Геометрическая волновая инженерия

Двумерная проверка принципа акустического пеленга в псевдогиперболоиде второго порядка

Фокальный транспорт, конечно-волновые состояния, размещение микрофонов и равноплощадные гладкие контроли

Хаустов Владимир Игоревич

ORCID: 0009-0007-3657-2309

Лаборатория геометрической волновой инженерии https://vihrihaosa.ru/

Лицензия: CC BY 4.0

Дата публикации: 10 сентября 2026 года

DOI: 10.5281/zenodo.22648152

Научно-технический перевод с английского языка.

Редакция, адаптированная для русскоязычного инженера-исследователя.

Оригинал: Khaustov. V. Two-Dimensional Numerical Proof of Principle for Geometry-Encoded Acoustic Direction Finding with a Second-Order Pseudohyperboloidal-Profile (PHB-2) Boundary. https://doi.org/10.5281/zenodo.22648152

Аннотация

Обычная пеленгация получает направление прихода звука из межсенсорных разностей времени, фазы или уровня, возлагая почти всю задачу пространственного различения на антенную решётку и последующую цифровую обработку. В данной работе реализован комплементарный принцип: пассивная граница сама выполняет часть измерения ещё до оцифровки, превращая разные направления прихода во внутренние спектральные и пространственные состояния. Специально спрофилированная поверхность становится аналоговым кодировщиком направления — действующим звеном измерительной цепи, а не пассивным корпусом.

Этот принцип «геометрия выполняет часть работы» реализован на меридиональном профиле псевдогиперболоида второго порядка (PHB-2). Ключевая конструкция здесь точная, а не эвристическая: для строго определённого меридионального семейства фокально-сопряжённых лучей последовательные фокальные переносы подчиняются закону $t_{(n+1)} = \kappa t_n$, где $\kappa = (\sqrt{(1+\beta^2)}-1)/(\sqrt{(1+\beta^2)}+1)$; при $\beta = b/a = 2$ коэффициент $\kappa = 0.381966$ — замкнутая формула без свободных параметров. Соответствующие отрезки между ветвями сходятся как множества к предельной хорде $L_0 = \{(x,\rho): |x|\le a, \rho=R\}$ с поперечной ошибкой $O(\kappa^n)$. Тем самым сама геометрия указывает $\rho = R$ как не произвольную, математически обоснованную кандидатную точку считывания.

Плоские скалярно-волновые расчёты (прямой FDTD и аналог на базе MEEP в поляризации H_z с условиями Неймана жёсткой стенки) показывают, что такая граница формирует воспроизводимое комплексное состояние, зависящее от направления, причём его отличительный признак — организация состояния, а не громкость. Точная PHB отличается от согласованных контрольных геометрий прежде всего по комплексной амплитуде и фазе: нормированные спектральные формы расходятся на ≈54.7°–56.1° (медиана 53.90° по 41 позиции) при почти равной норме, углы полно-полевых состояний достигают 25.2°–31.8° при практически равных прокси откликов, а в компактном тесте Regime B PHB сохраняет бóльшую направленную разделяемость в каждой позиции (средний запас +3.17°) при отрицательном прокси-усилении −0.17 дБ. Декодер, зафиксированный до оценки на удержанных углах, восстанавливает удержанные направления в протестированном секторе ±20°, а кандидатная хорда считывания размещает сенсоры по информативности направления, а не по локальной чувствительности.

Центральный вывод сформулирован осознанно и узко: точная PHB — точный аналитический эталон внутри кодирующего семейства PHB, а лучшими агрегированными показателями обладают ближайшие near-PHB профили (MAE 0.737° против 0.975° у точной PHB и 0.991° у гладкого контроля равной площади). Вклад работы — аналитически структурированная, воспроизводимая схема, в которой геометрия действительно выполняет документально подтверждённую часть цепи пеленгации, а не доказательство универсального превосходства над классическими методами.

Ключевые слова: акустическое определение направления; псевдогиперболоидальный профиль; геометрическая волновая инженерия; фокальный транспорт; геометрически обусловленное считывание; пассивное спектральное кодирование; согласованные контроли; скалярно-волновой FDTD; аналог MEEP; направление прихода на отложенных углах; размещение микрофонов.

