задачи или расчёта плотности лучей с учётом сопряжённых угловых переменных и нормировки потока.

4.6. Интерпретация вращения: от меридиональных фокальных прямых к кольцевой организации

В двумерном меридиональном сечении фокальные организаторы выглядят как две точки на смещённой прямой ρ=R. Вращение превращает каждую точку во внешнее кольцо. Аналогично вращение точного фокального семейства с $J_x=0$ порождает континуум эквивалентных меридиональных плоскостей. Если физически реализуемый источник возбуждает эти плоскости когерентно или некогерентно при подходящей симметрии, естественный трёхмерный геометрический объект, предполагаемый лучевым законом, будет кольцевым, а не осевым точечным фокусом.

Точная последовательность ударов о стенку геометрически стремится к координатам переходных колец (|x|=a,ρ=R), а полные отрезки свободного перелёта между рупорами сходятся к внутреннему отрезку фокальной прямой L_0 между ними. Внешние фокальные кольца F_± задают отражённые направления, но физические лучи не обязаны через них проходить. При вращении L_0 образует внутреннюю цилиндрическую поверхность C_0 при ρ=R. Это разграничение внешних фокальных организаторов и внутреннего множества сжатия принципиально при интерпретации карт поля.

4.7. Точная асимптотически невыходящая фокальная орбита в идеальном открытом РНВ

Закон точного сжатия даёт ещё одно следствие, если центральный цилиндр ρ=R, |x|<a рассматривать как поверхность события выхода. Пусть фокально-согласованная меридиональная орбита стартует с физически допустимого 0<t_0≤t_max. Из (18) следует t_n=κ^n t_0, так что при любом конечном n значение t_n строго положительно и только при n→∞ стремится к нулю.

Закон точного сжатия имеет дополнительное следствие, если центральный цилиндр ρ=R, |x|<a рассматривается как поверхность события выхода. Пусть фокально-согласованная меридиональная орбита стартует из физически допустимого состояния 0<t_0≤t_max. Из (18) следует t_n=κ^n t_0, поэтому t_n остаётся строго положительным при любом конечном n и стремится к нулю лишь при n→∞.

Согласно (20), каждая конечная точка отражения на этой точной унаследованной последовательности удовлетворяет |x_n|>a и ρ_n<R. Для прямолинейного отрезка между последовательными точками ρ(λ)=(1−λ)ρ_n+λρ_{n+1}<R при 0<λ<1. Поэтому отрезок не может пересечь центральную цилиндрическую поверхность выхода ρ=R, |x|<a. Координата переходного кольца достигается только в пределе n→∞.

Согласно (20), каждая конечная точка отражения в этой точной унаследованной последовательности удовлетворяет |x_n|>a и ρ_n<R. На прямолинейном отрезке, соединяющем соседние точки, ρ(λ)=(1−λ)ρ_n+λρ_{n+1}<R при любом 0<λ<1. Следовательно, отрезок не пересекает центральную цилиндрическую поверхность выхода ρ=R, |x|<a. Координата переходного кольца достигается только асимптотически при n→∞.

Следовательно, строго фокально-согласованная ветвь образует невыходящую орбиту идеальной открытой лучевой модели в пределах указанного унаследованного семейства. На каноническом одномерном стартовом сечении это изолированное настроенное состояние; на регулярной фазовой поверхности фиксированной энергии его гладкое продолжение меньшей размерности имеет нулевую меру относительно стандартной меры Лиувилля. Отсюда не следуют устойчивое захватывание, конечномерная область захваченных состояний или робастность по отношению к возмущениям, скруглению, шероховатости, потерям и конечной длине волны.

Накопления столкновений за конечное время по типу Зенона также нет. Если ℓ_n — длина свободного перелёта между последовательными отражениями от противоположных рупоров, то при n→∞ осевые координаты обоих концов стремятся к ±a, а радиальные — к R. Следовательно,

Также отсутствует накопление событий за конечное время по типу Зенона. Если ℓ_n — длина свободного перелёта между последовательными точками отражения на противоположных рупорах, то при n→∞ их осевые координаты стремятся к ±a, а радиальные — к R. Следовательно,

$$\ell_n \to 2a, \quad \Sigma_n \ell_n = \infty. \quad (38)$$

Таким образом, орбита совершает бесконечно много унаследованных переносов лишь при бесконечной длине пути и бесконечном времени полёта. Это отличает асимптотическое отсутствие выхода от накопления столкновений за конечное время на негладком переходном кольце.

В канонической предварительной лучевой проверке с конечной точностью при a=b=0.5 и R=2 точная фокальная координата составляет F=0.707106781187, а κ=0.171572875254. Трассировщик событий с двойной точностью прослеживает точную фокальную последовательность через отражения, быстро сходящиеся к (|x|,ρ)=(a,R). Первые измеренные отношения t_{n+1}/t_n воспроизводят κ почти с машинной точностью; когда точки отражения перестают отличаться от переходного кольца в двойной точности, алгоритм регистрирует центральный выход после 11 отражений. Уравнения (36)–(38) показывают, что этот конечный исход представляет собой артефакт различения событий при вычислениях с плавающей точкой, а не физическое завершение точной идеальной орбиты.

Этот артефакт важен для методологии: точные фокальные траектории вблизи переходного кольца следует обрабатывать аналитически либо с произвольной точностью и допусками, учитывающими события. Конечное число отражений, выданное обычным трассировщиком двойной точности, нельзя интерпретировать как физическое время жизни точной ветви F.

4.8. Трёхмерное обобщение на косые лучи: гипотезы и целевые вычислительные проверки

Точный закон относится к J_x=0. Тем не менее окружающую трёхмерную динамику можно систематически организовать с помощью сохраняющегося осевого момента импульса. Термины «винтообразный» и «косой» луч используются здесь описательно: участки свободного полёта остаются прямыми в декартовых координатах, но последовательность участков азимутально смещается вокруг оси симметрии.

4.8.1. Инвариантные слои углового момента

Для луча единичной скорости определим безразмерный инвариант косости j=J_x/a. На регулярной фазовой поверхности фиксированной энергии каждый уровень J_x=aj инвариантен при свободном полёте и регулярном зеркальном отражении. Меридиональный сектор j=0 является особым уровнем, для которого доказана точная теорема фокального сжатия. Ненулевое j описывает действительно немеридиональную динамику, а не повёрнутую копию меридионального запуска.

$$\mathcal{M}_j=\{Z \in \Gamma_E : J_x(Z)=a\,j\}, \quad \Gamma_E=\bigcup_j \mathcal{M}_j. \quad (39)$$

4.8.2. Чётная фокальная деформация и нечётная азимутальная закрутка

Смена знака косости j→−j обращает направление азимутального движения, но не меняет осесимметричную геометрию РНВ. Поэтому любой гладкий скалярный диагностический показатель, инвариантный к смене закрутки и сохраняющий ту же последовательность событий, является чётной функцией j. В то же время знаковое приращение азимутального угла нечётно. Следовательно, вблизи j=0 ожидаются следующие общие локальные структуры:

$$\varepsilon_F(j)/a = C_2(\mu)\, j^2 + O(j^4), \quad \Delta\varphi_n = j\,\Omega_1(t_n;\mu)+O(j^3). \quad (40)$$

Первое соотношение соответствует структуре симметрии, проверенной по 4656 согласованным парам с конечной косостью, приведённым в разделе 8. Второе даёт новое утверждение о чётности знаковой переменной закрутки. Ни одно из этих соотношений не означает, что вся траектория с конечным j остаётся на точной фокальной ветви.

4.8.3. Корректное определение фокальной трубки и гипотеза о квадратичной зависимости её радиуса

Фокальную трубку следует определять как настоящую евклидову окрестность внешнего фокального кольца, а не просто как радиальную полосу в плоскости x=±c. Для двух фокальных колец $\mathcal{F}_\pm$ определим

$$\mathcal{U}_r(\mathcal{F}_\pm)=\{(x,\rho,\varphi): (x\mp c)^2+(\rho-R)^2\le r^2\}. \quad (41)$$

Соответствующее расстояние от точки до ближайшего фокального кольца составляет

$$d_F=\min_\pm [(x\mp c)^2+(\rho-R)^2]^{(1/2)}. \quad (42)$$

Замена $j\to -j$ не меняет осесимметричную геометрию, поэтому скалярная диагностика фокального расстояния чётна по j, пока сохраняется та же последовательность событий. Однако одна чётность не влечёт квадратичного главного члена: чётная функция может быть недифференцируема при j=0. При локальной дифференцируемости, неизменной последовательности событий, $d_F(0)=0$ и нулевой первой производной в симметричном состоянии обычный гладкий главный член имеет квадратичный вид:

$$d_F/a = D_2(\mu)\, j^2 + O(j^4). \quad (43)$$

Таким образом, уравнение (43) — условный локальный прогноз, а не точная часть закона фокального сжатия. Приведённая ниже численная проверка косых лучей исследует как чётность, так и показатель степени. Наблюдаемый показатель, близкий к двум, служит свидетельством гладкого квадратичного случая для указанной геометрии, но не теоремой, следующей из одной лишь симметрии.

4.8.4. Гипотеза о локальном редуцированном отображении при малой косости

Мультипликативная поправка вида $\kappa t_n[1+O(j^2)]$ по-прежнему заставляла бы t_n стремиться к нулю и потому не могла бы сама по себе описать конечный остаточный фокальный промах, вызванный косостью. Более общая локальная форма теории возмущений имеет вид

$$t_{n+1}=\kappa\, t_n + j^2\, A_2(t_n;\mu)+O(j^4), \quad \Delta\varphi_n=j\, \Omega_1(t_n;\mu)+O(j^3). \quad (44)$$

Если $A_2(t;\mu)$ стремится к конечному A_0 при $t\to 0$ и локальная ветвь остаётся корректной, редуцированное отображение имеет кандидата на малое смещение при $j\neq 0$:

$$t_*(j) \approx [A_0/(1-\kappa)]\, j^2. \quad (45)$$

Это задаёт математически согласованный механизм конечной фокальной трубки или остаточного фокального промаха. Является ли A_0 ненулевым, сохраняется ли последовательность событий достаточно долго и применима ли локальная карта вне малой окрестности j=0 — вопросы вычислительной проверки.

4.8.5. Зависимость границ транспортных классов от косости

Для источника на оси изменение только абсолютного азимута φ вращает тот же меридиональный запуск и не создаёт ненулевого J_x. Поэтому физически содержательное продолжение по косости следует задавать как $T_i(j;\mu)$, или как функцию знакового угла косости, а не как $T_i(\varphi)$, полученную простым жёстким поворотом. Если простая граница сохраняет происхождение событий и определение класса инвариантно при смене направления закрутки, локальная координата, как ожидается, будет чётной:

$$T_i(j;\mu)=T_i(0;\mu)+K_{2,i}(\mu)\, j^2+O(j^4). \quad (46)$$

Уравнение (46) — условный прогноз, который необходимо проверить двусторонними пробами при согласованных ±j. Он связывал бы точный инвариант J_x, квадратичный фокальный остаток и уровень транспорта по порядку событий, не превращая границу одномерного сечения в глобальную сепаратрису фазового пространства.

4.8.6. Строгая фокальная согласованность на конечном горизонте как будущая диагностика

Нынешние данные не обосновывают универсальный критический момент импульса, при котором динамика обязана стать хаотической или эргодической. Однако можно определить строгий порог фокальной согласованности на конечном горизонте. Для заданного N и допуска ε обозначим j_coh^(N)(ε) наибольшее |j|, при котором первые N ожидаемых унаследованных переносов сохраняют выбранную последовательность событий и удерживают фокальный остаток ниже ε. Эта величина зависит от геометрии и допуска, операционна и проверяема, но не совпадает с тем, что измеряет заключительное сканирование D6. D6 измеряет лишь сохранение числа отражений и далее обозначается отдельным символом.

4.8.7. Связь с азимутальными волновыми модами

Азимутальная гармоника конечноволнового поля e^(imφ) не тождественна численно лучевому инварианту J_x. Связь между ними возможна лишь через полуклассическое соответствие углового момента в подходящем высокочастотном пределе. Чистая гармоника с одним m имеет винтовую фазу, но $|e^{(im\varphi)}|^2=1$, поэтому сама по себе не создаёт спирального рисунка интенсивности с m рукавами. Будущие исследования Максвелла при $m\neq0$ должны сравнивать радиальную и осевую локализацию, фазовую закрутку, модальный поток и ширину трубки, а не предполагать спиральное изображение интенсивности.

4.8.8. Прямая численная проверка обобщения при малой косости

Трёхмерная проверка косых лучей включает упрощённый трёхмерный лучевой аудит, непосредственно исследующий сформулированные выше утверждения. Геометрия проверки: a=0.5, b=0.375 (β=0.75), R=1.0 (R/a=2), конечное отверстие вершины 0.10 и внеосевой источник S=(0,0.25R,0). При β=0.75 точный меридиональный коэффициент сжатия κ=1/9. Эта проверка независима от геометрии модели Максвелла и должна трактоваться как целевое локальное испытание развёртывания косых лучей, а не как глобальный обзор всего фазового пространства PHB.

Масштабирование виртуального фокального промаха. Внешнее фокальное кольцо — организующий ориентир, а не поверхность, которую физический луч должен пересечь. Для девяти положительных значений косости и их зеркальных пар свободная аппроксимация степенным законом даёт d_F^(1)/a=0.394832|j|^2.000236 при $R^2=0.99999998$, тогда как d_F^(1)/(aj²) меняется лишь примерно от 0.39406 до 0.39531. Интерпретация с фиксированным показателем p=2 поэтому характеризуется небольшим относительным разбросом на исследованном диапазоне. Значение R^2 — показатель качества аппроксимации, а не доказательство асимптотического порядка; квадратичная интерпретация дополнительно требует локальной гладкости, стабильной последовательности событий и ненулевого коэффициента второго порядка.

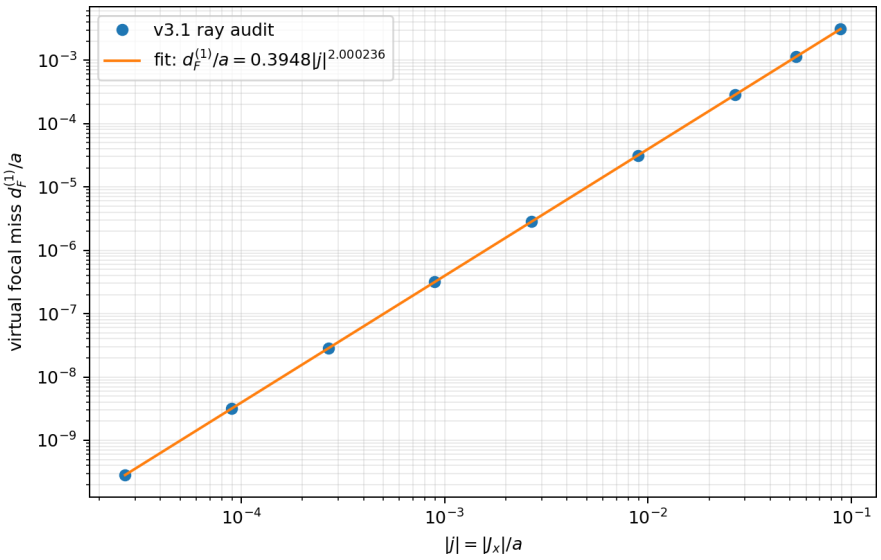

Рисунок 6. Проверка лучей с малой кососстью. Виртуальный первый фокальный промах подчиняется d_F^(1)/a=0.394832\|j\|^2.000236 в исследованном диапазоне. Внешнее фокальное кольцо используется как виртуальный геометрический ориентир; график не является измерением конечноволновой энергетической трубки.

Смещение транспортной границы при кососсти. На том же внеосевом стартовом сечении сохранённые пары +ψ и −ψ согласуются в пределах указанной точности. При |j|≤0.18 свободная диагностическая аппроксимация даёт Δ(T/a)=0.0586696j²−3.94×10^−6, R²=0.999993. Поскольку ΔT(0)=0 по определению, а симметрия по направлению закрутки требует чётного локального разложения, небольшой ненулевой свободный член рассматривается как погрешность аппроксимации/численного расчёта, а не физическая константа. Симметрийно ограниченная форма — Δ(T/a)=K_2j²+O(j⁴); свободная аппроксимация оставлена лишь как диагностика численной согласованности.

Фокально-транспортная инверсия, вызванная кососстью. Инверсия локализована независимо от квадратичной аппроксимации в диапазоне |j|≤0.18 и возникает за пределами использованного для неё подмножества. Детерминированное продолжение отслеживает ту же простую границу порядка событий по локальной близости, ориентации и двусторонней проверке классов при изменении ψ. Бисекция даёт T=F при |ψ|=36.17505377° и |j|=0.288080952 с нормированным остатком −4.02×10^−11. Это пример инверсии, зависящей от выбранного сечения, а не доказательство глобальной фазовой сепаратрисы.

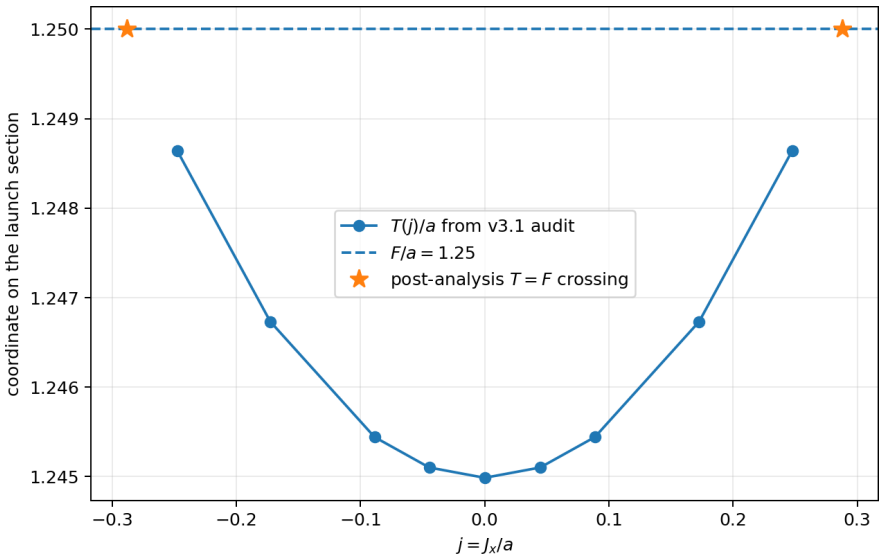

Рисунок 7. Чётное смещение границы порядка событий T(j) в исследовании малой косости. Продолженная граница пересекает фиксированную фокальную координату F/a=1.25 при |ψ|≈36.175°, образуя фокально-транспортную инверсию на данном сечении.

Азимутальная закрутка и чувствительность глобальных событий. Симметрия по направлению закрутки требует нечётности знакового углового обхода по j. Сохранённые значения для положительной косости показывают приблизительно линейную описательную тенденцию; свободная аппроксимация на положительной полуоси даёт turns≈0.4122j+0.00156 (R^2=0.99968), однако свободный член не имеет физического смысла, инвариантного относительно симметрии. Правильная локальная форма — Δφ=Ω_1j+O(j^3). Поскольку число отражений и длины пути могут меняться скачками при переключении порядка событий, наклон такой глобальной аппроксимации нельзя считать универсальным динамическим коэффициентом.

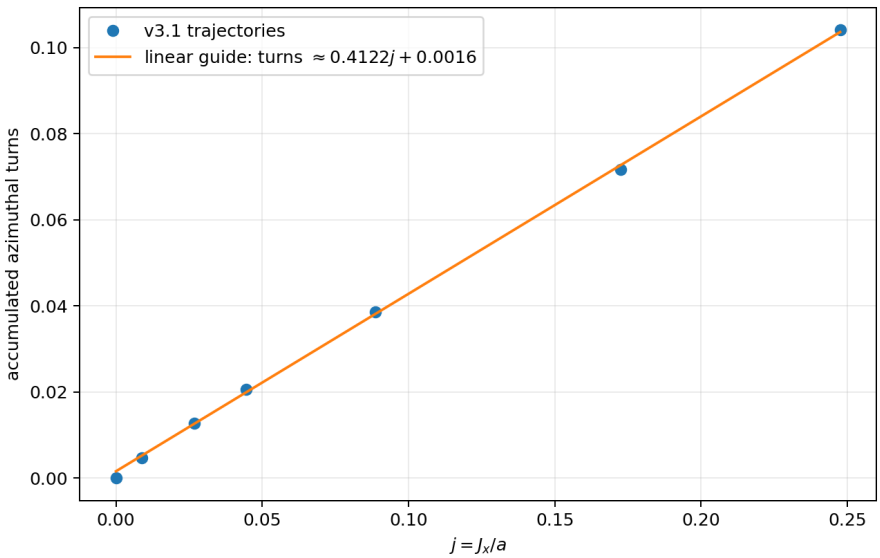

Рисунок 8. Накопленная азимутальная закрутка в зависимости от j для диагностики положительной косости. Почти линейная тенденция описательная; изменение числа отражений и длины пути не позволяет считать её наклон универсальным динамическим коэффициентом.

Научный статус. Для объявленной геометрии проверка косых лучей убедительно поддерживает три вычислительных утверждения для конечной области: почти квадратичное масштабирование виртуального фокального промаха, зеркально-чётное смещение T при относительной косости и фокально-транспортную инверсию, специфичную для данного сечения. Сохранение J_x строго следует из симметрии. Тенденция закрутки, увеличение фокального промаха на последовательных переносах и быстрые изменения числа отражений остаются диагностическими результатами конечной области, но не универсальными законами.