Содержание

1. Введение 4
2. Связь с предшествующими работами и границы новизны 5
3. Геометрия РНВ и точная математика фокального транспорта 5
3.1. Построение РНВ-2 5
3.2. Пространственно переменная отрицательная гауссова кривизна 6
3.3. Точная теорема фокального сжатия и доказательство 7
3.4. Сжатие в физических координатах и предельная хорда 8
3.5. Обратная задача проектирования 9
4. Скалярно-волновая модель и вычислительный протокол 10
4.1. Основное уравнение, статус плоской модели и аналог жёсткой стенки 10
4.2. Формирование источника, поглощающая область и спектральное извлечение 11
4.3. Феноменологический стресс-тест с пониженной добротностью и без потерь 12
4.4. Два вычислительных режима 12
4.5. Направленные признаки и декодер для отложенных углов 13
4.6. Равноплощадные контрольные геометрии, фиксированные датчики, синтетические возмущения и отложенные разбиения 14
4.7. Микрофонная подсистема и размещение по информационному критерию 16
5. Широкополосные и полно-полевые численные свидетельства 17
5.1. Широкополосное знаковое кодирование при феноменологическом затухании 17
5.2. Нормированная спектрально-фазовая сигнатура на двух сетках 18
5.3. Полно-полевое перераспределение при согласованном возмущении профиля и исключении стенки 21
5.4. Зоны считывания и условная ошибка пеленга Монте-Карло 22
6. Компактная высокоразрешённая численная оценка 24
6.1. Компактная геометрия и сеточное уточнение при замороженном датчике 24
6.2. Контролируемое равноплощадное возмущение профиля 26
6.3. Основная замороженная инверсия на отложенных углах 28
6.4. Проверки отношения каналов и частотной абляции 29
7. Интегрированная физическая интерпретация 30
8. Иерархия утверждений, статистическая интерпретация и ограничения 31
9. Связь с трёхмерным продолжением 33
10. Воспроизводимость и доступность данных 34
10.1. Требования к верификации решателя и аналитические эталоны 34
10.2. Последовательность независимого воспроизведения 35
10.3. Карта «утверждение — доказательство — критерий опровержения» 37
10.4. Правила интерпретации 38
11. Научная новизна и границы приоритета 38
12. Выводы 39
Литература 40

1. Введение

Акустическое определение направления предназначено для оценки направления, с которого приходит звуковое поле. Традиционные системы получают эту информацию по временным, фазовым или амплитудным различиям между пространственно разнесёнными микрофонами. Такая архитектура эффективна, однако основная направленная селективность в ней обеспечивается массивом датчиков и последующей обработкой сигнала.

Другой класс подходов позволяет пассивной структуре вокруг датчика непосредственно участвовать в измерении. Рассеивающий объект, отражающая конструкция, искусственная ушная раковина, резонансная полость или метаматериал способны преобразовывать падающее поле так, что разные направления прихода формируют разные спектры или внутренние пространственные картины. Геометрия приёмника тем самым становится частью аналогового входного тракта, а не только механической опорой датчиков.

Термин **«Геометрическая волновая инженерия» (Geometric Wave Engineering, GWE)** используется здесь в намеренно ограниченном смысле для обозначения такого подхода к проектированию: геометрия пассивной границы специально выбирается так, чтобы обычное распространение волн выполняло полезное преобразование до цифрового декодирования. GWE не вводит нового акустического уравнения поля, нового микроскопического взаимодействия и не предполагает нарушения законов сохранения. Это подход, в котором в первую очередь проектируются граничные условия, испытываемые обычной волной.

Исследуемая граница является **псевдогиперболоидом второго порядка (PHB-2)**. Конструктивно исходной фигурой служит обычная гипербола. Её поперечная координата смещается от будущей оси вращения, после чего смещённая кривая вращается вокруг этой оси. Получаемая поверхность не является обычным квадрическим гиперболоидом вращения. В каждом меридиональном сечении образующая гипербола сохраняет два фокуса, а при вращении эти фокусные точки порождают круговые фокальные множества. Активные рупорные части поверхности имеют пространственно переменную отрицательную гауссову кривизну.

Выбор PHB обусловлен не просто наличием кривизны. Для строго определённого меридионального фокально-сопряжённого семейства лучей последовательные фокальные переходы подчиняются замкнутому закону сжатия. Этот закон задаёт аналитически определённый геометрический каркас и выделяет внутреннее предельное множество. Центральный физический вопрос работы состоит в том, сохраняет ли конечно-волновой звук полезную измеримую сигнатуру такой структурированной границы после учёта дифракции, интерференции, многократных отражений, накопления фазы и модового взаимодействия.