5. Точное стационарное построение первого отражения и определение основной границы транспортного класса

Отдельный расчёт посвящён положению кандидата на первое отражение, связанного с изменением порядка событий PASS/RETURN. Рассмотрим источник S на оси либо в иной заданной точке и точку отражения P на первом рупоре. Пусть V обозначает противоположную переходную вершину в выбранном меридиональном сечении. Ломаная оптическая траектория имеет длину

$$\mathscr{L}(P)=|S-P|+|P-V|. \quad (47)$$

Условие стационарности $\mathscr{L}$ по одномерной координате P даёт используемое здесь точное уравнение Ферма. Это точное условие стационарного ломаного пути с зеркальным отражением. Однако само по себе оно не доказывает, что соответствующее начальное условие принадлежит границе PASS/RETURN: порядок событий ещё необходимо проверить.

Чтобы отождествить стационарное решение с основной границей переноса по порядку событий, накладываются четыре условия: (i) P является первым физическим пересечением стенки на неквадратированной ветви PHB; (ii) ему не предшествует никакое событие выхода, достижения вершины, перехода или иное допустимое событие; (iii) отражённый участок достигает заданной критической переходной геометрии в нужном порядке; (iv) начальные условия T^- и T^+ по разные стороны имеют разные операционные классы. Затем требуется численная сходимость координаты границы. Следовательно, само аналитическое построение точно, но его отождествление с границей порядка событий представляет собой совместный аналитический и событийный результат.

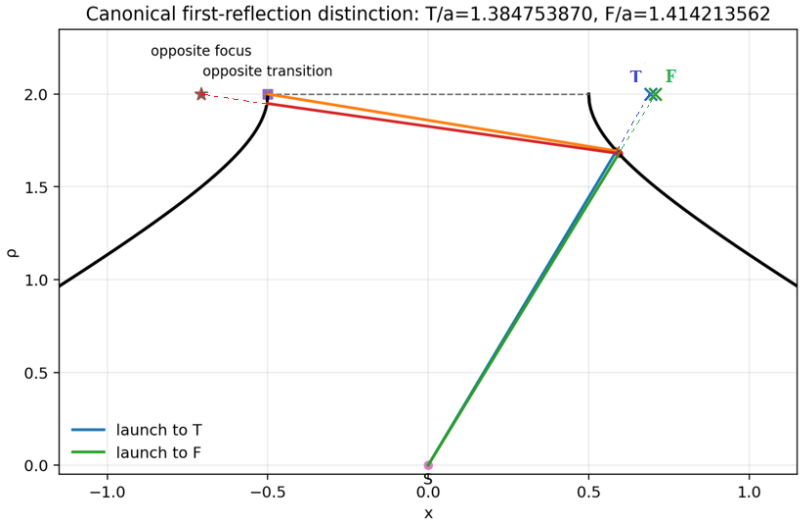

Рисунок 9. Каноническое различие первого отражения для запуска в направлении транспортного разделителя T и запуска в направлении внешнего фокального организатора F. T и F — виртуальные целевые/опорные координаты на ρ=R; физические

лучи сталкиваются со стенкой PHB раньше достижения любой из них. Их отражённые продолжения геометрически различаются.

5.1. Утверждение о существовании для центрального источника

При принятой в точном построении первого отражения конвенции центрального источника остаток стационарного уравнения имеет разные знаки на двух физических концах допустимой ветви при любых $\beta>0$ и $r=R/a>0$. Непрерывность поэтому гарантирует существование хотя бы одного физического стационарного корня. Это теорема существования стационарного луча первого отражения, а не теорема единственности полной топологии транспортных классов.

5.2. Точный эталон при β=1

При $\beta=1$ и центральном источнике физическая стационарная ветвь допускает точную параметризацию, используемую как численный эталон. При $r=R/a$ и полууглoвой координате t в точке разделяющего отражения:

$$r(1-6t^2-3t^4)=t(7+2t^2-t^4), \quad (48)$$

$$X_T=T/a=(7+2t^2-t^4)/(5+2t^2+t^4). \quad (49)$$

Исключение t приводит к выведенному неявному полиному по X_T и r. Эти формулы дают точный эталон для заданной конвенции источника и первого отражения. Их нельзя распространять на произвольные источники или произвольные транспортные ветви.

5.3. От стационарного луча к границе порядка событий

Стационарная ломаная траектория выделяется геометрически, поскольку первая вариация длины оптического пути равна нулю. Это гарантирует согласованность с зеркальным отражением в P, но не содержит полного перечня конкурирующих событий в открытой усечённой полости. Для соседних начальных состояний раньше могут возникнуть иное пересечение стенки, выход через вершину или пересечение центральной поверхности выхода. Поэтому корень уравнения Ферма становится границей транспортных классов только после установления порядка событий.

Для простой границы решающий локальный критерий — двусторонняя проба: начальное условие по одну сторону T должно принадлежать PASS, а по другую — RETURN при одинаковых определениях событий и однозначном выборе наиболее раннего допустимого пересечения. Координата границы также должна сходиться при уточнении. Если по обе стороны одного стационарного корня класс не меняется, это стационарная траектория, но не граница переноса по порядку событий.

Такое разграничение объясняет, почему точное уравнение стационарности и вычислительный атлас транспорта не противоречат друг другу. Первое представляет аналитическое геометрическое построение, второй классифицирует полные последовательности событий за конечное время на выбранных сечениях начальных условий.

6. Карта переноса по порядку событий на заданном стартовом сечении

Зафиксируем все параметры μ, кроме ориентированной координаты запуска ξ. Полная карта обозначается $E(\xi;\mu)$; бинарная карта B является её ограничением на $D_bin(\mu)$, где B=0 для PASS и B=1 для RETURN. Пусть простые границы изменения класса PASS/RETURN в связной бинарной подобласти упорядочены как $T_1<T_2<\ldots<T_\{N_T\}$, с ориентациями $\omega_i\in\{+1,-1\}$.

$$\mathcal{T}_sec(\mu)=\{(T_i,\omega_i): i=1,...,N_T\}. \quad (50)$$

Для произвольной опорной координаты ξ_0 правильная формула восстановления в обоих направлениях имеет вид

$$B(\xi)=B(\xi_0)+\Sigma_i\, \omega_i[H(\xi-T_i)-H(\xi_0-T_i)], \quad (51)$$

где H — функция Хевисайда, а сумма охватывает только простые границы внутри той же связной бинарной подобласти, что и ξ_0. Формула не применяется через конечный интервал TIP_EXIT, поскольку там B не определена.

Фокальную координату исходной коники F оценивают в рамках этой карты:

$$B_F(\mu)=B(F;\mu). \quad (52)$$

Таким образом, фокус отвечает на геометрический вопрос о конике, а T_i — на вопрос классификации порядка событий. T_i не является оптическим фокусом, неоднородностью материала, положением детектора или элементом стенки. При нескольких границах недостаточно знака F−T для одной выбранной границы: необходимо полное упорядоченное множество с ориентациями.

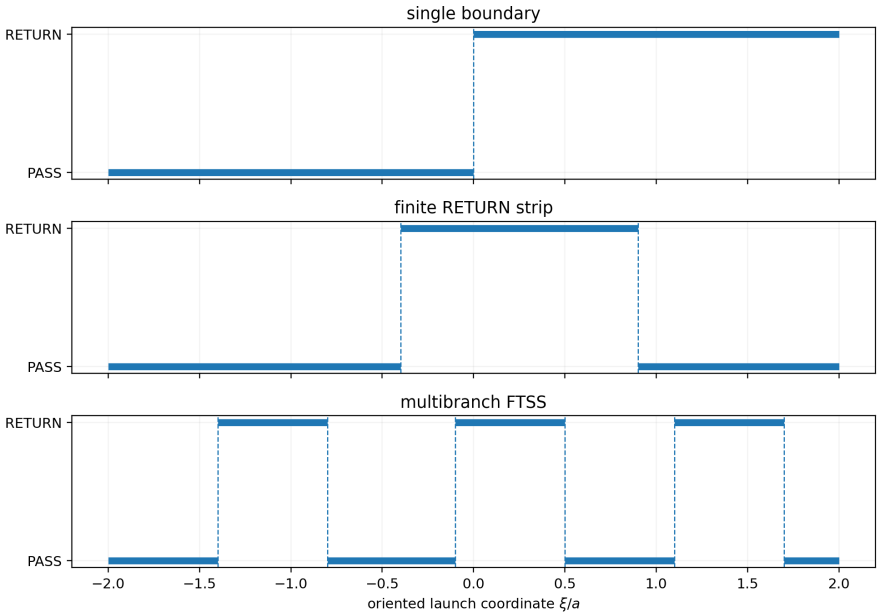

Рисунок 10. Канонические карты PASS/RETURN на заданном сечении. Обозначения соответствуют классам порядка событий. Не утверждается, что граница является глобально инвариантным многообразием полного фазового пространства бильярда.

6.1. Канонический порядок при единственной границе: T<F

В каноническом сечении с единственной границей положительной ориентации, рассматриваемом в статье, порядок имеет вид PASS | T | RETURN, а положительная фокальная координата находится правее T. Следовательно,

$$\xi<T \Rightarrow \text{PASS}, \quad T<\xi<F \Rightarrow \text{RETURN}, \quad \xi=F \Rightarrow \text{RETURN по порядку событий (точное фокальное состояние).} \quad (53)$$

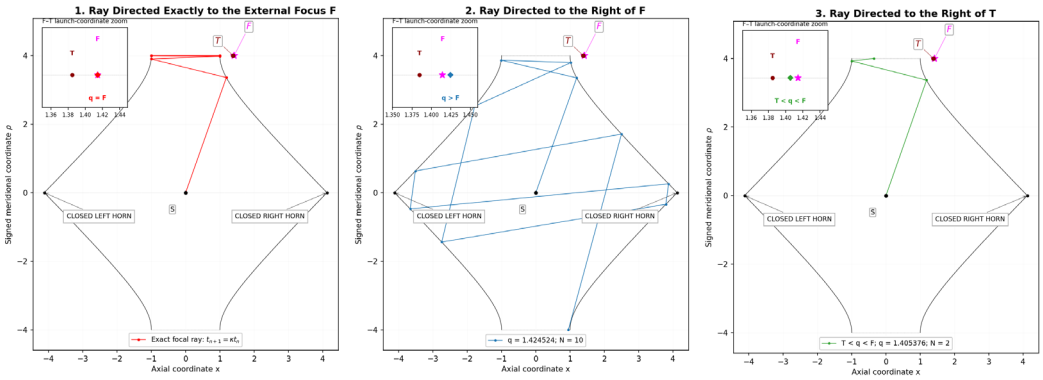

Рисунок 11. Каноническая лучевая динамика относительно транспортной границы T и внешнего фокального организатора F. Показаны три меридиональных запуска для идеального РНВ-2 с замкнутыми рупорами. Слева — точный фокально-согласованный запуск q=F, следующая унаследованная фокально-сопряжённая последовательность которого асимптотически приближается к внутреннему отрезку фокальной прямой. В центре — запуск правее F, где точное фокальное согласование нарушено, хотя многократные отражения могут сохраняться. Справа — запуск при T<q<F, расположенный с фокальной стороны границы порядка событий, но отличный от точного фокального состояния. На врезке каждой панели показано соотношение координат запуска T, F и выбранного q. Метки T и F относятся к виртуальным стартовым/опорным координатам на ρ=R, не являются элементами отражающей стенки и физически не пересекаются соответствующими лучами.

Поэтому фокальный запуск — особая траектория внутри бассейна RETURN по порядку событий, а не второй транспортный порог. Однако на уровне времени жизни идеально фокально-согласованная орбита исключительна: её унаследованная последовательность не имеет конечного центрального выхода. При $\xi \to F$ начальное состояние приближается к точному фокальному запуску; при этом не следует никакой монотонности концентрации, пребывания либо конечноволновой наблюдаемой величины. Пересечение F необязательно меняет класс порядка событий. Более дальний уход за F может сохранять RETURN при потере точного фокального согласования. Это устраняет интуитивную, но неверную картину, в которой T и F являлись бы двумя последовательными переключателями классов.

6.2. Фокально-транспортная инверсия

Для продолженной транспортной ветви определим множество совпадений:

$$\Sigma_FT,i=\{\mu:T_i(\mu)=F\}. \quad (54)$$

При пересечении Σ_FT,i изменяется порядок фиксированной фокальной координаты и границы транспортного класса. Это называется фокально-транспортной инверсией (FTI). Само определение показывает, почему прежняя запись $F \neq T$ логически некорректна: равенство координат как раз допускается в точке инверсии. Правильное утверждение — структурная неэквивалентность:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} \not\equiv \boldsymbol{\mathcal{T}}_\mathrm{sec}(\mu), \quad (55)$$

с явным уточнением: отдельные или зависящие от параметров совпадения координат допустимы.

6.3. Критические направления и локальный спектр транспорта

Для осевого источника $S=(x_s,0,0)$ транспортная координата на сечении $\rho=R$ соответствует полярному направлению запуска

$$\theta_i=\operatorname{atan2}(R,T_i-x_s),\quad \theta_F=\operatorname{atan2}(R,c-x_s). \quad (56)$$

Для внеосевого источника продолженное критическое множество можно представить как $Q_i(\varphi)=(T_i(\varphi),R\cos\varphi,R\sin\varphi)$ и соответствующее единичное направление $d_i=[Q_i-S]/|Q_i-S|$. Это полезная связь с измерением направления по состоянию, однако утверждение остаётся геометрией пространства запусков.

Когда соседние простые границы разрешены, определим локальную ширину полосы $w_i=(T_{i+1}-T_i)/a$ и угловой интервал $\Delta\theta_i=|\theta_{i+1}-\theta_i|$. Характеристика выбранного сечения имеет вид

$$\mathcal{S}_T(\mu)=\{T_i/a,\ \omega_i,\ w_i,\ \Delta\theta_i\}. \quad (57)$$

Узкие полосы могут обеспечивать высокую направленную чувствительность, но более уязвимы к конечной длине волны, протяжённости источника, допускам изготовления, шуму и численному алиасингу. Лучевая транспортная модель не определяет инженерный оптимум.

6.4. Фиксированное число фокальных организаторов и переменное число транспортных границ

Идеальная геометрия PHB имеет ровно два внешних фокальных кольца, $N_F=2$, при любых допустимых a,b,R. Здесь N_F — число связных фокальных организаторов, а не математическая мощность множества точек на окружности. Для границ порядка событий на сечении аналогичного фиксированного числа нет: разрешённое N_T может быть нулевым, равным одному, двум и более — в зависимости от геометрии, состояния источника, косости и интервала запуска.

Это различие не сводится к терминологии. $F_\pm$ — геометрические данные построенной границы, сохраняющиеся даже при отсутствии запуска, направленного к ним. T_i — свойства отображения начальных условий в порядок событий. Поэтому одна и та же полость PHB может иметь два фиксированных фокальных кольца, тогда как разные стартовые сечения демонстрируют разное число и ориентации транспортных границ.

При осесимметричной меридиональной визуализации транспортную координату на $\rho=R$ можно вращением превратить в условное кольцо — это графически удобно. Но в общей внеосевой или косой трёхмерной задаче математически инвариантным объектом служит критическое множество в пространстве запусков либо фазовом пространстве, которое не обязано быть материальным кольцом и даже глобально осесимметричным. Поэтому термин «транспортное кольцо» не следует использовать как безусловное геометрическое утверждение.

6.5. Угловой порядок T и F на каноническом сечении

Для осевого источника $\theta(q)=\operatorname{atan2}[R,q-x_s]$. На положительной ветви $d\theta/dq=-R/\{(q-x_s)^2+R^2\}<0$. Поэтому при каноническом порядке $T<F$ транспортное переключение происходит при большем полярном угле запуска, чем точное фокальное направление: $\theta_T>\theta_F$. Угловое расстояние составляет

$$\Delta\theta_{FT} = \theta_T-\theta_F = \operatorname{atan2}[R,T-x_s] - \operatorname{atan2}[R,F-x_s] > 0. \quad (58)$$

Это соотношение точно, если T определено при той же конвенции запуска, но числовое значение $\Delta\theta_{FT}$ не универсально. Оно меняется с геометрией и состоянием источника, поскольку меняется T, тогда как F определяется исходной коникой. Интервал $T<\xi<F$ поэтому является конечным интервалом RETURN, начальные состояния которого приближаются к фокальному запуску при $\xi\to F$ без доказанного монотонного усиления какой-либо волновой величины.

6.6. Совпадение координат и действительная фокально-транспортная инверсия

Для продолженной простой ветви положим g_i(μ)=T_i(μ)−F. Совпадение координат имеет место при g_i=0. Подлинная фокально-транспортная инверсия требует изменения взаимного порядка при переходе через параметр, то есть смены знака g_i. Для регулярного однопараметрического пересечения достаточным локальным условием служит dg_i/dμ≠0 в точке совпадения. Касание без смены знака является совпадением, но не инверсией. Для многоветвистой карты необходимо дополнительно отслеживать происхождение ветви, чтобы исключить ложную инверсию из-за перестановки индексов.

В карте с несколькими границами F может последовательно пересекать разные продолженные ветви T_i. Для каждой такой ветви нужна независимая проверка смены знака, ориентации, локальной сходимости и событийного происхождения. Поэтому статистика FTI в вычислительном атласе относится к явно определённым сечениям и ветвям, а не к безусловному физическому переключению на фокальном кольце.

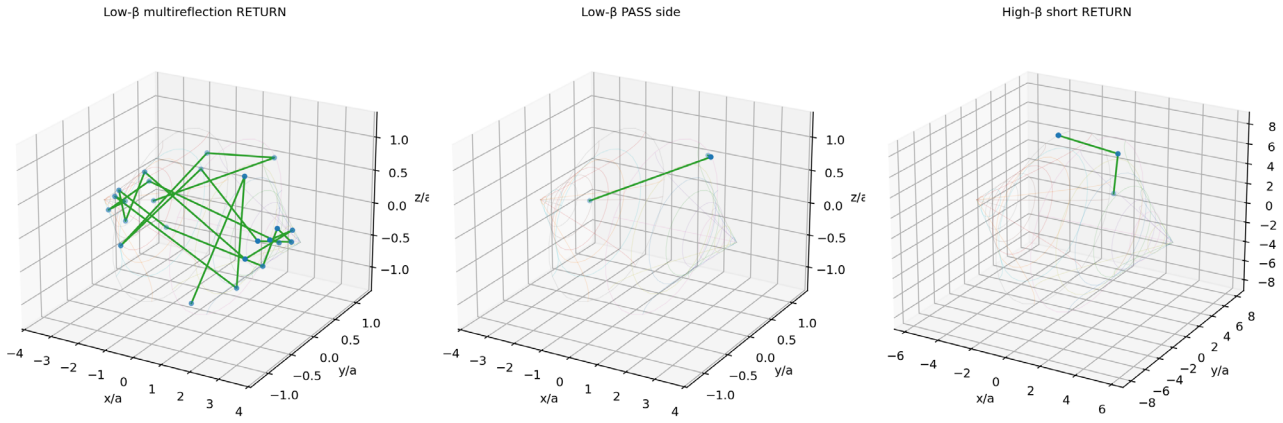

Рисунок 12. Представительные трёхмерные кусочно-прямолинейные лучевые траектории. Их направленность и классификация зависят от заданного сечения запуска и порядка событий.

7. Вычислительные следствия для конечной области и атлас режимов

Следующие утверждения являются детерминированными вычислительными результатами на явно указанных сетках. Число разрешённых границ транспортных классов зависит от геометрии, начального положения и направления источника, косости и выбора локального сечения. Оно не является фиксированным инвариантом одной лишь геометрической поверхности.

$$N_T=N_T(\beta,R/a,x_s,\rho_s/R,\varphi,\text{branch; local section}). \quad (59)$$

Принятый широкий адаптивный корпус содержит 33 216 сечений; из них 32 729 локально разрешены, а 487 требуют дальнейшей проверки. Различие между общим числом сечений в разных сводках обусловлено отдельными подвыборками и должно оцениваться по объявленному знаменателю каждого результата.

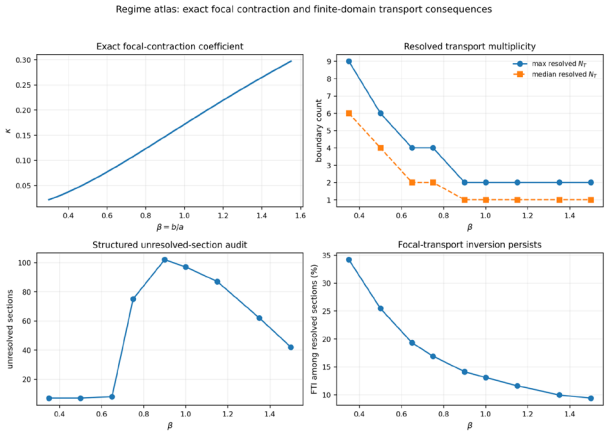

Рисунок 13. Атлас режимов на основе расчётных данных: точный фокальный закон отделён от вычислительных классов переноса для конечной области.

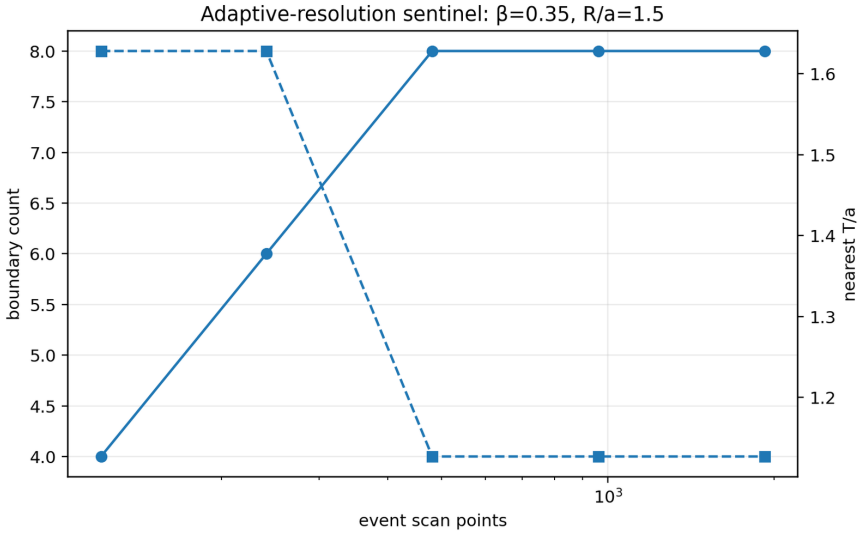

Рисунок 14. Адаптивный контроль разрешения для узкого многоветвистого сечения; переходы уточняются локально.