Цель настоящей работы — **плоская двумерная проверка принципа**. Вычислительной границей является меридиональный контур PHB, помещённый в декартову двумерную скалярно-волновую задачу. Такая конструкция полезна для проверки механизма и попыток его опровержения, однако она не является меридиональной редукцией трёхмерного осесимметричного акустического поля, цилиндрический волновой оператор которого содержит дополнительный член $(1/\rho)\ \partial p/\ \partial \rho$. Поэтому здесь ставится намеренно ограниченный вопрос: может ли плоский контур, выведенный из PHB, преобразовывать знак и величину акустического пеленга в воспроизводимое широкополосное комплексное состояние, сохраняется ли различимость относительно согласованных контролей и может ли декодер, откалиброванный только по выбранным направлениям, восстанавливать отложенные направления. Трёхмерная эффективность является отдельной задачей.

2. Связь с предшествующими работами и границы новизны

Пассивная структурно-ассистированная локализация как общий принцип не является новой. Искусственные ушные раковины и другие рассеивающие структуры давно применяются для создания зависящих от направления моноуральных спектральных признаков [7]. Резонансные или отражающие структуры вокруг микрофона также проектировались так, чтобы траектории распространения, резонансы или рассеивающие сигнатуры зависели от направления прихода [8,11]. Произвольные рассеивающие объекты способны формировать направленно-зависимые одноканальные сигнатуры без точной оптимизации геометрии [12], тогда как метаматериальные оболочки и более новые анизотропные акустические метаматериальные антенны демонстрируют пассивное спектральное кодирование для локализации и распознавания источников [9,13]. Эти подходы входят в более широкий класс методов локализации источников звука, рассмотренный в обзоре [10].

Поэтому настоящий препринт не заявляет приоритет на пассивное структурное кодирование направления, моноуральную спектральную локализацию или локализацию с помощью метаматериалов как общие принципы. PHB-специфический вклад уже. Во-первых, выбранный смещённый гиперболический профиль имеет точное ограниченное отображение фокального транспорта для строго определённого наследуемого меридионального семейства лучей [14]. Во-вторых, геометрия задаёт математически определённую предельную хорду на фокальной линии и тем самым не произвольный кандидатный радиус считывания. В-третьих, конечно-волновые состояния на этой геометрически обусловленной области и в её окрестности сравниваются с равноплощадным гладким эталоном, контролируемыми near-PHB-профилями и пустым эталоном при единых численных протоколах. В-четвёртых, финальная оценка направления выполняется на отложенных углах при правиле размещения датчика, замороженном до основного теста Regime B.

Дополнительные предшествующие работы ещё яснее очерчивают эту границу новизны: направление прихода оценивалось по зависящим от угла модальным колебаниям одной пассивной панели [15], а асимметричные малогабаритные моноуральные структуры использовались для создания зависящих от направления спектральных признаков [16]. Эти работы не содержат исследуемую здесь PHB-конструкцию фокального транспорта, но подтверждают, что пассивное структурно-ассистированное кодирование направления является более широким уже существующим подходом.

Исследуемая концептуальная цепочка имеет вид

точное ограниченное лучевое отображение → геометрически обусловленная кандидатная хорда считывания → плоское конечно-волновое комплексное состояние → калиброванная инверсия пеленга на отложенных углах.

Заявление о новизне относится к этой PHB-специфической аналитико-численной цепочке и сопровождающей её системе проверок на опровержение. Оно не означает, что PHB является единственным пассивным кодером, что $\rho = R$ является акустически уникальным или глобально оптимальным радиусом датчиков, что точный PHB является конечно-волновым оптимумом либо что плоский скалярный расчёт превосходит существующие методы массивной, статистической или обучаемой локализации.

3. Геометрия PHB и точная математика фокального транспорта

3.1. Построение PHB-2

В меридиональных координатах (x, ρ), где ρ — расстояние до оси вращения, радиально смещённая исходная гипербола задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(\rho - R)^2}{b^2} = 1.$$

Введём

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \beta = \frac{b}{a}, C = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \beta^2}.$$