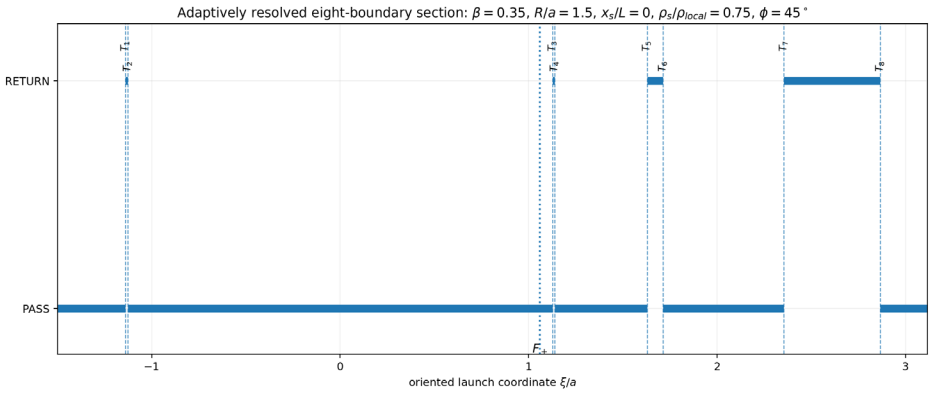

Рисунок 15. Разрешённое сечение с восемью границами, демонстрирующее чередование интервалов PASS и RETURN.

7.1. Аудит разрешения и неразрешённые сечения

Таблица 2. Аудит адаптивного разрешения по отношению формы β.

β	Разрешено / всего	Не разрешено	Доля неразрешённых	Макс. локальное N_T
0.35	3,689 / 3,696	7	0.189%	9
0.50	3,689 / 3,696	7	0.189%	6
0.65	3,688 / 3,696	8	0.216%	4
0.75	3,621 / 3,696	75	2.029%	4
0.90	3,594 / 3,696	102	2.760%	2
1.00	3,551 / 3,648	97	2.659%	2
1.15	3,609 / 3,696	87	2.354%	2
1.35	3,634 / 3,696	62	1.677%	2
1.50	3,654 / 3,696	42	1.136%	2

Доля неразрешённых случаев имеет структуру по β и максимальна в промежуточной части исследованного диапазона. Следовательно, пропуски не являются случайной выборкой.

Все приведённые ниже числа ветвей и доли FTI рассчитываются относительно числа разрешённых случаев при соответствующем β. Это ограничение должно сохраняться при сравнении параметрических режимов.

Таблица 3. Число разрешённых локальных транспортных границ и доля FTI в зависимости от β.

β	Макс. N_T	Медианное N_T	Число дополнительных границ высших порядков	Доля FTI среди разрешённых
0.35	9	6	6,731	34.18%
0.50	6	4	2,430	25.45%
0.65	4	2	288	19.31%
0.75	4	2	23	16.90%
0.90	2	1	0	14.13%
1.00	2	1	0	13.09%
1.15	2	1	0	11.61%
1.35	2	1	0	9.96%
1.50	2	1	0	9.39%

В пределах исследованной сетки малые β характеризуются богатой ветвистой структурой. При $\beta \geq 0.90$ на проверенных сечениях не разрешены локальные границы более высокого порядка сверх указанного двухграничного максимума, а медианное разрешённое число границ равно единице. Поскольку 487 сечений остались неразрешёнными и их распределение

по β структурировано, это утверждение относится к конечной сетке и не доказывает универсального критического β.

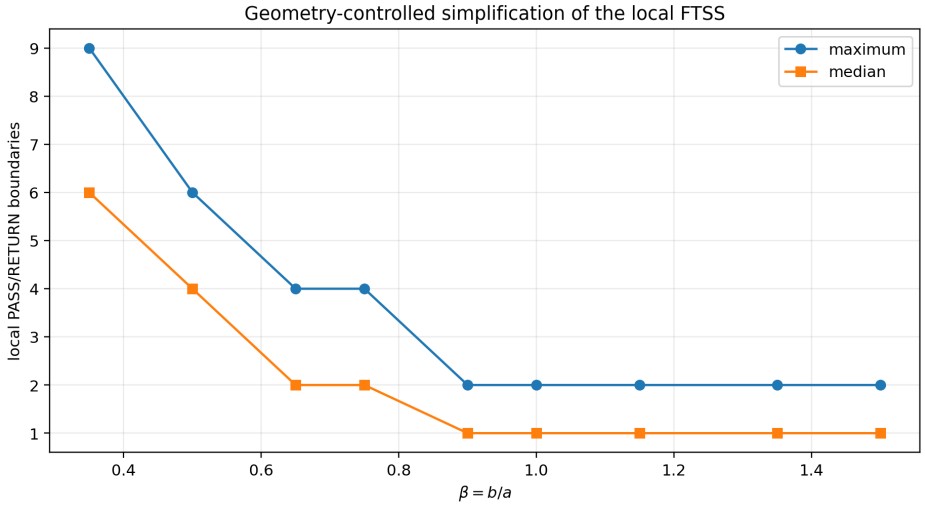

Рисунок 16. Наблюдаемое на выборке упрощение локальной структуры границ порядка событий с ростом β. Переходный диапазон характеризует заданную сетку, а не универсальное критическое значение β.

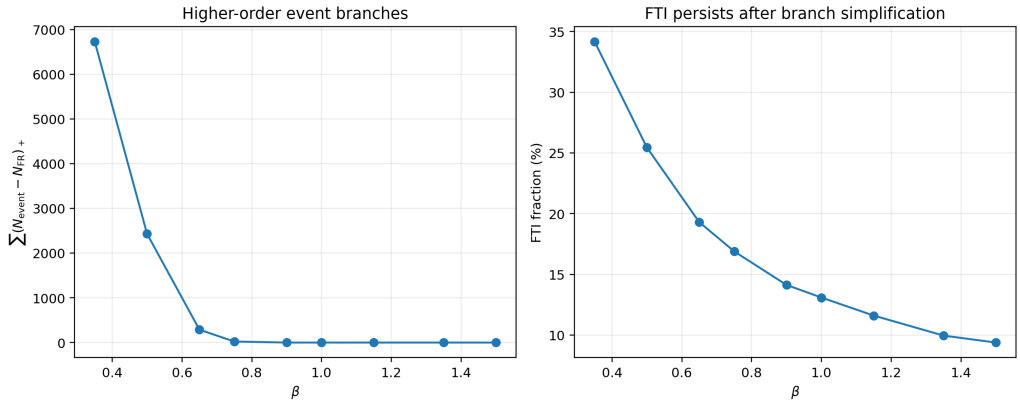

Рисунок 17. Число ветвей более высокого порядка и фокально-транспортная инверсия. Сохранение FTI после упрощения локальной ветвистой структуры подтверждает неэквивалентность фиксированного фокального организатора и границы порядка событий.

7.2. Выборочная проверка через первое отражение

В исследованной области больших β для 23 800 локально разрешённых границ порядка событий получено соответствие с предсказаниями по первому отражению. Ориентации совпали во всех согласованных случаях, максимальное расхождение координат имело порядок 10^−6a. Это убедительное вычислительное свидетельство того, что локальная транспортная структура выбранных сечений при больших β описывается главным образом первым отражением. Однако оно не является универсальной аналитической теоремой для всех источников и ветвей.

7.3. Конечные полосы RETURN

Таблица 4. Выборочное продолжение конечной полосы RETURN.

β	T_1/a	T_2/a	Ширина RETURN / a
1.350	1.818794	4.056985	2.238191
1.400	1.883688	3.922920	2.039231
1.425	1.919362	3.849261	1.929899
1.450	1.957807	3.770446	1.812639
1.475	1.999703	3.685720	1.686016
1.500	2.046020	3.594052	1.548032

Эти сечения имеют топологию PASS | T_1 | RETURN | T_2 | PASS с противоположными ориентациями границ. Уменьшение ширины при исследованном продолжении характеризует конечное, зависящее от геометрии окно приёма, но не доказывает глобального исчезновения множества RETURN.

7.4. Что устанавливает многоветвистый атлас и чего он не устанавливает

В этом подразделе применяются, а не переопределяются три организующих объекта, введённые ранее: фиксированный фокальный организатор F, упорядоченные границы транспорта на сечении {T_i} и семейство множеств времени пребывания H_m. Локальный закон зеркального отражения остаётся классическим; специфическое содержание PHB — организация порядка событий в глобальной геометрии. Фокальная геометрия задаёт F, границы T_i разбивают выбранное сечение на транспортные бассейны, а H_m характеризуют структуру длительностей пребывания. Эти объекты необходимо логически различать даже при близости их координат.

$$\mathbf{F \not\equiv T_i}, \qquad \mathbf{T_i \not\equiv H_m}. \qquad (60)$$

Многоветвистый атлас показывает, что одна скалярная разность F−T не может описать полную транспортную классификацию при наличии нескольких переходов порядка событий. Существенным объектом на сечении является упорядоченное и ориентированное множество границ:

$$\mathcal{T}_{\mathrm{sec}} = \{(T_i, \omega_i)\}_{i=1}^{NT}. \qquad (61)$$

Чередование интервалов PASS и RETURN — свойство определённой карты событий на сечении. Оно не характеризует число фокальных точек и само по себе не определяет число глобально продолженных инвариантных многообразий полного бильярда. Аналогично большое число отражений внутри интервала RETURN не создаёт дополнительной границы T.

Локальные границы более высоких порядков могут порождаться последовательностями поздних возвратов, а не основным построением первого отражения. Естественная динамическая гипотеза состоит в том, что некоторые границы являются прообразами основных границ при отображении возврата, однако происхождение ветвей и глобальное продолжение не доказаны. Поэтому вычислительный атлас следует читать как воспроизводимый перечень топологий на конечной области, а не как полную символическую динамику PHB.

Пример адаптивной карты с четырьмя границами и замкнутыми рупорами

Адаптивный корпус с замкнутыми рупорами содержит разрешённое сечение с четырьмя границами при a=0.5, b=0.25, R=0.6, источнике (x,ρ)=(−0.455,0.27), φ=75° и ветви +1. Четыре сходящиеся границы порядка событий находятся при:

$T_1/a = 1.130679739988$, $T_2/a = 1.465012822028$, $T_3/a = 2.579862309968$, $T_4/a = 3.605766230301$.

Их ориентации соответственно PASS→RETURN, RETURN→PASS, PASS→RETURN и RETURN→PASS. Итоговая топология:

PASS | T_1 | RETURN | T_2 | PASS | T_3 | RETURN | T_4 | PASS.

Этот случай важен тем, что обе вершины рупоров закрыты и TIP_EXIT отсутствует. Следовательно, многоветвистая структура порядка событий не является артефактом конечного отверстия вершины. Фокальная координата F показана отдельно и не должна отождествляться ни с одной из четырёх транспортных границ.

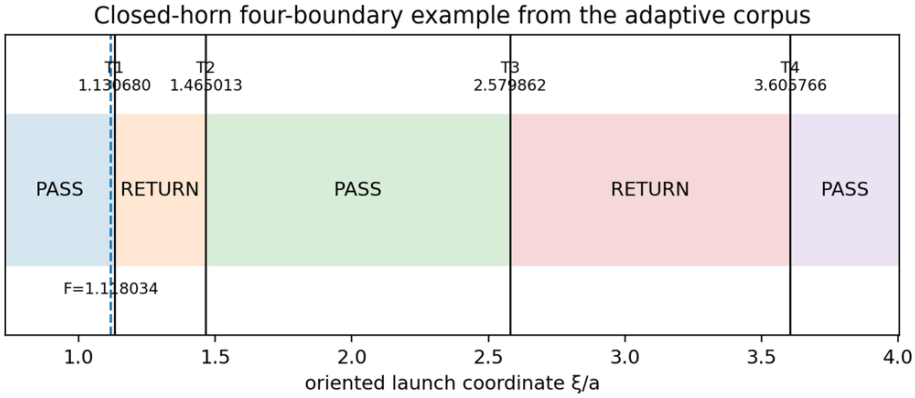

Рисунок 18. Четырёхграничная топология порядка событий в полости с замкнутыми рупорами непосредственно из адаптивного корпуса. Заданное сечение имеет последовательность PASS | T_1 | RETURN | T_2 | PASS | T_3 | RETURN | T_4 | PASS. Фокальная координата F дана отдельно. В этом примере обе вершины закрыты; отверстие и класс TIP_EXIT отсутствуют.

Центральная меридиональная двумерная реализация всех пяти транспортных интервалов

Для визуализации историй лучей без проекции косых трёхмерных траекторий отдельно пересчитано центральное меридиональное сечение РНВ-2 с закрытыми рупорами при a=1, b=0.3, R=1.2 и S=(0,0). Направление запуска параметризовано виртуальной целевой координатой q на опорной прямой ρ=R. Оба рупора заканчиваются при ρ=0; единственным терминальным событием выхода является пересечение центрального открытого отрезка ρ=R, |x|<a. Конечного отверстия в вершине и события TIP_EXIT нет.

Пересчитанные границы порядка событий:

$T_1/a = 1.044000239862$, $T_2/a = 1.155312752694$, $T_3/a = 1.474904499724$, $T_4/a = 1.594096264034$.

Фиксированная внешняя фокальная координата:

$$F/a = \sqrt{[1 + (b/a)^2]} = 1.044030650891, \quad (62)$$

и, следовательно,

$$T_1 < F < T_2 < T_3 < T_4, \quad (63)$$

$$(F - T_1)/a = 3.04110 \times 10^{-5}. \quad (64)$$

Таким образом, F находится чрезвычайно близко к первой транспортной границе, но не совпадает с ней. Такая близость характеризует конкретную геометрию и не означает тождественности фокальной и транспортной структур. Пять интервалов конечного выхода сохраняют топологию

PASS | T_1 | RETURN | T_2 | PASS | T_3 | RETURN | T_4 | PASS.

На рисунке 19 представлены по одному лучу из каждого конечного транспортного интервала вместе с точным фокальным состоянием. Для каждого PASS-интервала представитель — траектория с минимальным числом отражений от стенки перед центральным выходом среди исследованных. Для каждого RETURN-интервала показана конечная траектория с максимальным числом отражений, найденным адаптивным поиском до выхода. Эти числа характеризуют выборочную структуру пребывания, а не доказанные непрерывные экстремумы, и не задают дополнительных транспортных границ.

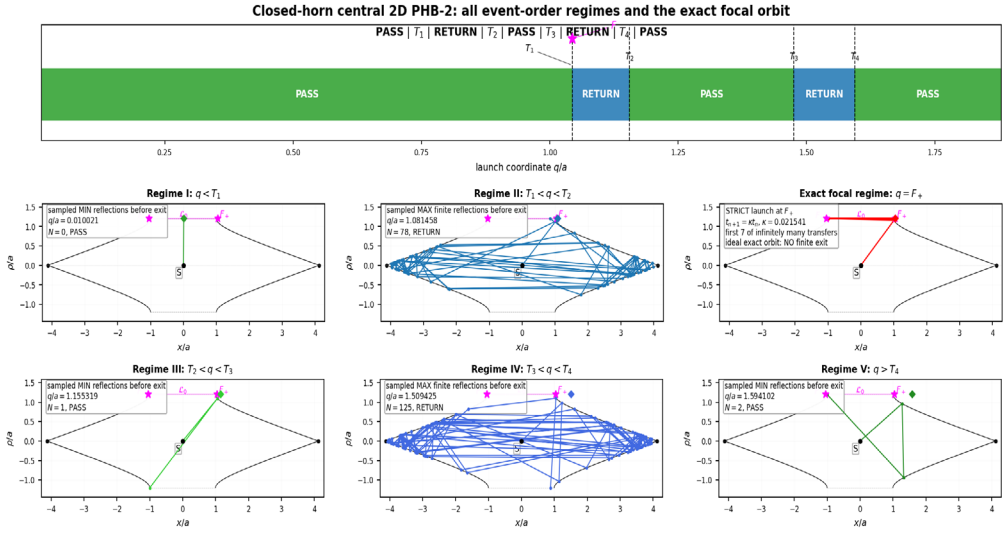

Рисунок 19. Двумерное распространение лучей во всех четырёхграничных транспортных режимах и точное фокальное состояние в PHB-2 с замкнутыми рупорами. Верхняя полоса показывает пересчитанный порядок PASS | T_1 | RETURN | T_2 | PASS | T_3 | RETURN | T_4 | PASS при a=1, b=0.3, R=1.2 вместе с фиксированной координатой F. Нижние панели содержат представителей трёх PASS-интервалов с минимальным числом отражений, двух RETURN-интервалов с максимальным конечным числом отражений по выборке и точно согласованный запуск q=F. Фокальная панель получена по точному рекуррентному соотношению t_{n+1}=кt_n, а не путём завершения обычной численной траектории. Показаны лишь первые семь переносов её асимптотически невыходящей последовательности. Пурпурный отрезок L_0 — внутреннее фокальное множество, к которому сходится траектория между рупорами. Конечные числа отражений носят описательный характер.

Таблица 5. Представительные лучевые состояния в четырёхграничной карте: выборочные конечные экстремумы пребывания и точное фокальное состояние.

Панель	Состояние	Интервал запуска	Показанное q/a	Показанное N_b
Режим I	PASS	$q/a < T_1$	0.010021	0
Режим II	RETURN	$T_1 < q/a < T_2$	1.081458	78
Точное F	RETURN (точное фокальное)	$q = F$	1.044030650891	Нет конечного выхода в идеальной модели
Режим III	PASS	$T_2 < q/a < T_3$	1.155319	1

Режим IV	RETURN	$T_3 < q/a < T_4$	1.509425	123
Режим V	PASS	$q/a > T_4$	1.594102	2

Два изображённых представителя RETURN испытывают соответственно 78 и 123 отражения перед конечным центральным выходом.

Точное фокальное состояние и его связь с бассейном RETURN

Точный фокальный запуск требует отдельного рассмотрения. Это не обычная траектория класса RETURN с большим временем пребывания. В меридиональном фокально-сопряжённом семействе точное рекуррентное соотношение имеет вид

$$t_{n+1} = \kappa\, t_n, \qquad (65)$$

$$\kappa = [\sqrt{(1 + (b/a)^2)} - 1] / [\sqrt{(1 + (b/a)^2)} + 1]. \qquad (66)$$

При b/a=0.3 получаем

$$\boldsymbol{\kappa = 0.021541091310.} \qquad (67)$$

Физические точки отражения удовлетворяют

$$|x_n| = a(1 + t_n^2)/(1 - t_n^2), \qquad (68)$$

$$\rho_n = R - 2bt_n/(1 - t_n^2), \qquad (69)$$

при последовательном чередовании ударов о противоположные рупоры. Поскольку 0<κ<1, t_n=κ^n t_0 стремится к нулю. Точки отражения поэтому приближаются к переходным координатам (±a,R), а полные отрезки перелёта между рупорами сходятся к внутреннему отрезку фокальной прямой

$$\boldsymbol{\mathcal{L}_0 = \{(x,\rho): |x| \le a,\ \rho = R\}.} \qquad (70)$$

Внешние точки F_− и F_+ организуют последовательность отражений, но луч физически их не пересекает. При каждом конечном унаследованном переносе |x_n|>a и ρ_n<R. Следовательно, точная фокальная последовательность не пересекает центральную поверхность выхода за конечное число шагов. Идеальная точно фокально-согласованная орбита асимптотически невыходящая; рисунок 19 показывает только первые семь переносов бесконечной точной последовательности.

Это уточняет интерпретацию полосы порядка событий. Координатно F лежит в интервале T_1<q<T_2, соседние обычные запуски с конечным выходом в котором принадлежат бассейну RETURN. Однако точно настроенное состояние q=F исключительно: оно следует точному фокальному рекуррентному закону и не имеет конечного терминального выхода в идеальной модели. Поэтому метка F указывает положение организатора относительно T_i, а не приписывает точной фокальной орбите конечное время жизни RETURN.

Транспортный класс и конечное время пребывания

Согласно таблице 5, представителям PASS из трёх интервалов требуется 0, 1 и 2 отражения до выхода. Два представителя RETURN проходят соответственно 78 и 123 отражения перед выходом. Это демонстрирует неэквивалентность класса порядка событий и времени пребывания: RETURN допускает широкую немонотонную картину длительности, тогда как PASS может реализоваться очень короткой траекторией. Точная фокальная орбита образует третий, аналитически выделенный случай.

Таким образом, многоветвистый результат подтверждает понятийную иерархию закона:

$$\text{Фокальная геометрия} \rightarrow F \text{ и } \kappa, \qquad (71)$$

$$\text{Критичность транспорта} \to \{(T_i,\omega_i)\}, \quad (72)$$

$$\text{Конечная структура времени пребывания} \to H_m \text{ или } N_b. \quad (73)$$

Эти структуры отвечают на различные динамические вопросы и могут совпадать координатно только при независимом подтверждении совпадения. Надёжный результат — четырёхграничная топология; максимумы числа отражений по конечной сетке на рисунке 19 служат описательными выборочными экстремумами пребывания и не должны пониматься как сингулярные расходимости времени жизни или дополнительные T_i. Различие структурное, а не просто численное: фокальная организация, транспортная критичность по порядку событий и конечная структура времени пребывания — отдельные уровни закона.

$$\mathbf{F \not\equiv T_i}, \qquad \mathbf{T_i \not\equiv H_m}. \quad (74)$$

7.5. Следствие аудита неразрешённых сечений

Поскольку 487 неразрешённых сечений структурированы по β, их нельзя считать случайно отсутствующими данными. Во-первых, указанные максимумы числа ветвей являются нижними оценками возможной истинной множественности: неразрешённые сечения могут содержать дополнительные узкие ветви. Во-вторых, доли FTI условны по числу разрешённых случаев для каждого β и не должны экстраполироваться на непрерывную меру всех начальных состояний.

В будущем полном аудите следует сохранять идентификаторы каждого сечения и повторно рассчитывать неразрешённое множество с адаптивным поиском именно переходов порядка событий, а не только равномерным повышением разрешения. Цель не просто увеличить долю разрешённых случаев, а выяснить, меняют ли неразрешённые сечения установленную топологию либо отражают близость уже известных границ в численной модели.

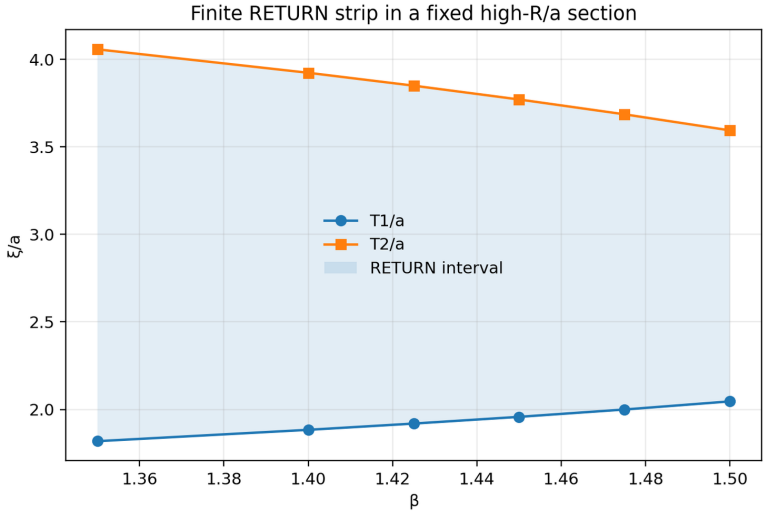

Рисунок 20. Конечная полоса RETURN на фиксированном стартовом сечении с большим R/a. Две разрешённые границы T_1 и T_2 смещаются при изменении β, а заключённый между ними интервал RETURN сужается на выборочном продолжении. Это вычислительный результат конечной области, а не теорема о глобальном исчезновении.

8. Отклонение от точного меридионального сектора при конечном J_x

Теорема точного сжатия относится к сектору J_x=0. При малом безразмерном параметре косости j=J_x/a замена j→−j меняет направление закрутки косой траектории, но оставляет неизменным правильно выбранный скалярный показатель первого фокального остатка.

Поэтому такой остаток является чётной функцией j, пока сохраняется та же последовательность событий.

Одной чётности недостаточно для доказательства главного члена порядка j^2: чётная функция $|j|$ не дифференцируема в нуле. Поэтому используемое здесь квадратичное разложение условно и требует локальной гладкости. Если скалярный остаток ε_F^(1)(j;μ) как минимум четырежды непрерывно дифференцируем в окрестности j=0, имеет ε_F^(1)(0)=0 и сохраняет происхождение событий, то

$$\varepsilon_F^{(1)}/a = C_2(\mu)\, j^2 + O(j^4). \qquad (75)$$

Численный корпус согласованных пар поддерживает этот условный прогноз: суммарный показатель степени составляет p=2.000655, эмпирический диапазон 10-го–90-го процентилей — 1.992964–2.020020 по 4656 детерминированным согласованным парам. Это агрегированное значение свидетельствует о почти квадратичном поведении на проверенных сечениях, а не о всеобщем теоретическом показателе степени.

При указанных предположениях гладкости и неизменного происхождения событий чётный скалярный остаток допускает разложение Тейлора $\varepsilon(j)=\varepsilon(0)+(1/2)\varepsilon''(0)j^2+(1/24)\varepsilon^{(4)}(0)j^4+\dots$. Так как ε(0)=0 для точного меридионального фокального состояния, общий главный коэффициент $C_2(\mu)=\varepsilon''(0)/(2a)$.

Необходимо явно учитывать два исключения. Если в особом состоянии C_2(μ)=0, первым ненулевым гладким членом может быть четвёртая или более высокая степень. Если происхождение событий меняется сколь угодно близко к j=0, скалярная диагностика может потерять дифференцируемость и допускает чётную, но неаналитическую зависимость. Поэтому квадратичный закон нельзя распространять на все начальные состояния без проверки условий.

Физическая интерпретация соответственно локальна: малый осевой момент импульса слабо возмущает точный фокальный каркас в смысле скалярной меры фокальной ошибки, однако коэффициент C_2 не универсален и сам по себе не определяет чувствительность транспорта, пребывания либо волнового отклика.

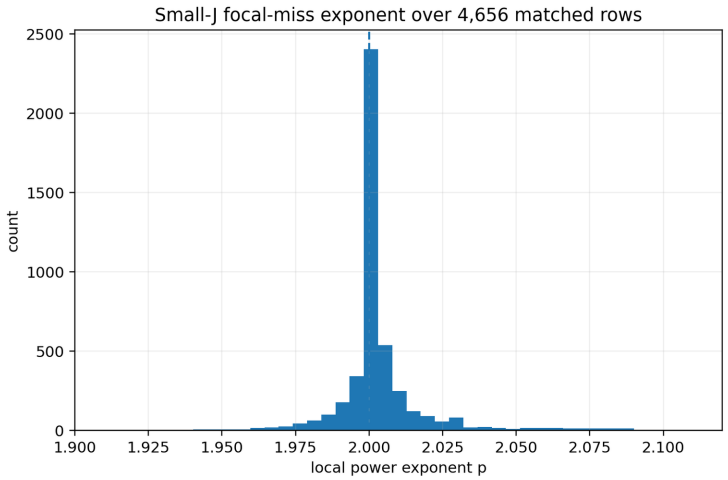

Рисунок 21. Распределение локального степенного показателя фокального промаха при малом J по 4656 согласованным детерминированным строкам. Сосредоточение около p=2 подтверждает общую чётную квадратичную интерпретацию при локальной гладкости и неизменном происхождении событий; это не статистическое доказательство универсального показателя.

9. Уровень времени пребывания: RETURN не означает длительного удержания

Класс транспорта по порядку событий и уровень времени пребывания необходимо различать. Луч класса RETURN достиг противоположного рупора до центрального выхода; впоследствии он может покинуть полость уже после нескольких отражений. Определим множество пребывания $\mathcal{H}_m$ посредством явно указанного порога по числу отражений, длине траектории или времени полёта.

Структурное соотношение поэтому имеет вид

$$\mathcal{F} \not\equiv \mathcal{T}_{sec}(\mu), \quad \mathcal{T}_{sec}(\mu) \not\equiv \mathcal{H}_m, \quad (76)$$

где символ $\not\equiv$ обозначает нетождественность организующих структур. Уравнение (61) явно допускает T_i=F при пересечении FTI и отдельные пересечения транспортных множеств с множествами пребывания.

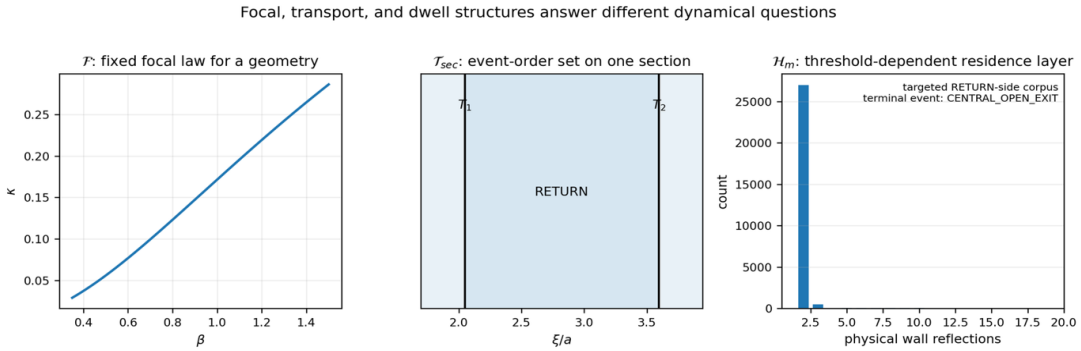

Рисунок 22. Разделение фокальной, транспортной и временной структур на основе расчётных данных. Фокальный уровень определяется точным законом к(β), транспортный — границами порядка событий на заданном стартовом сечении, а уровень пребывания зависит от выбранного порога и не тождественен двум первым.

9.1. Детерминированные доли сетки, а не вероятности

Таблица 6. Детерминированная статистика сетки времени пребывания для исследованного продолжения при больших β.

β	Среднее N_b	Макс. N_b	f_grid(N_b>5)	f_grid(N_b>20)	Макс. путь / a
1.350	7.984	109	40.774%	10.516%	1177.2
1.400	6.097	85	28.075%	5.655%	903.8
1.425	5.653	108	25.099%	4.960%	839.0
1.450	3.733	67	11.409%	2.579%	616.8
1.475	2.202	19	0.099%	0	111.5
1.500	2.021	3	0	0	17.4

Величины f_grid обозначают детерминированные доли объявленной сетки стартовых состояний. Они не являются вероятностями выборки и не снабжаются статистическими доверительными интервалами, пока явно не введена вероятностная мера на начальных

состояниях. Таблица показывает существенное различие между долями геометрических классов и пороговых групп времени пребывания.

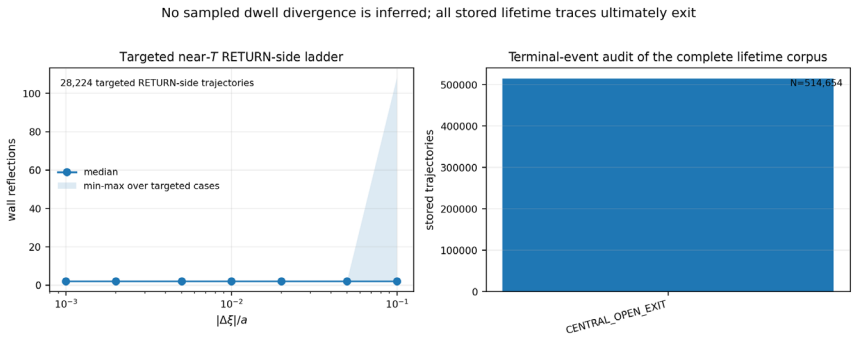

Рисунок 23. Прямой аудит времени жизни. Слева: целевая последовательность запусков со стороны RETURN вблизи T показывает конечное число отражений на проверенном диапазоне смещений. Справа: все 514 654 сохранённые траектории корпуса времени жизни завершаются событием CENTRAL_OPEN_EXIT. Это подтверждает конечный исход расчётного корпуса, но не доказывает глобальную теорему выхода для всех состояний.

9.2. В проверенной выборке расходимость времени пребывания у T не выявлена

Целевая последовательность из 24 192 траекторий со стороны RETURN была рассчитана при нормированных смещениях 0<|Δξ|/a≤0.05; минимальное проверенное смещение имеет порядок 10^−3a. Все эти траектории в указанном тесте совершили по два отражения. Поэтому на исследованном разрешении нет свидетельств расходимости числа отражений при приближении к T.

Этот результат не устанавливает lim_(ξ→T+)τ(ξ)<∞. Структуры мельче минимального исследованного смещения не исключены. Следовательно, теорема о конечном времени жизни непосредственно на транспортной границе не заявляется.

9.3. Выход траекторий в выборочном ансамбле и невыходящие множества

Конечный корпус времени жизни не заменяет отдельно аналитически рассмотренную точную орбиту F из раздела 4.7. Точно фокально-согласованное состояние является настроенным состоянием меньшей размерности, выделенным из корпуса конечных времён жизни; в идеальной модели оно не имеет конечного события центрального выхода. Утверждение «все сохранённые траектории выходят» относится только к выборке и не исключает эту точную исключительную орбиту или другие неразрешённые невыходящие множества.

9.4. Почему транспортная граница не обязана быть сингулярностью времени пребывания

Граница T_i определяется порядком первого центрального выхода и первого достижения противоположного рупора. Время пребывания, напротив, зависит от всей последующей последовательности столкновений. Поэтому нет математической необходимости, чтобы смена порядка этих двух событий сопровождалась расходимостью времени жизни, ростом числа отражений или локальным максимумом плотности энергии.

Именно поэтому целевая последовательность вблизи T может оставаться короткоживущей, несмотря на резкую классификационную границу, а длинные RETURN-траектории могут встречаться в других областях стартового пространства. На языке динамических систем граница порядка событий не является автоматически устойчивым многообразием захваченного множества.

Для приложений такое разделение потенциально полезно: маршрутизация и задержка принципиально разные цели проектирования. Можно искать устойчивый переключатель транспорта с малым временем пребывания или длинный путь взаимодействия, не совпадающий с транспортным порогом. Однако техническая реализуемость этих сценариев требует отдельной волновой и экспериментальной проверки.

10. Закон подобия

Идеальные лучевые уравнения однородны при общем масштабировании длин:

$$(a,b,R,S,q) \to \lambda(a,b,R,S,q), \quad \lambda>0. \quad (77)$$

Безразмерная геометрия и координаты запуска не меняются. Следовательно, β, R/a, T_i/a, c/a, κ, порядок и ориентации границ, нормированные ширины полос, угловые интервалы, число отражений, число переходов между рупорами и числа закрутки сохраняются при масштабировании. Физическая длина пути изменяется пропорционально λ, а время полёта — пропорционально λ при фиксированной скорости.

Точный лучевой закон не содержит собственной длины волны, поэтому общий геометрический множитель λ не меняет ни одного безразмерного лучевого утверждения. При конечной длине волны в задачу входит нормированная частота или параметр размера, например ka либо a/λ_wave. Геометрическое масштабирование без соответствующего масштабирования длины волны поэтому не оставляет волновую задачу неизменной.

Это различие принципиально для последующей проверки. Точный κ не зависит от масштаба, но наблюдаемость сжатого лучевого семейства как концентрации поля может зависеть от того, остаются ли сжимающиеся пространственные ширины существенно больше длины волны и каковы граничные потери, связь с источником и условия излучения.

11. Протокол численной верификации и проверки на опровержение

Вычислительная программа предназначена для попытки опровергнуть, а не просто иллюстрировать аналитические и конечные утверждения. Соответствующие проверки представляют собой внутренние вычислительные перекрёстные проверки, но не внешнее независимое воспроизведение. Термин «независимая проверка» далее не следует понимать как подтверждение другой научной группой.

Основные проверки включают непосредственное замыкание профиля исходного рупора; независимо реализованный расчёт первого пересечения в сравнении с рабочим полиномиальным алгоритмом и фильтром ветвей; точный эталон β=1; совпадение трёхмерного трассировщика при J_x=0 с двумерным меридиональным трассировщиком; сохранение J_x; анализ ошибок угла отражения; проверку согласованности корней и событий; адаптивные двусторонние пробы транспортных границ; согласованные контрольные геометрии и исследование сеточной устойчивости конечноволновых величин.

Таблица 7. Перекрёстные проверки численной верификации и их интерпретация.

Перекрёстная проверка	Результат	Интерпретация
Геометрия замкнутого рупора	ρ(L) ≤ 8.88×10^-16 a	ПРОЙДЕНО
Первое пересечение: две реализации	max |Δt|/a ≤ 1.83×10^-12	ПРОЙДЕНО
Точный эталон β=1	max ошибка координаты ≤ 8.59×10^-8	ПРОЙДЕНО

Перекрёстная проверка	Результат	Интерпретация
Трёхмерная модель J_x=0 против двумерной меридиональной	расхождение = 0	ПРОЙДЕНО
Проверка подобия	разброс нормированного T/a = 0	ПРОЙДЕНО
Зеркальная симметрия	расхождение ≤ 6.66×10^-16	ПРОЙДЕНО
Контроль топологии при 961 и 1921 точках	согласие = 1.000; max ΔT/a = 1.987×10^-8	ПРОЙДЕНО
T из событий против отдельной проверки геометрии	max ΔT/a = 1.033×10^-6	ПРОЙДЕНО
Двусторонняя проверка классов	доля = 1.000 для принятых границ	ПРОЙДЕНО
Сохранение J_x	max дрейф ≤ 5.329×10^-15 a	ПРОЙДЕНО
Первый меридиональный фокальный переход	4656 из 4656 совпадений	ПРОЙДЕНО
Сохранение ранней точной последовательности при конечном J	0 из 32 105 сохранились	Ожидаемое отклонение
Ансамбль времени жизни	514 654 из 514 654 рассчитанных лучей выходят	Результат конечного ансамбля

Скалярная диагностика угла отражения немного превысила заранее заданный порог 10^−6 градуса в 11 из 36 761 разрешённого адаптивного сечения, достигнув примерно 1.2074×10^−6 градуса; при этом медианная ошибка составляла около 6.93×10^−14 градуса. Этот факт сохраняется как прозрачная запись нарушения строгого численного порога, а не скрывается за общей положительной оценкой верификации.

11.1. Явные критерии опровержения

Для точного фокального сжатия существует непосредственный критерий опровержения: корректно инициализированная меридиональная фокально-согласованная последовательность на идеальной ветви PHB обязана удовлетворять t_{n+1}/t_n=κ при каждом регулярном унаследованном переносе с учётом численного допуска. Систематическое, не связанное с погрешностью геометрии или события, нарушение этого соотношения опровергло бы точную формулировку.

Утверждения о переносе по порядку событий имеют иные критерии. Сообщаемая T_i должна быть отвергнута, если не проходит двусторонняя проверка классов, координата границы не сходится при уточнении, упущено более раннее допустимое событие или независимая внутренняя реализация даёт несогласованную топологию. FTI требует смены порядка при продолжении одной и той же границы, а не только близкого совпадения координат.

Конечноволновые гипотезы намеренно вынесены за пределы этих критериев. Отсутствие максимума поля при F, изменения потока около T или увеличения времени пребывания опровергло бы предложенную волновую интерпретацию, но не само точное лучевое сжатие, если выполнены геометрические предположения и закон отражения.

11.2. Модель Maxwell/FDTD, определения наблюдаемых и испытание фокально-селективного перераспределения

Конечноволновые расчёты выполнены в решателе MEEP методом конечных разностей во временной области (FDTD) в цилиндрических координатах [14] с дискретизацией Йи [15]. В осесимметричных сериях использованы dimensions=CYLINDRICAL, азимутальный индекс m=0 и сектор E_φ с соответствующими магнитными компонентами. Такие расчёты являются осесимметричным электромагнитным приближением, а не полной трёхмерной декартовой моделью произвольного источника.

Для диагностики переходного поля применяется относительный вакуумный прокси-показатель плотности энергии $u(r,z,t)=\frac{1}{2}(|E_\varphi|^2+|H_r|^2+|H_z|^2)$. Осесимметричные интегралы используют $dV=2\pi r\,dr\,dz$. Пусть U_{int},V_{int} — энергия и объём внутренней вычислительной области, а U_A,V_A — соответствующие величины целевой области A. Тогда $G_{target}=(U_A/V_A)/(U_{int}/V_{int})$ — отношение концентраций, нормированных на объём, и значение $G_{target}>1$ необходимо для утверждения об абсолютном обогащении целевой области относительно среднего по полости.

Направленный перенос оценивается через прокси-показатели потока Пойнтинга, определяемые решателем. Для центрального цилиндрического выхода радиальная компонента $S_r=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(E_\varphi H_z^*)$ интегрируется по положительной наружной части на $r=R$, $|z|<a$ с весом площади $2\pi R dz$. Перенос к противоположному рупору измеряется через плоскость $z=-a$ по соответствующей компоненте S_z, с учётом ориентации нормали. Нормированные доли возврата относятся к рассчитанным потокам и не являются вероятностями для луча.

Нормированная наблюдаемая времени пребывания после отключения источника задаётся $\tau_d=\int U_{int}(t)/U_{peak}\,dt$, где U_{peak} — максимум внутренней энергии данного запуска после отключения. Величина t_{10} — время от этого максимума до первого уменьшения U_{int} до $0.1U_{peak}$. Спектральный G использует то же определение пространственной концентрации в целевой области по частотным компонентам.

Конечноволновая осесимметричная проверка Maxwell/FDTD ставит сознательно более узкий вопрос, чем лучевая теорема: вызывает ли фокально-согласованное возбуждение точного РНВ воспроизводимое перераспределение вблизи опорного радиуса $\rho=R$ и отличается ли отклик от согласованных контрольных источников и геометрий при одинаковой амплитуде источника? Никакого автоматического следствия из к для интенсивности не предполагается.

Геометрическая целевая область волнового теста. В лучевых обозначениях центральная полоса $A_h=\{|x|\le a,|\rho-R|\le h\}$; в цилиндрической реализации Максвелла те же координаты записаны как $|z|\le a$ и $|r-R|\le h$. Следовательно, A_h — окрестность конечной толщины внутренней цилиндрической поверхности C_0, а не фокальная трубка вокруг внешних колец $\mathcal{F}_\pm$.

Эти определения контрольных вариантов и точные численные маски реализованы в опубликованных проверочных скриптах и машиночитаемых результатах.

11.2.1. Формальный критерий абсолютного обогащения: отрицательный результат

Для точного РНВ с фокально-согласованным возбуждением при самом высоком разрешении $N_{res}=140$ формальный пик в широкой целевой области составил $G_{target,max}=0.986212$ и пришёлся на последний сохранённый отсчёт после отключения источника $t=360$. Поскольку

заявленный критерий абсолютного обогащения требует G_target>1, вывод NO_ANNULAR_ENRICHMENT_G_LE_1_AT_HIGHEST_GRID корректен. Метрика более узкого коридора достигла 1.026046 на том же позднем отсчёте, но это небольшое превышение не является сошедшимся результатом и возникает, когда оставшаяся энергия полости уже крайне мала (cavity_energy_rel≈3.91×10^−4).

Спектральная целевая метрика также не демонстрирует достаточной сеточной сходимости: G_spectral снижается с 0.435641 при N_res=120 до 0.331468 при N_res=140, то есть на 23.9% относительно N_res=120. Поэтому серия не устанавливает абсолютной кольцевой концентрации, резонансного накопления, увеличения добротности Q или конечноволнового равенства лучевому коэффициенту κ.

11.2.2. Устойчивый ранний дифференциальный переходный отклик

Положительный ранний признак концентрации в общий момент времени возникает при t=5 после отключения источника в окрестности конечной толщины внутренней фокальной прямой/цилиндрического множества. При N_res=140 для точного РНВ с фокально-согласованным возбуждением G_target=0.531148, а центральная радиальная полуширина энергии равна 0.593305. Хотя G_target остаётся меньше единицы, отклик в заявленной внутренней полосе одновременно сильнее и уже, чем в согласованных контрольных геометриях и в том же РНВ при возбуждении плоской апертурой. Поскольку во всех случаях задана одинаковая амплитуда тока источника, а не одинаковая принятая мощность, эти отношения характеризуют дифференциальную фокально-селективную концентрацию/перераспределение поля, но не КПД и не энергетическое усиление.

В момент t=5 точный фокально-согласованный РНВ превосходит C2 по G_target в 2.27 раза, равный по объёму гладкий контроль — в 1.21 раза, прямолинейный контроль — в 1.67 раза, а тот же РНВ с плоским источником — в 1.83 раза. Соответствующие прокси-показатели плотности в целевой области выше в 2.53, 1.39, 2.15 и 2.43 раза. Отношения полуширины энергии контрольного варианта к РНВ равны 1.97, 1.25, 1.58 и 1.37; значения больше единицы означают более узкий отклик РНВ.

Этот ранний фокально-линейный признак также сходится по сетке значительно лучше позднего свободного максимума. Между N_res=120 и 140 симметричный относительный дрейф составляет лишь 1.15% для G_target(t=5), 1.21% для полуширины энергии и 0.217% для прокси-плотности целевой области. Следовательно, корректное нынешнее утверждение — воспроизводимая переходная дифференциальная концентрация и сужение около внутреннего фокально-линейного/цилиндрического множества, предсказанного лучевой геометрией. Подчеркнём, что наблюдение получено при a/λ≈2. Поскольку характерные размеры полости составляют всего две длины волны, устойчивый по сетке эффект представляет собой опосредованное дифракцией отображение лучевого фазового каркаса, а не классическую оптическую фокусировку. Результат согласуется с конечноволновым следом лучевой геометрической организации, но не означает сверхконцентрации, волнового притяжения или сжатия фазового пространства. Это не абсолютное обогащение энергией: G_target<1 и принятые мощности не были уравнены.

11.2.3. Конечноволновой режим и ограничение нормировки источника

Центральная частота составляет f=4 в единицах MEEP, поэтому λ=0.25, a/λ=b/λ=2 и R/λ=8. Пространственная дискретизация сравнительно тонкая (около 30 и 35 точек на длину волны при N_res=120 и 140), но геометрия не находится в глубоком лучевом пределе: гиперболические размеры a и b составляют лишь две длины волны. Поэтому не следует ожидать равенства конечноволновой ширины и лучевого коэффициента κ. Кроме того, фиксированная амплитуда тока источника не гарантирует одинаковой мощности, введённой в

полости разных геометрий; будущие утверждения об эффективности требуют нормировки на принятую мощность или поток.

11.2.4. Предварительная лучевая проверка вблизи T и F

Канонический меридиональный пример с a=b=0.5 и R=2 даёт одну границу порядка событий T=0.692376935116 и фокальную координату F=0.707106781187, то есть F−T=0.014729846071 и T<F. Соответствующие полярные углы θ_T=70.904737° и θ_F=70.528779°, разность 0.375957°. Левее T выборочные лучи относятся к PASS; между T и F они уже RETURN; при F траектория представляет точную асимптотическую фокальную ветвь; правее F запуски остаются RETURN, утрачивая точное фокальное согласование. Пример показывает, что F расположена внутри транспортного класса, а не является вторым порогом порядка событий.

Этот канонический пример с малым зазором полезен в лучевой модели, но неудобен как конечноволновой различитель: фазовые профили запусков в T и F отличаются слишком слабо на конечной апертуре. Поэтому направленная конечноволновая проверка использует отдельную геометрию, согласованную с законом, с существенно большим угловым разделением T–F и калиброванным односторонним электрическим/магнитным источником, как описано в разделах 11.3 и 11.4.

11.2.5. Научная интерпретация объединённой лучевой и волновой проверки

Конечноволновые данные концентрации чётко ограничивают интерпретацию. Точное лучевое сжатие и порядок T<F не меняются, однако исследованная широкая кольцевая область при данной длине волны не обогащается энергией абсолютно выше среднего по полости. Вместе с тем сравнение полей в общий момент времени выявляет устойчивое по сетке раннее сужение и селективность к фокальному источнику, согласующиеся с конечноволновым следом фокальной организации, но не доказывающие его. Направленные результаты T–F из разделов 11.3–11.4 независимо показывают гладкую зависимость состояния от направления, а не разрывную волновую копию лучевой карты событий. Вместе это поддерживает многоуровневую интерпретацию: точное фокальное сжатие, перенос по порядку лучевых событий, конечноволновую маршрутизацию и наблюдаемые затухания/пребывания следует проверять раздельно.

Таблица 8. Ранние конечноволновые наблюдаемые в общий момент времени при N_res=140.

Случай при N_res=140	G_target при t=5	Прокси-плотность в целевой области	Полуширина энергии
Точный PHB, фокально-согласованный	0.531148	8.530887e-03	0.593305
Расфокусированный C2	0.234140	3.373630e-03	1.170228
Гладкая поверхность равного объёма	0.437548	6.134187e-03	0.742877
Прямолинейный контроль	0.318596	3.958664e-03	0.935185
Точный PHB, плоский источник	0.289832	3.514334e-03	0.814103

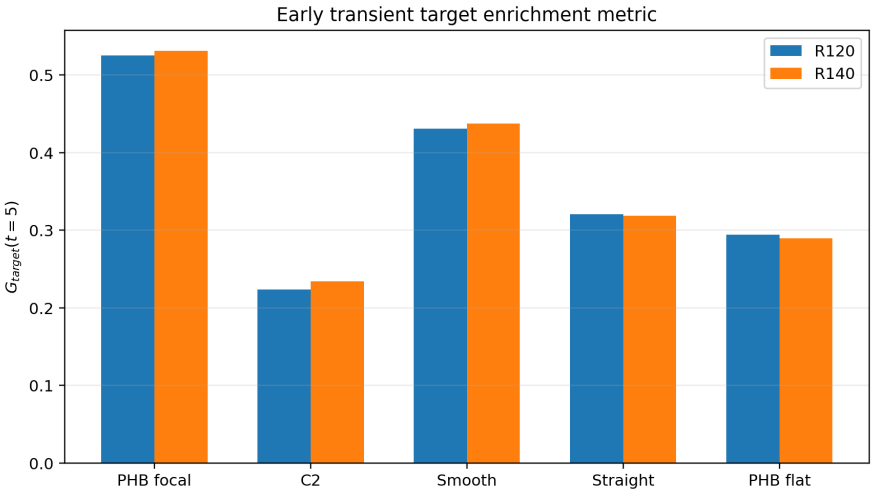

Рисунок 24. Сравнение G_target в ранний общий момент t=5. Отклик точного фокально-согласованного PHB устойчив по сетке и превосходит проверенные контроли по геометрии материала, оставаясь ниже абсолютного порога обогащения G=1.

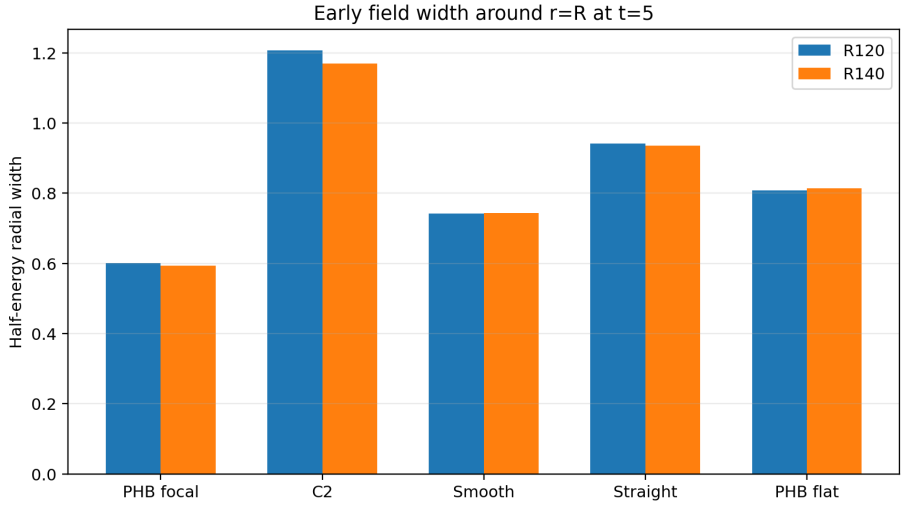

Рисунок 25. Ранняя радиальная полуширина энергии около r=R при t=5. Точный фокально-согласованный PHB даёт самый узкий отклик среди непустых проверенных геометрий при обоих рабочих разрешениях.

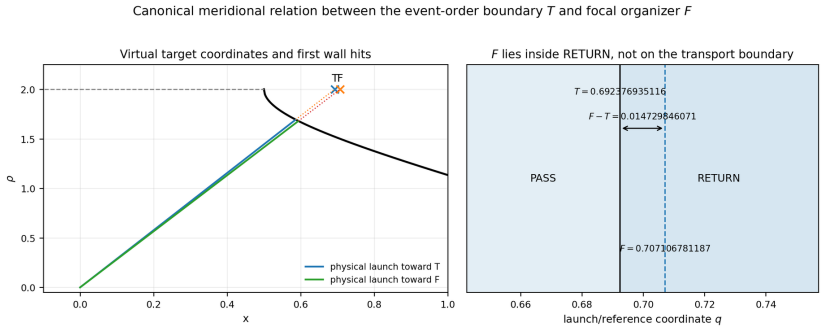

Рисунок 26. Каноническое меридиональное соотношение транспортной границы T и фокального организатора F. Слева: T и F являются виртуальными целевыми координатами на ρ=R; физические лучи сталкиваются со стенкой прежде, чем достигают их. Справа: T разделяет PASS и RETURN, тогда как F лежит внутри RETURN и отличается от T конечным зазором F−T.

11.3. Направленный отклик Maxwell/FDTD при переходе от T к F

11.3.1. Вычислительная постановка и калибровка источника

В наборе направленных волновых расчётов используется односторонний калиброванный электрический/магнитный источник и открытая геометрия PHB, выбранная для отчётливого волнового различения лучевой транспортной границы T и фокального организатора F. Конечноволновые метрики являются определёнными решателем прокси-показателями концентрации, вынужденного переноса к противоположному рупору, утечки после отключения источника и пребывания. Они не являются лучевыми вероятностями и не предполагаются совпадающими с границей порядка событий.

11.3.2. Калибровка направленного источника

Перед сканированием полости сочетание электрического и магнитного токов калибровалось в свободном пространстве. Наилучшая проверенная амплитуда магнитного тока −2.0 в нормировке скрипта дала интегрированный поток вперёд 0.733993 и назад 0.0232238, то есть отношение 31.6052, намного выше заранее заданного порога 2.5. При смене знака направление меняется на обратное: для пар ±0.5, ±1 и ±2 произведения отношений прямого и обратного потоков отличаются от единицы менее чем примерно на 3.2×10^−7. Следовательно, амплитуда −2.0 представляет эмпирическую численную калибровку источника, а не предполагаемое тождество волнового импеданса.

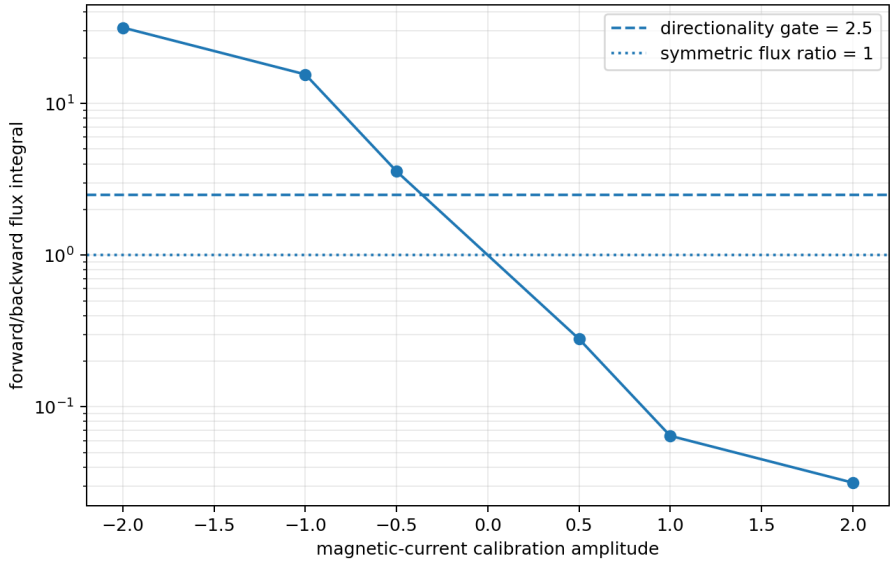

Рисунок 27. Калибровка направленного источника типа Гюйгенса в свободном пространстве. Отрицательные амплитуды магнитного тока преимущественно запускают выбранное направление; принятое значение −2 обеспечивает отношение интегрированных прямого и обратного потоков 31.61.

11.3.3. Изменённая геометрия T–F и волновая различимость

Для направленного исследования T–F используются a=0.5, b=1.0, R=1.5 и R1=0.3. Точный меридиональный коэффициент сжатия κ=0.3819660113. Предварительная лучевая проверка даёт T=0.9612050021, F=1.1180339887 и F−T=0.1568289867 при T<F. Соответствующее угловое разделение составляет 4.047341°. При f=6 фазовые профили источника для T и F отличаются на 34.164° от минимума до максимума. Волновые размеры a/λ=3 и R/λ=9. Такая геометрия обеспечивает существенно различимые направления двух лучевых организаторов, хотя всё ещё не находится в глубоком пределе геометрической оптики.

Точный фокальный луч численно исключителен. При трассировке событий с конечной точностью сохранённая траектория F следует фокальному рекуррентному закону в течение 39 зарегистрированных отражений, после чего допуск событий завершает численную трассу. Точное же соотношение предсказывает асимптотическое приближение к переходным кольцам без центрального выхода при любом конечном унаследованном переносе. Поэтому конечное число численных отражений — ограничение разрешения событий, а не физическое время жизни идеальной орбиты F.

11.3.4. Выборочный волновой отклик N_res=120: от стороны PASS через T к F

Рассчитаны пять целевых координат запуска при N_res=120: PASS_SIDE q=0.8435832621, AT_T q=0.9612050021, BETWEEN_T_F q=1.0396194954, AT_F q=1.1180339887 и RIGHT_OF_F q=1.2356557287. Во всех случаях максимум концентрации после отключения источника приходится на первый сохранённый отсчёт, приблизительно t=4.0005. Максимум G_target с энергетическим отсечением плавно уменьшается: 0.388393 → 0.382416 → 0.377775 → 0.372641 → 0.364113. Спектральная величина G_target при f=6 снижается в том же порядке: 0.442124 → 0.410327 → 0.390274 → 0.371506 → 0.346205. Корреляция с q по этим пяти точкам равна −0.9967 для пикового G и −0.9986 для спектрального G. Следовательно, F в данной конечноволновой конфигурации не является выборочным локальным максимумом концентрации: отклик представляет собой гладкую зависимость от углового/стартового состояния, а не фокальный пик.

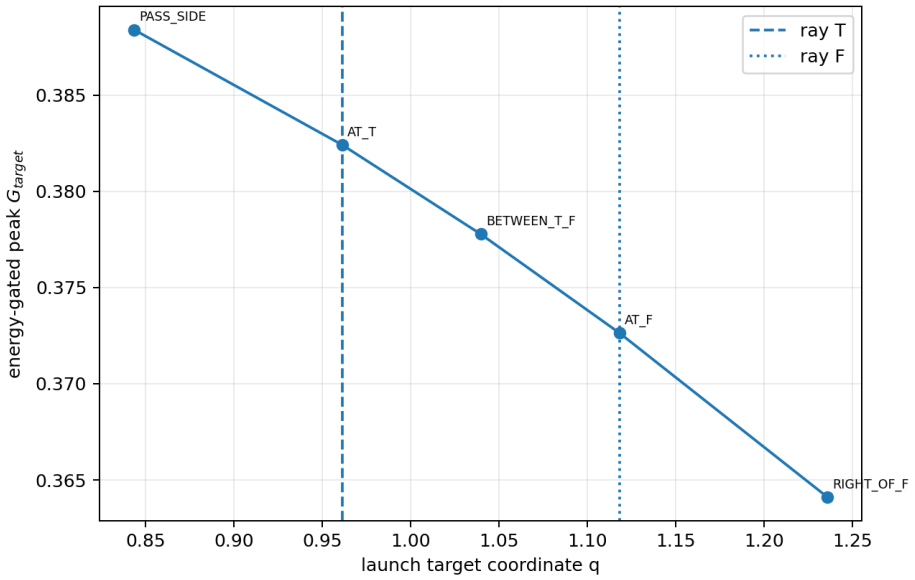

Рисунок 28. Направленное волновое сканирование T–F при N_res=120. Пиковая целевая концентрация с энергетическим отсечением плавно убывает по последовательности от стороны PASS через T и F к области правее F; локального максимума в F нет.

Совокупное разделение потоков за время работы источника и затухания ведёт себя иначе. Прокси-доля возврата к противоположному рупору монотонно увеличивается от 0.247599 на PASS_SIDE до 0.272362 в T, 0.289464 между T и F, 0.306839 в F и 0.332881 правее F; корреляция с q равна +0.99993. Таким образом, калиброванный направленный источник разрешает сильную гладкую зависимость маршрутизации потока от стартового состояния. Однако на грубом волновом сканировании пяти точек разрыва на лучевой границе T не наблюдается, и по этим данным не определяется отдельная конечноволновая координата перехода.

Ещё одно различие проявляется при ограничении интегрирования стадией затухания после отключения источника. Прокси-доля возврата меняется в обратном направлении: 0.519564 → 0.506019 → 0.495107 → 0.482931 → 0.462724, корреляция с q равна −0.99594. Следовательно, стартовое состояние, которое при вынужденном возбуждении направляет большую совокупную долю к противоположному рупору, оставляет меньшую относительную долю возврата в последующем затухании. Это конкретный конечноволновой пример того, почему вынужденный перенос, утечку после источника и время пребывания необходимо рассматривать как разные наблюдаемые, а не объединять в единственную величину «RETURN» или «захвата».

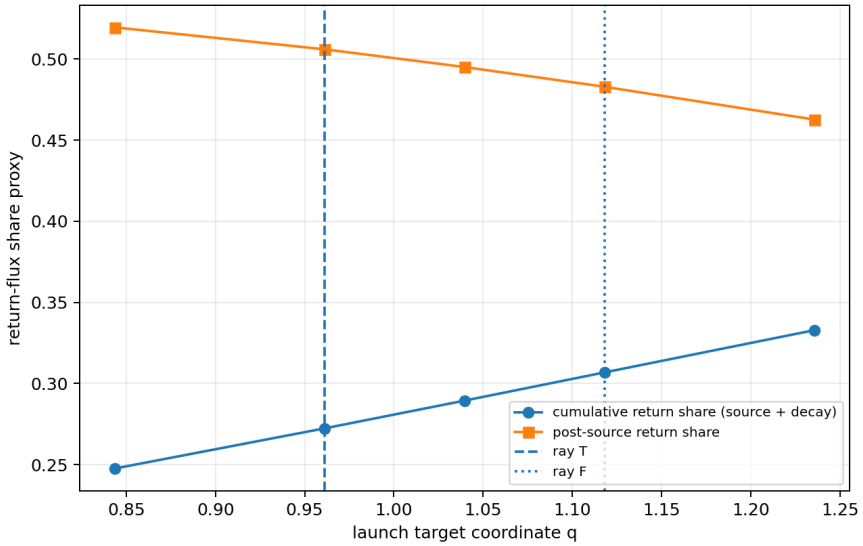

Рисунок 29. Разделение потоков в направленном расчёте при N_res=120. Совокупная доля возврата растёт с q, а доля после отключения источника уменьшается. Эта инверсия тенденций разграничивает вынужденный перенос и утечку при затухании и подтверждает необходимость отдельно рассматривать транспорт и время пребывания.

Нормированный интеграл пребывания после отключения источника сравнительно мало меняется при N_res=120: 7.44285, 7.49982, 7.51761, 7.51796 и 7.48450 для пяти координат запуска. Время от максимума внутренней энергии до 10% составляет 20.0025 во всех пяти случаях. Следовательно, сканирование не выявляет разрешённой сингулярности пребывания или резкого максимума в T либо F.

11.3.5. Проверка T против F при N_res=140 и устойчивость относительных наблюдаемых

В заключительном направленном сканировании девяти состояний при N_res=140 опорные случаи T и F дают пиковый G_target соответственно 0.537526 и 0.527800, спектральный G_target — 0.485938 и 0.451530, совокупную прокси-долю возврата — 0.240586 и 0.274337, долю возврата после отключения источника — 0.427610 и 0.408221. Поэтому отношения F/T равны 0.98191 для пикового G, 0.92919 для спектрального G, 1.14028 для совокупной доли возврата и 0.95466 для доли возврата после источника. Знаки различий сохраняются при более плотном сканировании N_res=160 и в опорных T/F при N_res=180; полная оценка сходимости приведена в разделе 11.4.

Абсолютные амплитуды поля сходятся хуже относительных наблюдаемых T/F. Полные сканирования при N_res=140 и 160 и опорные T/F при 180 в разделе 11.4 показывают, что ряд относительных отношений состояний стабилизируется значительно лучше соответствующих

абсолютных амплитуд. Это различие явно учитывается при итоговой интерпретации и не позволяет выдавать абсолютные значения поля за показатели эффективности устройства.

11.3.6. Научный итог направленного волнового испытания

Направленное испытание T–F ограничивает наиболее сильную конечноволновую интерпретацию лучевых организаторов: оно не устанавливает экстремума концентрации при F, резкого переключения конечноволнового класса на лучевой границе T или сингулярности пребывания у любого из организаторов. Вместо этого наблюдаемые поля плавно меняются с координатой запуска. Это разрешённый вычислительный результат заявленной физической модели, а не ошибка решателя.

В то же время направленные данные выявляют две воспроизводимые структурные сигнатуры: (i) гладкую зависимость совокупного разделения потоков выхода/возврата от направления запуска и (ii) противоположные тенденции совокупной доли вынужденного возврата и доли возврата после отключения источника. Плотные сканирования N_res=140 и 160 и опорные T/F при 180 в разделе 11.4 показывают, что некоторые относительные величины существенно устойчивее по сетке, чем абсолютные амплитуды. Это не сама лучевая ступенька PASS/RETURN, но свидетельство преобразования геометрией открытого РНВ фазировки запуска в различимые конечноволновые состояния поля и потока.

Точный лучевой закон от этого не меняется. Новый волновой расчёт проверяет предполагаемое конечноволновое следствие, а не теорему t_{n+1}=κt_n. Полученные данные ещё сильнее подтверждают центральное разграничение работы: точное фокальное сжатие, перенос по порядку событий, вынужденный конечноволновой перенос и время пребывания после источника связаны геометрией, но не являются взаимозаменяемыми наблюдаемыми.

11.4 Dense T-to-F resolution study, direct skew closure, and reflection persistence

В заключительной направленной верификации выполнены все 18 запланированных конечноволновых расчётов; проверки целостности архивного манифеста пройдены. Внутренние метки времени и вычислительной машины представляют собой данные о происхождении расчётов, а не научные доказательства. Калиброванный источник, единые определения геометрии и наблюдаемых обеспечивают сопоставимость расчётных состояний.

Геометрия лучевого и волнового сканирования: a=0.5, b=1.0, R=1.5, R1=0.3 при κ=0.3819660113. Предварительный расчёт порядка событий даёт T=0.9612050021, F=1.1180339887, F−T=0.1568289867 и угловое разделение 4.047341°. Фазовые профили источника при T и F отличаются на 34.164° от минимума до максимума. Такая геометрия позволяет численно различать два направленных состояния.

Плотное сканирование при N_res=140 охватывает девять состояний запуска от PASS_WIDE через T, интервал T<F и F до RIGHT_WIDE; при N_res=160 исследованы семь соответствующих состояний, а при N_res=180 повторены опорные T и F. При N_res=140 корреляции с q составляют −0.99721 для пикового G_target, −0.99977 для спектрального G_target, −0.99567 для доли возврата после отключения источника и +0.99411 для нормированного времени пребывания. При N_res=160 соответствующие корреляции равны −0.98231, −0.99983, −0.99687 и +0.99793. Таким образом, волновой отклик плавно проходит через заданные лучевой моделью T и F: на рассчитанных сетках не наблюдаются ни разрыв при T, ни экстремум концентрации при F.

Тем не менее гладкий отклик содержит воспроизводимое преобразование направления в состояние. От PASS_WIDE до RIGHT_WIDE совокупная доля вынужденного возврата увеличивается на 38.47% при N_res=140 и на 38.33% при N_res=160; доля возврата после отключения источника уменьшается соответственно на 10.89% и 13.47%. Нормированное

время пребывания возрастает на 4.64% и 5.22%. Следовательно, вынужденный перенос и утечка после отключения источника имеют противоположные тенденции, хотя обусловлены развитием одного и того же поля. Это подтверждает необходимость считать транспортное разделение и пребывание/затухание разными наблюдаемыми, а не взаимозаменяемыми прокси-показателями.

Абсолютные амплитуды остаются заметно зависимыми от разрешения, особенно пиковый G_target. Относительные наблюдаемые T–F значительно слабее зависят от сетки в испытанном диапазоне. При N_res=140, 160 и 180 отношения F/T соответственно равны 0.98191, 0.99194 и 0.98662 для пикового G_target; 0.92919, 0.94192 и 0.94246 для спектрального G_target; 1.140285, 1.140438 и 1.141022 для совокупной доли вынужденного возврата; 0.95466, 0.94359 и 0.94464 для доли возврата после источника; 1.01854, 1.02082 и 1.01708 для нормированного пребывания. Отношение долей совокупного вынужденного возврата меняется примерно на 0.065% между тремя разрешениями, а отношение показателей пребывания — примерно на 0.37%. Следовательно, данные подтверждают устойчивость относительных величин на испытанном наборе сеток, но не являются общим доказательством асимптотической численной сходимости.

Фокально-транспортная инверсия локализована непосредственно детерминированным поиском корня в заключительном верификационном скрипте. Расчёт даёт T(ψ)=F при |ψ|=36.17505377°, |j|=0.288080952 и нормированном остатке −4.02×10^−10. Двусторонняя проверка при фиксированном фокальном запуске даёт RETURN при ψ=36.16505° и PASS при ψ=36.18505°, что устанавливает инверсию на выбранном сечении, а не касательное совпадение координат.

Диагностика нескольких переносов показывает, что малый фокальный промах на первом переносе не гарантирует долговременного сохранения фокальной последовательности. При ψ=0.1° последовательные виртуальные промахи фокальной плоскости составляют 3.15×10^−7, 3.04×10^−6, 2.76×10^−5 и 2.49×10^−4 a; множители между ними равны 9.66, 9.07 и 9.01. Последовательности для ψ=0.3°, 1° и 3° показывают такое же приближение. Поскольку в проверочной геометрии β=0.75 и κ=1/9, наблюдаемое усиление промаха стремится к κ^−1=9. Это вычислительно выявленная поперечная чувствительность виртуального фокального остатка, но не доказанное собственное значение, показатель Ляпунова или дополнительное точное положение закона.

Сканирование D6 измеряет сохранение физических отражений на конечном горизонте, а не строгую фокальную согласованность. Определим ψ_refl^(N) на заданной дискретной сетке косости как наибольшее проверенное |ψ|, при котором фокально-направленный запуск совершает не менее N физических отражений от стенки до терминального выхода. На сетке с шагом 0.25° получены ψ_refl^(2)=36.0°, ψ_refl^(3)=3.25° и ψ_refl^(4)=0.25°; сохранение шести и восьми отражений наблюдалось только при ψ=0. Граница между двухотражательной последовательностью RETURN и одноотражательной PASS лежит между 36.0° и 36.25°, что согласуется с независимо найденной бисекцией FTI при 36.175°. Эти значения — допуски сохранения отражений на конечной сетке для одной геометрии и конвенции запуска. Они не удовлетворяют более строгому определению j_coh^(N)(ε), которое дополнительно требует заданного допуска фокального остатка и сохранённого происхождения событий.

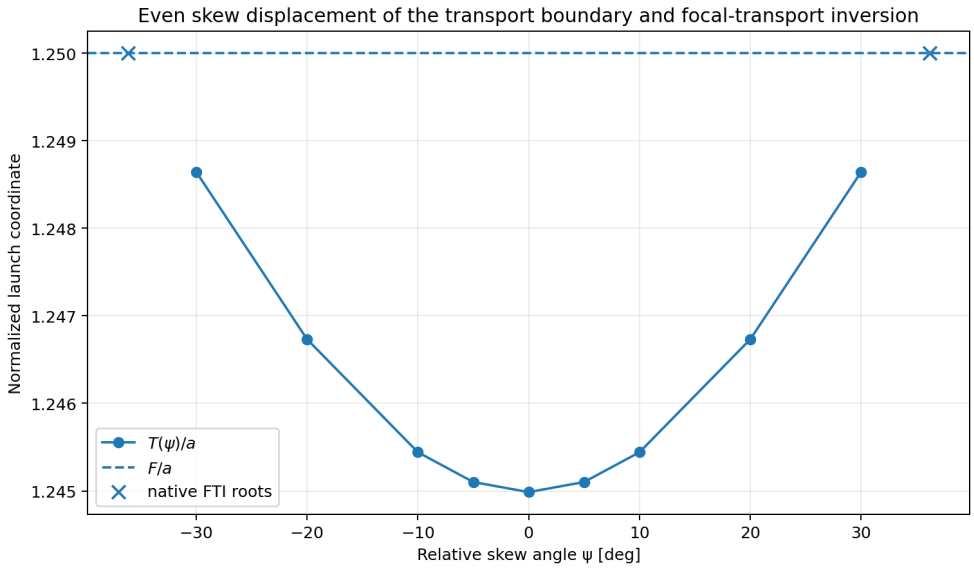

Рисунок 30. Прямая локализация фокально-транспортной инверсии, вызванной косостью. Граница порядка событий зеркально-чётна по относительной косости и пересекает фиксированную фокальную координату при |ψ|=36.1750538°.

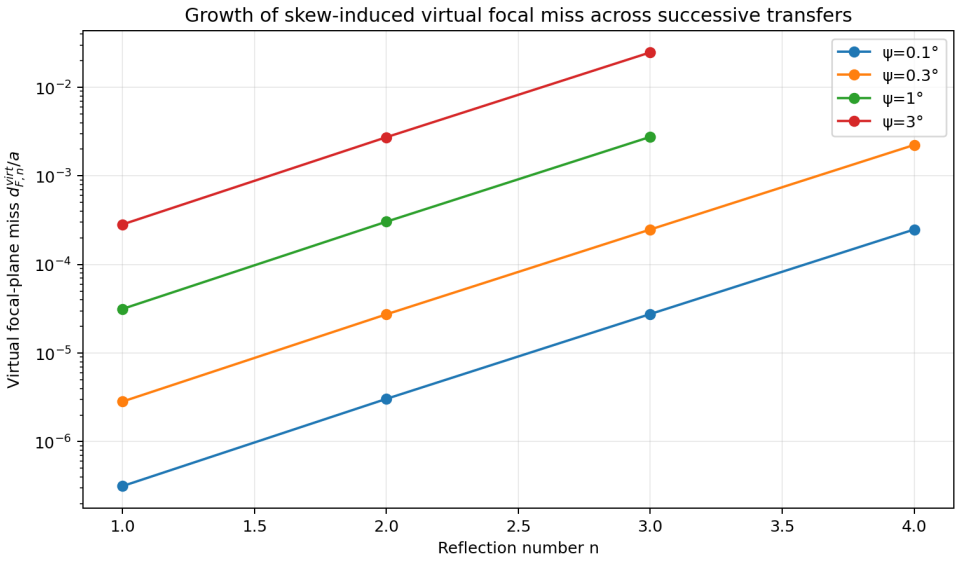

Рисунок 31. Виртуальный промах фокальной плоскости при нескольких переносах и малой косости. Последовательные множители промаха приближаются к к^−1=9 для проверочной геометрии с к=1/9. Это вычислительная характеристика роста фокальной ошибки, а не доказанное поперечное собственное значение.

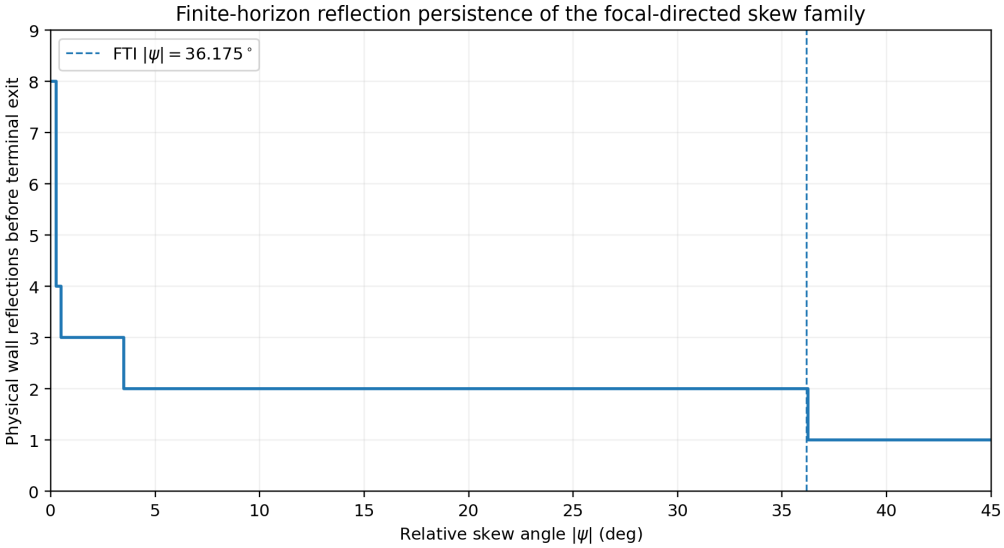

Рисунок 32. Сохранение отражений фокально-направленного косого семейства на конечном горизонте. Порог учитывает только физические отражения от стенки и отличается от критерия фокальной согласованности, ограниченного по остатку.

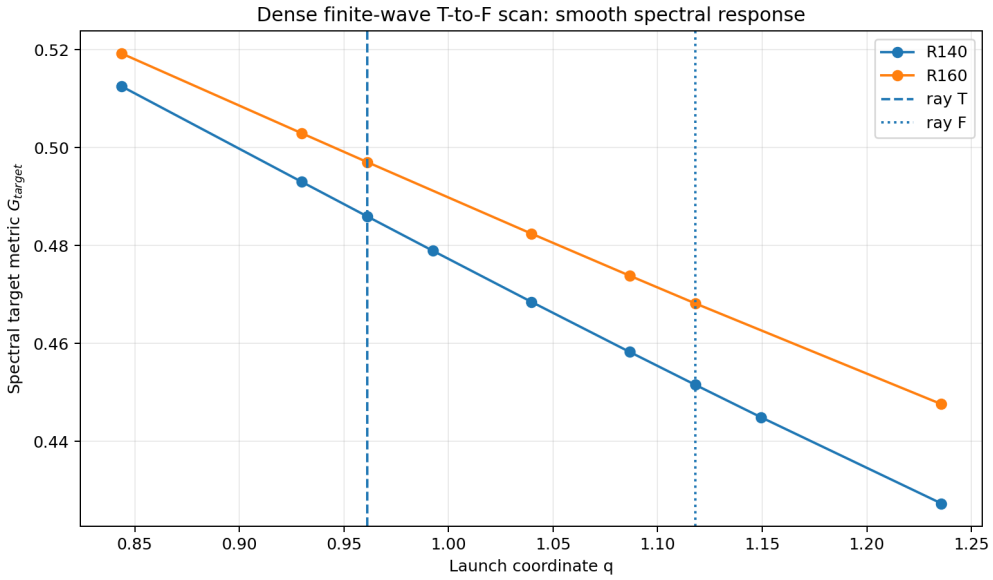

Рисунок 33. Плотное конечноволновое сканирование T–F. Спектральная целевая метрика плавно изменяется через лучевую транспортную границу T и фокальный организатор F при N_res=140 и N_res=160.

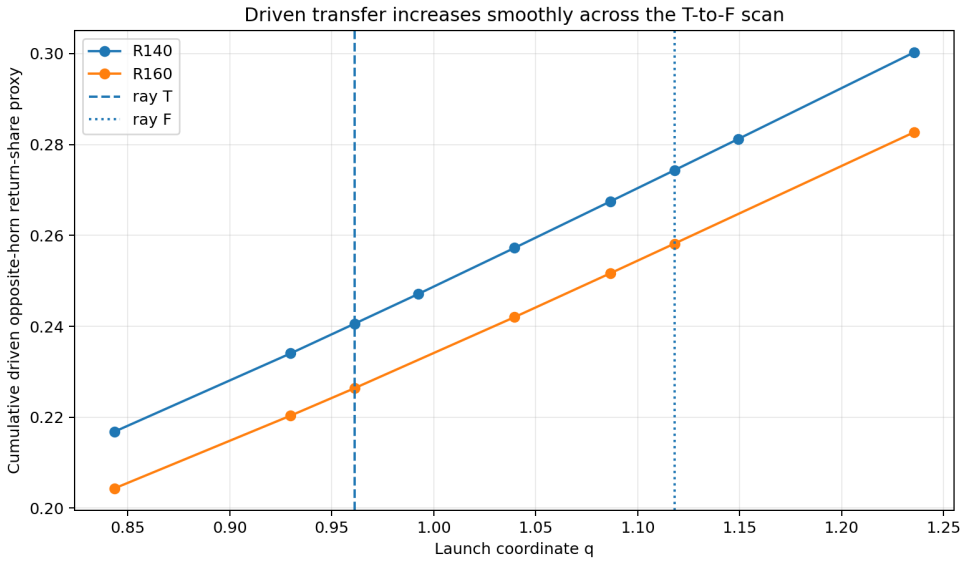

Рисунок 34. Совокупная прокси-доля вынужденного возврата к противоположному рупору. Плавный рост с координатой запуска воспроизводим при N_res=140 и 160 и не является разрывным волновым аналогом лучевой транспортной границы.

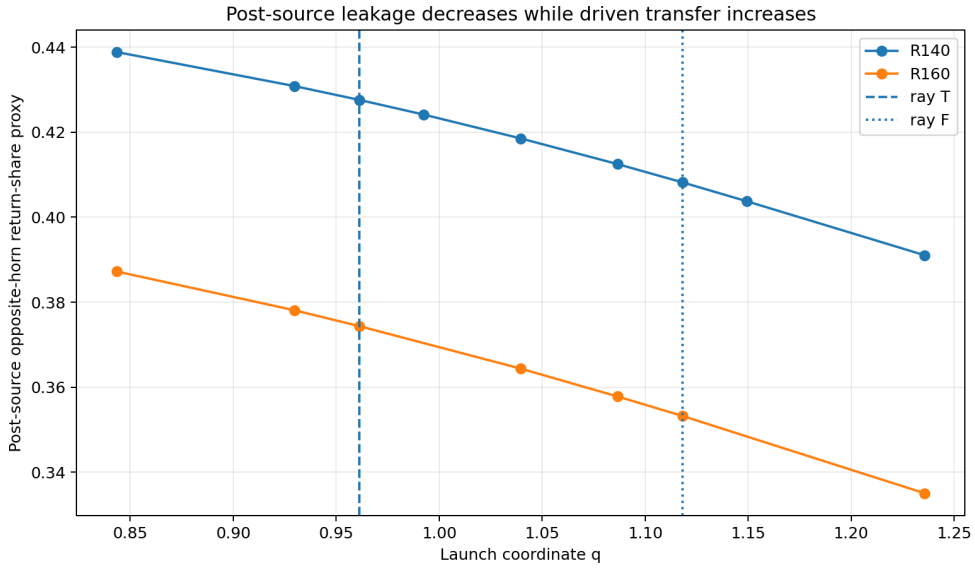

Рисунок 35. Прокси-доля возврата после отключения источника. Её снижение с координатой запуска имеет знак, противоположный тенденции совокупного вынужденного переноса, что разграничивает маршрутизацию при возбуждении и утечку при затухании.

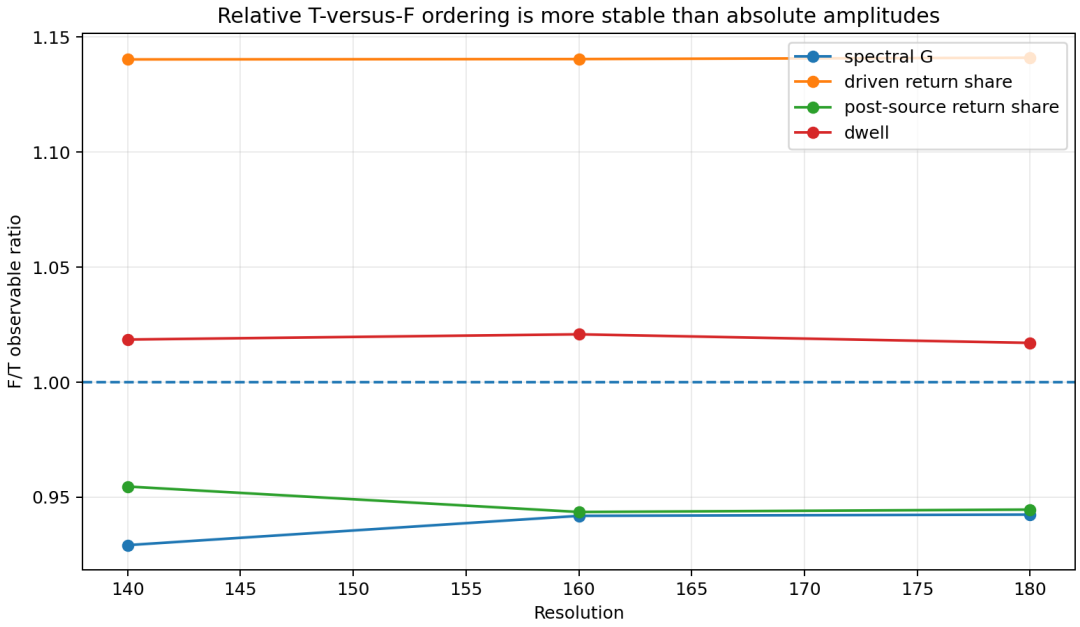

Рисунок 36. Отношения наблюдаемых F/T при N_res=140, 160 и 180. Относительный порядок существенно устойчивее нескольких абсолютных амплитуд; особенно устойчива к сетке доля совокупного вынужденного возврата.

Таблица 9. Полная сводка плотного направленного конечноволнового сканирования по 18 случаям.

N_res	Обозначение	q	G_target (пик)	G_target (спектр)	Вынужденный возврат	Возврат после источника	Пребывание	t10
140	ШИРОКИЙ_PASS	0.843583262	0.543736	0.512554	0.216860	0.438858	5.752944	16.0080
140	СЛЕВА_ОТ_T	0.929839205	0.539260	0.493007	0.234052	0.430852	5.826506	16.0080
140	B_T	0.961205002	0.537526	0.485938	0.240586	0.427610	5.851561	16.0080
140	СПРАВА_ОТ_T	0.992570799	0.535727	0.478915	0.247148	0.424147	5.875591	16.0080
140	СЕРЕДИНА_T_F	1.039619495	0.532898	0.468495	0.257254	0.418541	5.909556	16.0080
140	СЛЕВА_ОТ_F	1.086668191	0.529900	0.458248	0.267490	0.412495	5.940827	16.0080
140	B_F	1.118033989	0.527800	0.451530	0.274337	0.408221	5.960070	16.0080
140	RIGHT_NEAR_F	1.149399786	0.525617	0.444913	0.281226	0.403753	5.977962	16.0080

N_res	Обозначение	q	G_target (пик)	G_target (спектр)	Вынужденный возврат	Возврат после источника	Пребывание	t10
140	ШИРОКАЯ_ПРАВАЯ	1.235655729	0.519150	0.427294	0.300282	0.391070	6.019753	16.0080
160	ШИРОКИЙ_PASS	0.843583262	0.616898	0.519269	0.204379	0.387220	5.227392	12.0015
160	СЛЕВА_ОТ_T	0.929839205	0.615198	0.502944	0.220360	0.378098	5.295894	12.0015
160	B_T	0.961205002	0.614466	0.497038	0.226399	0.374377	5.319943	12.0015
160	СЕРЕДИНА_T_F	1.039619495	0.612291	0.482436	0.242023	0.364378	5.377498	12.0015
160	СЛЕВА_ОТ_F	1.086668191	0.610706	0.473829	0.251682	0.357816	5.409985	12.0015
160	B_F	1.118033989	0.609516	0.468168	0.258194	0.353259	5.430678	12.0015
160	ШИРОКАЯ_ПРАВАЯ	1.235655729	0.603960	0.447593	0.282708	0.335061	5.500464	12.0015
180	B_T	0.961205002	0.506282	0.461406	0.226685	0.370812	5.458751	12.0050
180	B_F	1.118033989	0.499506	0.434855	0.258653	0.350284	5.551989	12.0050

Таблица 10. Отношения наблюдаемых T–F при трёх проверенных разрешениях.

N_res	Пиковый G F/T	Спектральный G F/T	Вынужденный возврат F/T	Возврат после источника F/T	Пребывание F/T
140	0.981908	0.929192	1.140285	0.954657	1.018544
160	0.991944	0.941917	1.140438	0.943592	1.020815
180	0.986616	0.942455	1.141022	0.944640	1.017081

12. Каноническая формулировка, эквивалентные формы и использование закона фокального сжатия при проектировании

12.1. Точный закон фокального сжатия РНВ

Для идеальной поверхности РНВ, полученной из радиально смещённой гиперболы (1), при регулярном зеркальном отражении сохраняется осевой момент импульса J_x. В инвариантном меридиональном секторе J_x=0 последовательные фокально-согласованные переносы между противоположными ветвями подчиняются точному отображению

$$t_{n+1}=\kappa t_n,\quad \kappa=[(1+\beta^2)^{1/2}-1]/[(1+\beta^2)^{1/2}+1],\quad 0<\kappa<1. \qquad (78)$$

Следовательно, $t_n=\kappa^n t_0$, а разделение членов фокально-согласованного пучка удовлетворяет $\delta t_n=\kappa^n\delta t_0$. Радиальное расстояние до переходного кольца асимптотически сокращается с коэффициентом κ, а осевое — с κ^2. Два внешних фокальных кольца фиксируются геометрией исходной коники. Эти соотношения вместе с сохранением J_x при вращательной симметрии и допустимости последовательных физических отражений составляют точную часть фокально-транспортного закона.

Уравнение Ферма для первого отражения также точно как условие стационарности пути. Однако для отождествления его решения с границей PASS/RETURN дополнительно нужны проверка порядка физических событий, двустороннее разделение классов и численное или аналитическое продолжение. Поэтому такое отождествление не включается в теорему без указанных предпосылок.

12.1.1. Условия применимости точного утверждения

Рекуррентное соотношение точно при одновременном выполнении пяти условий: (i) используется идеальная гиперболическая ветвь PHB-2; (ii) отражения происходят в регулярных гладких точках стенки; (iii) луч принадлежит инвариантному меридиональному сектору $J_x=0$; (iv) траектория следует унаследованной фокально-сопряжённой ветви, к которой относится классическое свойство гиперболы; (v) каждый очередной найденный перенос является физически допустимым первым пересечением с противоположным рупором без более раннего события выхода.

В указанных пределах закон необычайно компактен: единственный безразмерный параметр формы β определяет κ, а κ — всю последовательность t_n. Радиальное смещение R влияет на положение физического рупора и реализацию открытой транспортной задачи, но не входит в κ. Такое разделение параметров — одно из наиболее содержательных структурных свойств модели.

12.1.2. Эквивалентные формы и обратная проектная зависимость

Пусть $C=\sqrt{(1+\beta^2)}$. Тогда $\kappa=(C-1)/(C+1)$. Решая относительно геометрии, получаем $C=(1+\kappa)/(1-\kappa)$ и обратное проектное соотношение $\beta=2\sqrt{\kappa}/(1-\kappa)$. Следовательно, заданный точный коэффициент меридионального сжатия однозначно определяет идеальное гиперболическое отношение формы β в данной модели. Радиальное смещение R остаётся свободным параметром для изменения положения стенки и транспортной карты порядка событий.

Для заданного уменьшения $t_N/t_0\le\eta$, $0<\eta<1$, минимальное число унаследованных фокальных переносов определяется неравенством $N\ge\ln(\eta)/\ln(\kappa)$ с округлением вверх до целого. Это непосредственно применимая при проектировании формула: κ задаёт геометрическое сжатие за перенос, а логарифм — число идеальных переносов для достижения выбранного допуска по полуугловой координате.

Физические отклонения от переходного кольца равны $\Delta\rho_n=2b\, t_n/(1-t_n^2)$ и $\Delta x_n=2a\, t_n^2/(1-t_n^2)$. Поэтому с ростом n отношения $\Delta\rho_{n+1}/\Delta\rho_n\to\kappa$, а $\Delta x_{n+1}/\Delta x_n\to\kappa^2$. Осевое приближение асимптотически быстрее радиального. Это геометрические соотношения, а не утверждения об оптической интенсивности или энергетическом усилении.

12.1.3. Физическая интерпретация закона

Закон следует понимать как геометрическое рекуррентное соотношение для унаследованного фокального семейства. Каждое взаимодействие со стенкой по-прежнему подчиняется обычному локальному закону зеркального отражения. Новое содержание является глобальным: на данной смещённой гиперболической границе фокальное свойство исходной

коники многократно переводит регулярное состояние отражения в более близкое к предельному фокальное состояние на противоположном рупоре.

Сжатие не означает диссипативного сжатия фазового пространства. Оно действует на ограниченное инвариантное семейство внутри полного бильярда. Также оно не означает физического достижения внешнего фокального кольца. Кольцо организует направление исходящего участка; реальные отражения стремятся к переходным кольцам при $|x|=a$, а участки перелёта — к внутреннему отрезку фокальной прямой.

Точная орбита F является предельным членом этого семейства. После любого конечного унаследованного переноса она остаётся внутри идеальной открытой полости и асимптотически приближается к переходным кольцам. Поскольку длина свободного перелёта стремится к 2a, бесконечная последовательность имеет бесконечную геометрическую длину и не образует процесса Зенона за конечное время.

12.1.4. Расчётные примеры проектирования

При $\beta=1$ закон даёт $\kappa=3-2\sqrt{2}\approx0.171573$. Поэтому полууугловое разделение фокального семейства сокращается за один унаследованный перенос примерно до 17.2%, а за три переноса — до $\kappa^3\approx0.00505$ от начального. Наоборот, если задано $\kappa=0.10$, из обратного соотношения $\beta=2\sqrt{\kappa}/(1-\kappa)$ получается $\beta\approx0.70273$. Для требуемого уменьшения $t_N/t_0\le0.01$ при $\beta=1$ неравенство $N\ge\ln(0.01)/\ln(\kappa)$ даёт $N=3$ унаследованных переноса. Это расчёт идеальной геометрической последовательности, а не прогноз реального энергетического усиления или эффективности устройства.

12.2. Вычислительные следствия

На заявленных стартовых сечениях лучевая динамика PHB формирует одну или несколько транспортных границ порядка событий, чьи упорядоченные ориентации разделяют пространство начальных условий на интервалы PASS и RETURN. Число локальных границ, ширины конечных RETURN-полос, фокально-транспортная инверсия, выборочное согласование первого отражения и пороговые множества пребывания являются вычислительными свойствами конечной области, а не пунктами точной меридиональной теоремы.

Поэтому точный и вычислительный уровни можно суммировать без логического преувеличения: фиксированная фокальная геометрия коники создаёт точный меридиональный каркас сжатия; порядок событий определяет транспортные классы на сечениях; конечная косость возмущает меридиональный каркас; пороги времени пребывания образуют отдельный переходный уровень. Совпадения координат разных структур допустимы, но не делают их тождественными.

13. Связь с классической оптикой, бильярдами и утверждением о специфической новизне PHB

Отличие от классических фокальных и конфокальных бильярдов. Фокальное отражение от коник, интегрируемые бильярды на квадриках и фокальные/конфокальные построения давно исследуются [1–6,10,12,13]. Поэтому утверждение о новизне здесь намеренно относится только к PHB: к конкретной радиально смещённой и усечённой поверхности вращения, замкнутому рекуррентному соотношению с постоянным коэффициентом в полууугловой координате для её унаследованного меридионального фокального семейства и явно разграниченным испытаниям порядка событий, косости, пребывания и конечноволновых эффектов. Рукопись не претендует на новизну самого фокального отражения или бильярдных сепаратрис и не утверждает доказанного приоритета по всей мировой литературе за пределами указанного результата PHB.

Настоящая работа не заявляет новизны локального закона зеркального отражения, фокальных свойств коник, бильярдной динамики, выхода из открытых систем, инвариантов углового момента при вращении или общего разграничения лучевого и волнового описаний; этим вопросам посвящена обширная известная литература [1–10,12,13]. Специфическое утверждение PHB относится к выведенному точному ограниченному рекуррентному соотношению для заявленной радиально смещённой ветви вместе с отдельно рассмотренными вычислительными последствиями для транспорта и пребывания.

Специфический вклад PHB формулируется уже: радиально смещённая гиперболическая поверхность вращения конечной протяжённости создаёт два фиксированных внешних фокальных кольца и особую карту транспорта по порядку событий; её инвариантный меридиональный каркас подчиняется точному сжатию (13), имеющему выведенные в разделе 4 последствия для физических координат и семейства лучей. Конечные трёхмерные стартовые сечения могут демонстрировать несколько чередующихся интервалов PASS/RETURN и фокально-транспортную инверсию, а распределение времён пребывания может меняться независимо от класса RETURN.

Такое позиционирование намеренно осторожно. Отрицательная гауссова кривизна рупора PHB — установленная геометрическая характеристика рассматриваемой поверхности, но параметрические сканирования не выделяют кривизну как единственную причину наблюдаемых эффектов. Аналогично граница порядка событий, обнаруженная на одномерном сечении, не объявляется глобальным устойчивым или неустойчивым многообразием без явного анализа продолжения в фазовом пространстве.

13.1. Механистическая интерпретация: два частично независимых геометрических механизма управления

Точный анализ подсказывает полезную проектную интерпретацию, не превращая её в заявление о готовом устройстве. Параметр β определяет силу фокального сжатия κ. Напротив, транспортная граница T_i зависит от β, R/a, положения источника, состояния косости и выбранного сечения. При фиксированном β изменение R/a не меняет κ, но может перемещать границу порядка событий. Следовательно, скорость фокального сжатия и транспортный порог не могут быть одним и тем же скалярным наблюдаемым показателем.

Это не означает, что их можно настраивать произвольно и независимо: β также влияет на транспорт, а R/a меняет протяжённость рупора и геометрию событий. Но модель содержит по крайней мере два неэквивалентных канала геометрического управления: один отвечает за точное унаследованное фокальное сжатие, второй — за разбиение начальных условий по порядку событий за конечное время.

13.2. Научный потенциал разграничения

Если конечноволновые признаки сохранятся, фиксированный фокальный каркас и переменная транспортная карта могут выполнять разные функции. Фокальный признак может задавать определённое геометрией опорное состояние или множество концентрации, тогда как одна или несколько T_i — пассивные пороги преобразования направления в состояние. Несколько чередующихся интервалов PASS/RETURN образовали бы многоуровневый угловой классификатор, а не один фокусирующий элемент.

Уровень времени пребывания добавляет третью потенциальную функцию: управление длиной взаимодействия или задержкой. Поскольку пребывание не определяется одним классом RETURN, геометрию в принципе можно отдельно оптимизировать для маршрутизации и длинного пути. Эти возможности остаются гипотезами до тех пор, пока волновые расчёты с потерями и эксперименты не подтвердят устойчивые наблюдаемые величины. Однако

лучевой закон позволяет точно указать математический параметр, который должна отслеживать каждая проектная функция.

13.3. Инженерные правила проектирования, вытекающие из закона

Точный коэффициент сжатия и карта порядка событий обеспечивают два частично независимых проектных регулятора. Сначала выбирают β по требуемому фокальному сжатию κ из $\beta=2\sqrt{\kappa}/(1-\kappa)$. Затем варьируют R/a, геометрию источника, модель отверстия либо управляемую косость для смещения транспортных границ T_i, контролируя неизменность κ при постоянном β. Это не делает оба механизма полностью независимыми, но предотвращает распространённую ошибку — описание и фокального сжатия, и транспортной классификации единственной величиной «силы фокусировки».

Для задачи приёма в конечном угловом интервале или диапазоне стартовых координат естественный объект проектирования — упорядоченная транспортная характеристика $S_T=\{T_i/a,\omega_i,w_i,\Delta\theta_i\}$. Пара границ противоположных ориентаций создаёт конечное окно RETURN; несколько пар формируют чередующиеся полосы PASS/RETURN. Четырёхграничный пример раздела 7 показывает, как одна гладкая геометрия PHB реализует два разделённых канала возврата на одном стартовом сечении без внутренних подвижных элементов.

Сохранение отражений на конечном горизонте добавляет практическое измерение допусков. Приложение, требующее только одного переноса к противоположному рупору, может выдерживать существенно большую косость, чем приложение с длинной последовательностью отражений. Поэтому измеряемая в D6 величина $\psi_{refl}^{(N)}$ полезна как инженерная диагностика конечной сетки. Более строгий критерий фокальной согласованности следует формулировать через $j_{coh}^{(N)}(\varepsilon)$, дополнительно ограничивающий фокальную ошибку и происхождение событий; его проверка остаётся будущей задачей.

13.4. Пассивное кодирование направления в состояние и обнаружение

Непосредственная техническая интерпретация многоветвистой транспортной карты — пассивное кодирование направления в состояние. Координата или угол падающего луча преобразуются геометрией в дискретное или квазидискретное состояние: PASS, RETURN по одной из нескольких полос либо состояние с характерной конечной длительностью пребывания. Датчики в физических выходах, зонах противоположного рупора или выбранных кольцевых областях могут считывать это состояние без необходимости перемещать или переключать саму геометрию.

Плотное конечноволновое сканирование показывает, что волновой аналог необязательно разрывен. Вместо этого направление запуска может кодироваться непрерывным вектором наблюдаемых: амплитудой в целевой области, спектральной целевой метрикой, долей вынужденного возврата, долей возврата после отключения источника, интегралом пребывания, фазой или временем прихода. Необычно устойчивая по трём разрешениям доля вынужденного возврата F/T свидетельствует, что относительные переменные состояния могут быть более надёжными инженерными наблюдаемыми, чем абсолютная амплитуда поля.

Такое устройство было бы пассивным геометрическим предварительным преобразователем, а не источником энергии. Его потенциальная задача — преобразовывать информацию о направлении в пространственный, временной или модальный рисунок, который может быть измерен конечным набором датчиков и декодирован аналитически либо статистически.

13.5. Многополосные угловые селекторы и геометрические маршрутизаторы

Чередование полос PASS/RETURN предполагает многополосный угловой приём вместо единственного порога. В лучевой реализации одни входящие направления можно вести к

противоположному рупору, тогда как соседние будут выходить через центральное отверстие. Следовательно, геометрия с несколькими T_i может действовать как пассивный угловой маршрутизатор или многоканальный фильтр приёма.

Положение и ширину полос необходимо определять для полного состояния источника и косости, поскольку N_T не фиксируется одной коникой. Закон задаёт фокальный каркас, а транспортный атлас — карту маршрутизации. Инженерная оптимизация должна одновременно учитывать ширину полос, ориентацию границ, допуски изготовления и сглаживание на волновом масштабе.

13.6. Фокально-селективное формирование переходного поля

Испытания концентрации при конечной длине волны указывают на вторую возможную функцию: формирование переходного состояния поля вокруг внутренней фокальной прямой или цилиндрической поверхности, предсказанной точным лучевым законом. В общий ранний момент после отключения источника t=5 фокально-согласованный точный PHB создал более узкий и сильный отклик в полосе $\rho \approx R$, $|x| \le a$, чем проверенные расфокусированные, гладкие, прямолинейные и плоские контрольные варианты источника. Это положительный конечноволновой результат, наиболее непосредственно связанный с законом сжатия. Поскольку равенство заданных токов источника не означает равенства подведённой мощности, речь пока идёт о дифференциальном эффекте концентрации/перераспределения, а не о выигрыше в эффективности.

Если будущие эксперименты с нормировкой на принятую мощность воспроизведут этот эффект, геометрия PHB может использоваться как пассивный пространственный согласованный фильтр: волновой фронт, близкий к унаследованному фокальному семейству, будет создавать различимое переходное состояние, а несогласованные фронты — более широкое или слабое. Возможные приложения: измерение направления, классификация волновых фронтов, различение состояний источника и геометрически поддерживаемая предварительная обработка сигналов акустических или электромагнитных антенных решёток.

13.7. Управление пребыванием и длиной взаимодействия

Уровень времени пребывания — третья независимая проектная цель. Число отражений внутри одной полосы RETURN может изменяться от нескольких событий до значительно более длинных последовательностей и необязательно монотонно зависит от расстояния до транспортной границы. Поэтому геометрия, оптимизированная по переносу, автоматически не оптимизирована по времени пребывания.

Возможные применения включают увеличение длины пути, управление временем взаимодействия с поглощающей или чувствительной средой, задержанный выход и временное кодирование. Эти направления требуют явной модели потерь, поскольку более длинный геометрический путь может столь же легко увеличить затухание, как и полезное взаимодействие.

13.8. Масштабирование для электромагнитных и акустических реализаций

Лучевой закон инвариантен при равномерном масштабировании геометрии, но физический волновой прибор определяется также длиной волны, граничными условиями и материальными параметрами. Поэтому испытание геометрического закона на одном масштабе не гарантирует автоматически того же волнового эффекта на другом. Для электромагнитных и акустических реализаций необходимо сохранять соответствующие безразмерные волновые параметры и учитывать потери, импеданс и режим источника.

Практический путь проверки — изготовление масштабных полостей, сравнение с согласованными контрольными поверхностями и измерение пространственных карт поля,

потоков и временного отклика. Требование к эксперименту — различать фокальное сжатие лучевого каркаса, транспортные классы и наблюдаемое конечноволновое перераспределение, не подменяя одно другим.

14. Область применимости, ограничения и недоказанные положения

1. Только лучевой уровень. Точный закон относится к геометрической оптике идеальных зеркально отражающихся лучей. Он не является полноволновой теоремой и не устанавливает усиления интенсивности.

2. Идеальная граница. Шероховатость, материальные потери, конечная проводимость, импеданс и толщина стенки в точной лучевой теореме не моделируются.

3. Граничные ребра и острия. Гиперболическая поверхность регулярна на переходном кольце, но составная граница отражения и выхода имеет там ребро событий. Идеальное осевое остриё сингулярно для поверхности вращения; необходимо задавать приоритет событий.

4. Транспорт на уровне сечений. Сокращение FTSS обозначает упорядоченный набор границ порядка событий на выбранном сечении, а не доказанную глобальную инвариантную сепаратрису фазового пространства.

5. Неразрешённые сечения. 487 из 37 248 адаптивных сечений остаются неразрешёнными. Их распределение по β неслучайно и ограничивает выводы о максимальном числе ветвей и долях FTI.

6. Регулярность при малом J. Квадратичное развёртывание условно: необходимы локальная гладкость и сохранение происхождения событий. При перескоке ветвей зависимость может быть негладкой.

7. Пребывание около T. На исследованном масштабе смещений расходимость не обнаружена, однако математическая теорема о конечности времени пребывания в пределе не доказана.

8. Постоянное удержание вне точного фокального состояния. Других невыходящих лучей в проверенном конечном корпусе не найдено; это не доказывает глобального отсутствия захваченных множеств.

9. Причинная роль кривизны. $K<0$ на регулярном открытом рупоре при $a<|x|<L$ и стремится к нулю вблизи переходного кольца. Однако роль кривизны не отделена от фокальной геометрии и других параметров поверхности.

10. Интерпретация конечноволновых данных. Геометрическое сжатие семейства само по себе не означает энергетического усиления, высокой добротности, узкой полосы или готового лазерного устройства.

11. Ограничения конечноволнового масштабирования. Результаты Maxwell/FDTD получены для определённых геометрий, источников, разрешений и частотных диапазонов; их нельзя без дополнительных расчётов переносить на любой диапазон длин волн или технический масштаб.

15. Программа экспериментальной и конечноволновой верификации

Последовательная программа верификации включает две уже исследованные вычислительные ветви: фокально-селективное перераспределение и направленный отклик от T к F. Остаётся определить, какие наблюдаемые поля, потока, фазы и затухания сохраняются после нормировки на принятую мощность, изменения полосы частот, введения потерь, технологических отклонений и экспериментального шума.

Первая ветвь — фокально-селективное образование поля. Точный РНВ возбуждается фазовым профилем, согласованным с внешней фокальной геометрией, и сравнивается с расфокусированными, гладкими, кусочно-линейными, пустыми и нефокальными контрольными вариантами. Расчёты в общий момент времени уже показывают воспроизводимое раннее сужение/перераспределение при одинаковом заданном токе источника. Решающий следующий шаг — нормировка на принятую мощность вместе со сканированием полосы частот и потерь, чтобы отличить селективность геометрического состояния поля от предполагаемого выигрыша по КПД или резонансному накоплению.

Вторая ветвь — направленное отображение состояний от стороны PASS через T, интервал $T<\xi<F$ и F до области правее F. Плотные направленные сканирования выполнены при N_res=140 и 160, опорные расчёты T/F — при N_res=180. Они показывают гладкий, а не разрывный конечноволновой отклик: метрики типа концентрации уменьшаются с координатой запуска, суммарный вынужденный перенос к противоположному рупору увеличивается, доля возврата после отключения источника снижается, а время пребывания изменяется умеренно. Решающие оставшиеся проверки — согласованные непсевдогиперболоидные контроли с тем же калиброванным направленным источником, энергетический баланс с нормировкой на принятую мощность, сканирования полосы частот и экспериментальное воспроизведение.

Для любого утверждения об уровне устройства обязательны сходимость по сетке и полосе источника, нормировка на принятую мощность, замыкание энергетического баланса, чувствительность к фазе, чувствительность к PML и портам, материальные потери и сравнение с согласованными контролями. Для заявления о преимуществе накопления энергии или резонансного хранения дополнительно необходимы энергетический баланс с потерями и анализ добротности и полосы. Нынешние расчёты устанавливают геометрические и селективные по состоянию признаки, но не усиление, высокую Q или готовое устройство.

15.1. Почему сканирование T–F физически различает механизмы

Для канонической ориентации единственной границы лучевой закон предсказывает PASS при $\xi<T$ и RETURN при $\xi>T$, тогда как точная фокальная координата F находится внутри RETURN. Поэтому волновая наблюдаемая, меняющаяся около T, и другая наблюдаемая с максимумом около F были бы прямым проявлением математической неэквивалентности транспортной и фокальной организации при конечной длине волны. Напротив, отсутствие такого разделения опровергло бы предложенную волновую интерпретацию, не затрагивая теорему о точном лучевом сжатии.

15.2. Различимые исходы последовательной волновой программы

Возможны несколько научно различных исходов. Если выход/перенос меняется около T, а кольцевая концентрация достигает максимума около F, волновое поле демонстрирует раздельные признаки транспортной и фокальной организации. Если транспортный признак появляется у T, но специфическая концентрация РНВ при F отсутствует, значит транспортная структура имеет конечноволновое проявление, а гипотеза фокальной концентрации не подтверждается в данном диапазоне или режиме возбуждения.

Если максимум концентрации появляется в F и для точного РНВ, и для согласованных контрольных геометрий, эффект, вероятно, преимущественно обусловлен фазированным источником, а не фокальным наследованием РНВ. Напротив, специфическая концентрация РНВ, сохранившаяся при проверках сетки, полосы, фазы и контролей, обосновала бы следующий этап исследования потерь и энергетической добротности. Максимум пребывания вдали от T и F усилил бы трёхуровневую интерпретацию, а не противоречил ей.

Следовательно, программа проверки предназначена для потенциального опровержения, а не для демонстрации заранее принятого вывода. Фокально-селективное формирование поля обязано выдержать нормировку мощности и контроли; направленные переменные состояния — воспроизводиться при изменении разрешения, полосы и материалов; любое преимущество пребывания или хранения энергии — проверяться независимо от транспортного разделения. Отсутствие конечноволнового признака само по себе не опровергает точное рекуррентное соотношение t_{n+1}=κt_n, тогда как его нарушение на заявленном идеальном фокальном семействе опровергло бы сам закон.

15.3. Текущие конечноволновые свидетельства и оставшиеся решающие проверки

Завершённый направленный набор данных отвечает на иной качественный вопрос, чем раннее исследование концентрации у фокальной прямой: отклик конечной длины волны гладок при прохождении лучевой границы T и внешней фокальной координаты F, без найденного разрывного переключения поля при T и локального максимума концентрации при F. Этот отрицательный направленный результат не отменяет положительного раннего переходного перераспределения у внутреннего множества L_0/C_0, поскольку исследования используют разные наблюдаемые и геометрические цели. Относительные T/F-показатели, особенно совокупная доля вынужденного возврата и нормированное пребывание, значительно устойчивее по сетке, чем ряд абсолютных амплитуд при N_res=140–180. Решающий дальнейший этап — направленные контроли с непсевдогиперболоидными поверхностями, нормировка принятой мощности, учёт полосы и потерь и экспериментальное воспроизведение.

16. Вычислительные пакеты для верификации

Вместе с препринтом размещены два канонических архива для воспроизводимости. Архив скриптов содержит точные аналитические верификаторы, независимый аудит фокального закона, стандартные и адаптивные трёхмерные лучевые расчёты, структурное сканирование при фиксированном R/a, расчёты малой косости и фокально-транспортной инверсии, скрипты Maxwell/FDTD конечной длины волны и итоговый центральный двумерный пример с четырьмя границами при закрытых рупорах для рисунка 19 и таблицы 5. Архив данных содержит принятые первичные и производные численные материалы, полный адаптивный корпус (33 216 широких сечений плюс 4032 целевых), стандартный трёхмерный набор, сканирование при фиксированном R/a, принятые конечноволновые результаты v3.1, заключительную серию v4.0 из 18 случаев, независимый точный аудит и машиночитаемые координаты границ и данные представительных лучей рисунка 19 и таблицы 5. Более ранний пример с четырьмя границами и усечёнными вершинами сохраняется лишь как дополнительное свидетельство и не является геометрией рисунка 19.

При воспроизведении необходимо различать проверку теоремы и проверку вычислительных следствий. Точное меридиональное сжатие можно независимо проверить из замкнутых аналитических формул. Для границ порядка событий необходимы заявленные приоритеты событий и двусторонняя проверка классов. Конечноволновые наблюдаемые требуют полного указания геометрии, конвенции источника, разрешения, временного окна и определений метрик. Неудача на одном уровне доказательности не опровергает автоматически другой уровень.

17. Выводы

Строго доказанный результат — рекуррентное соотношение фокального сжатия t_{n+1}=κt_n для регулярного унаследованного фокально-сопряжённого семейства идеальной геометрии PHB-2 в инвариантном меридиональном секторе J_x=0. Физическое продолжение явно установлено: последовательные точки стенки лежат на противоположном физическом рупоре,

встречаются раньше внешнего фокуса и асимптотически приближаются к переходным кольцам, не пересекают центральную поверхность выхода. Для физической интерпретации ещё важнее, что весь участок свободного перелёта между рупорами равномерно сходится к внутреннему отрезку $L_0=\{|x|\le a,\rho=R\}$ прямой, соединяющей внешние фокусы исходной гиперболы. Максимальный поперечный промах $\varepsilon_n=\Delta\rho_n$ имеет точное одношаговое отношение $\kappa(1-t_n^2)/(1-\kappa^2 t_n^2)$ и асимптотическое отношение κ; осевое превышение координат конечных точек затухает с асимптотическим коэффициентом κ^2. Предельная точная орбита имеет бесконечную длину пути и не является накоплением событий за конечное время по типу Зенона.

Перенос по порядку событий — отдельный уровень. Полная карта терминальных событий может содержать PASS, RETURN и TIP_EXIT, тогда как бинарная карта PASS/RETURN ограничена подобластью без TIP_EXIT. Адаптивные расчёты разрешают многоветвистые сечения, конечные окна RETURN и фокально-транспортную инверсию, но 487 из 37 248 адаптивных сечений остаются неразрешёнными. Поэтому утверждения о топологии — вычислительные результаты конечной области, а не универсальные глобальные теоремы.

Конечный осевой момент импульса обеспечивает локальное трёхмерное развёртывание, но не автоматическое продолжение точного рекуррентного соотношения. Целевая проверка поддерживает чётный, почти квадратичный закон первого виртуального фокального промаха при локальной гладкости и сохранении происхождения событий и независимо разрешает фокально-транспортную инверсию на конкретном сечении. Малый фокальный промах при первом переносе не гарантирует длительного сохранения последовательности событий.

Конечноволновые испытания Maxwell/FDTD содержат положительный и отрицательный результаты, которые необходимо разделять. Положительно то, что в общий ранний момент $t=5$ фокально-согласованный точный PHB демонстрирует воспроизводимую дифференциальную концентрацию и сужение вблизи внутренней полосы L_0/C_0 относительно проверенных контролей при небольшом расхождении главных ранних метрик на двух разрешениях. Отрицательно то, что плотное направленное сканирование не воспроизводит лучевую карту событий как разрывное переключение поля при T и не даёт локального максимума концентрации в опорной внешней фокальной координате F. Отсутствие пика в F не противоречит наблюдаемому внутреннему фокально-линейному перераспределению. Поскольку нормировка на принятую мощность, полоса частот, потери и эксперимент ещё не замкнуты, положительный результат — это переходный признак перераспределения/концентрации поля, а не доказательство усиления, КПД, резонансного хранения или готового устройства.

Итоговая формулировка намеренно узка: новый локальный закон отражения не заявляется. Вклад работы — глобальное рекуррентное соотношение в замкнутой форме для определённого псевдогиперболоидного лучевого семейства и проверяемая иерархия, разграничивающая фокальную геометрию, транспорт по порядку событий, структуру времени пребывания и конечноволновые наблюдаемые. Эта иерархия создаёт математически явную основу дальнейших исследований в геометрической волновой инженерии.

Приложение A. Примечания к доказательствам и выводам

A.1. Знак кривизны

На открытом рупоре $a<|x|<L$ дифференцирование (2) даёт $\rho''>0$, а формула (6) при $\rho>0$ — $K<0$. При $|x|\to a+$ значение $K\to 0$; переходное кольцо — регулярная предельная точка гиперболической поверхности, а не её геометрическая сингулярность. Идеальное осевое остриё $\rho=0$ требует отдельного предельного рассмотрения.

A.2. Сохранение J_x

Нормаль к поверхности вращения лежит в локальной меридиональной плоскости и потому не имеет компоненты вдоль азимутальной касательной. Зеркальное обновление скорости меняет лишь её проекцию на нормаль. Азимутальная каноническая компонента, а следовательно и $J_x=\rho v_\varphi$, при отражении неизменны; при свободном полёте момент импульса также сохраняется.

A.3. Доказательство фокального сжатия

Уравнения (13)–(17) дают полный вывод. Ключевым алгебраическим шагом служит факторизация (16). Множитель $1+st$ не может обратиться в нуль на физической области $0\le s,t<1$. Оставшийся множитель точно линейный и даёт постоянный коэффициент сжатия κ.

A.4. Сжатие семейства и показатель фокального сжатия

Для двух состояний t и $t+\delta t$ на одной унаследованной фокальной ветви точное аффинное отображение имеет производную κ, поэтому $\delta t_{n+1}=\kappa\delta t_n$ без ошибки линеаризации. Итерация даёт (30). Следовательно, $\Lambda_F=-\ln\kappa$ — точный показатель сжатия в t-пространстве на один унаследованный перенос. Его нельзя путать с показателем Ляпунова полного бильярда, поскольку он относится к ограниченному семейству.

A.5. Общее восстановление бассейнов

Уравнение (51) получается суммированием ориентированных скачков классов относительно опорного состояния. Разность функций Хевисайда автоматически меняет знак для ξ левее ξ_0 и восстанавливает бассейны по упорядоченному набору границ на заданном сечении.

A.6. Параметрические свойства κ

Обозначая $C=(1+\beta^2)^{(1/2)}$, $\kappa=(C-1)/(C+1)$ и дифференцируя, получаем $d\kappa/d\beta=2\beta/[C(C+1)^2]>0$. Разложение при $\beta=0$ даёт $\kappa=\beta^2/4-\beta^4/8+5\beta^6/64+O(\beta^8)$. При $\beta\to\infty$ имеем $\kappa=1-2/\beta+2/\beta^2-1/\beta^3+O(\beta^{-5})$. Эти соотношения количественно показывают ослабление сжатия за перенос с ростом b/a.

A.7. Канонический угловой порядок и трансверсальность FTI

При $\theta(q)=\operatorname{atan2}[R,q-x_s]$ производная $d\theta/dq=-R/[(q-x_s)^2+R^2]<0$. Поэтому $T<F$ означает $\theta_T>\theta_F$ на канонической положительной ветви. Для продолженной транспортной ветви определим $g_i(\mu)=T_i(\mu)-F$. Простая трансверсальная FTI удовлетворяет $g_i=0$ и $dg_i/d\mu\neq0$, что гарантирует локальную смену знака и инверсию порядка. Касание $g_i=0$ без смены знака — только координатное совпадение.

A.8. Ограниченный характер отображения сжатия семейства

Производная $\partial t_{n+1}/\partial t_n=\kappa$ точна на унаследованном фокальном семействе. Она не является определителем полного отображения возврата бильярда. Поэтому $\Lambda_F=-\ln\kappa$ — показатель сжатия фокального семейства на унаследованный перенос, который нельзя отождествлять с общим показателем Ляпунова или производством энтропии при консервативной зеркальной динамике.

Приложение B. Сводные численные свидетельства

В приложении обобщены принятые агрегированные лучевые данные; промежуточные разведочные значения исключены из научных утверждений.

Таблица 11. Сводный корпус принятых вычислительных свидетельств.

Элемент корпуса	Число	Интерпретация
Стандартные сечения вычислительной перекрёстной проверки	1,350	Корпус проверок эталона, пересечений и симметрии
Широкое адаптивное сканирование малых и средних β	22,128	Адаптивные стартовые сечения
Широкое адаптивное сканирование больших β	11,088	Продолжение к большим β
Целевая серия LRT	4,032	Целевые сечения пребывания / RETURN
Всего адаптивных	37,248	36 761 разрешено локально; 487 не разрешено
Локальные границы порядка событий	71,049	Принятые локальные границы на разрешённых сечениях
Согласованные пары при малом J	4,656	Принятые парные испытания конечной кососи
Траектории времени жизни	514,654	Все рассчитанные траектории в итоге вышли

В научных выводах используются только принятые агрегированные значения и явно воспроизводимые диагностические случаи.

Приложение C. Вычислительные свидетельства, происхождение данных и полное итоговое резюме

В приложении фиксируются принятые данные о конечной кососи и конечноволновых эффектах, использованные в итоговом синтезе. Заключительный проверочный архив содержит 160 файлов по манифесту, все 160 внутренних значений SHA-256 независимо воспроизведены, а все 18 запланированных волновых случаев завершены.

C.1. Численный аудит слабой кососи

Таблица 12. Численная проверка слабой кососи и доказательный статус.

Диагностика	Результат	Статус
D1: виртуальный фокальный промах	p=2.000236; D2=0.394832; R^2=0.99999998	Убедительный вычислительный результат для конечной области
D2: T(j)	Delta(T/a)=0.058670 j^2 - 3.94e-06; R^2=0.999993	Убедительный вычислительный результат для конечной области
Прямая локализация FTI при косости	|psi|=36.175054 deg; |j|=0.288081	Вычислительный результат для выбранного сечения
D3: закрутка	turns~0.4122j+0.0016; R^2=0.999682	Описательный, не универсальный

C.2. Калибровка направленного источника

Таблица 13. Калибровка направленного источника в свободном пространстве.

Амплитуда H-тока	Прямой поток	Обратный поток	Прямой / обратный
-2.0	0.733993	0.023224	31.605197
-1.0	0.379835	0.024450	15.534933
-0.5	0.246872	0.069181	3.568509
+0.5	0.069181	0.246872	0.280229
+1.0	0.024450	0.379835	0.064371
+2.0	0.023224	0.733993	0.031640

C.3. Направленные волновые случаи T–F

Таблица 14. Представительные случаи направленного конечноволнового исследования T–F.

Разрешение	Состояние	q	θ (градусы)	Пиковый G	Спектральный G	Доля возврата	Доля возврата после источника	Пребывание	t10
120	СТОРОНА_PASS	0.843583	60.647	0.388393	0.442124	0.247599	0.519564	7.44285	20.0025
120	B_T	0.961205	57.348	0.382416	0.410327	0.272362	0.506019	7.49982	20.0025
120	МЕЖДУ_T_F	1.039619	55.275	0.377775	0.390274	0.289464	0.495107	7.51761	20.0025
120	B_F	1.118034	53.301	0.372641	0.371506	0.306839	0.482931	7.51796	20.0025
120	ПРАВЕЕ_F	1.235656	50.519	0.364113	0.346205	0.332881	0.462724	7.48450	20.0025
140	B_T	0.961205	57.348	0.537526	0.485938	0.240586	0.427610	5.85156	16.0080
140	B_F	1.118034	53.301	0.527800	0.451530	0.274337	0.408221	5.96007	16.0080

Все потоки в C.3 — определённые решателем прокси-показатели, а не лучевые вероятности. Пребывание — интеграл внутренней энергии после отключения источника, нормированный на максимум после отключения в данном случае. Заключительный плотный набор содержит девять состояний при N_res=140, семь при N_res=160 и опорные T/F при N_res=180; эти данные позволяют проверять гладкость направленного отклика и устойчивость относительных метрик.

C.4. Итоговая сводка устойчивости плотного волнового сканирования по разрешению

Плотное сканирование и опорные результаты T/F приведены в разделе 11.4. Наиболее устойчивая по сетке относительная конечноволновая величина в заключительном наборе — отношение долей совокупного вынужденного возврата F/T=1.140285, 1.140438 и 1.141022 при N_res=140, 160 и 180 соответственно. Это прокси-разделение потоков, определяемое решателем, и его нельзя трактовать как энергетическую эффективность, коэффициент усиления или вероятность лучевого возврата.

Литература

1. Born, M.; Wolf, E. Principles of Optics, 7th ed. Cambridge University Press, 1999.

2. Tabachnikov, S. Geometry and Billiards. American Mathematical Society, Providence, 2005.

3. Dragović, V.; Radnović, M. Geometry of integrable billiards and pencils of quadrics. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 85 (2006): 758-790.

4. Dragović, V.; Radnović, M. Poncelet Porisms and Beyond: Integrable Billiards, Hyperelliptic Jacobians and Pencils of Quadrics. Birkhäuser, 2011.

5. Stachel, H. The geometry of billiards in ellipses and their Poncelet grids. Journal of Geometry 112, 40 (2021). DOI: 10.1007/s00022-021-00606-2.

6. Chernov, N.; Markarian, R. Chaotic Billiards. American Mathematical Society, 2006.

7. Altmann, E. G.; Portela, J. S. E.; Tél, T. Leaking chaotic systems. Reviews of Modern Physics 85 (2013): 869-918. DOI: 10.1103/RevModPhys.85.869.

8. Lai, Y.-C.; Tél, T. Transient Chaos: Complex Dynamics on Finite-Time Scales. Springer, 2011.

9. do Carmo, M. P. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, 1976.

10. Glaeser, G.; Stachel, H.; Odehnal, B. The Universe of Conics. Springer, 2016.

11. Ries, H.; Shatz, N.; Bortz, J.; Spirkl, W. Performance limitations of rotationally symmetric nonimaging devices. Journal of the Optical Society of America A 14(10) (1997): 2855-2862. DOI: 10.1364/JOSAA.14.002855.

12. Sweet, D.; Zeff, B. W.; Ott, E.; Lathrop, D. P. Three-dimensional optical billiard chaotic scattering. Physica D 154 (2001): 207-218. DOI: 10.1016/S0167-2789(01)00235-4.

13. Hentschel, M.; Richter, K. Quantum chaos in optical systems: the annular billiard. Physical Review E 66 (2002): 056207. DOI: 10.1103/PhysRevE.66.056207.

14. Oskooi, A. F.; Roundy, D.; Ibanescu, M.; Bermel, P.; Joannopoulos, J. D.; Johnson, S. G. MEEP: A flexible free-software package for electromagnetic simulations by the FDTD method. Computer Physics Communications 181 (2010): 687–702.

15. Yee, K. S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media. IEEE Transactions on Antennas and Propagation 14(3) (1966): 302–307. DOI: 10.1109/TAP.1966.1138693.