Внутренняя рупорная ветвь, используемая для полости,

$$\rho_{horn}(x) = R - b\sqrt{\left(\frac{|x|}{a}\right)^2 - 1}, |x| \geq a.$$

Ветвь достигает оси вращения при $|x| = L$. Конечное входное окно радиуса R_1 на левом рупоре получается усечением ветви при $x = x_{in}$:

$$L = a\sqrt{1 + (R/b)^2}, x_{\square} = -a\sqrt{1 + [(R - R_1)/b]^2}.$$

Экваториальное замыкание, использованное в плоском двумерном вычислительном контуре, представляет собой меридиональный профиль внешней половины тора:

$$\rho_{cap}(x) = R + \sqrt{a^2 - x^2}, |x| \leq a.$$

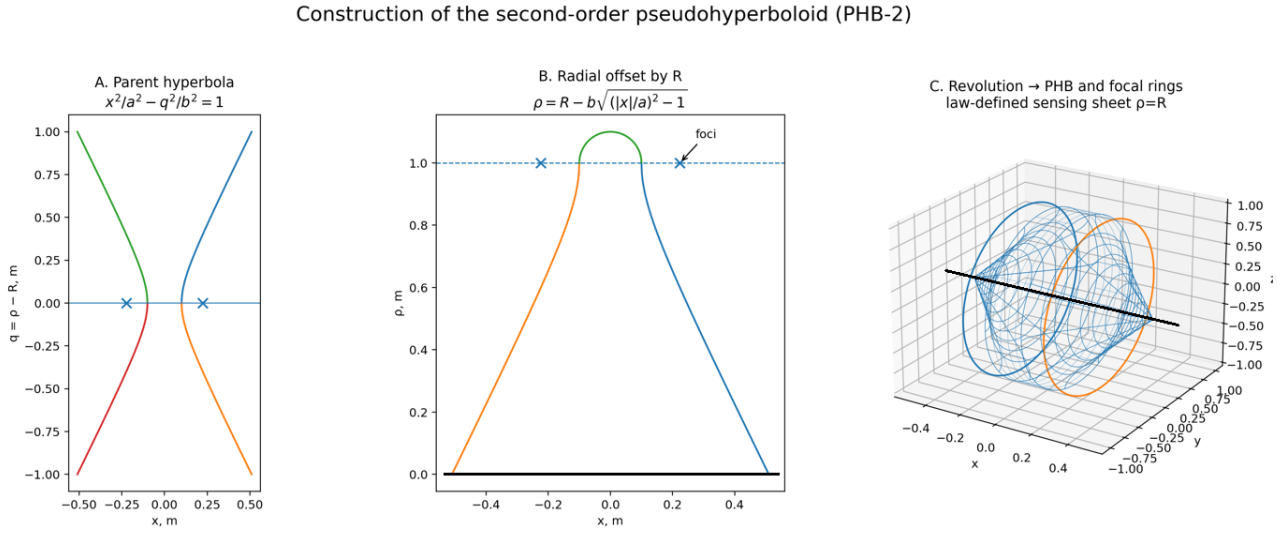

Рисунок 1. Построение PHB-2 непосредственно по уравнениям. (A) Исходная гипербола в локальной координате радиального смещения. (B) Радиальное смещение на R формирует меридиан PHB и две исходные фокусные точки в 2D-сечении. (C) Вращение преобразует фокусные точки в круговые фокальные множества, а линию $\rho = R$ — в соответствующий цилиндрический лист трёхмерной геометрической концепции. Вращение здесь служит только пояснением геометрии; все акустические расчёты настоящей работы остаются плоскими двумерными.

3.2. Пространственно переменная отрицательная гауссова кривизна

Для поверхности вращения

$$X(x, \varphi) = [x, \rho(x)cos\varphi, \rho(x)sin\varphi],$$

гауссова кривизна вне стыков равна

$$K(x) = \frac{-\rho''(x)}{\rho(x)[1 + \rho'(x)^2]^2}.$$

Для $x > a$ на активном рупоре

$$\rho''(x) = \frac{ab}{(x^2 - a^2)^{3/2}} > 0,$$

а на физической ветви $\rho > 0$, поэтому $K < 0$. Поскольку ρ, ρ' и ρ'' зависят от x, модуль $|K|$ пространственно переменен. Полутороидальное замыкание является отдельной геометрической частью, и формула кривизны рупора к нему не применяется.

Утверждение о гауссовой кривизне относится к связанной трёхмерной поверхности вращения. Это геометрический дескриптор активного рупора РНВ; он не является дополнительным членом двумерного скалярного волнового уравнения и сам по себе не создаёт акустического усиления или направленной информации.

Переход от рупорной ветви к замыкающей части является отдельным геометрическим стыком; согласование кривизны на этом стыке не предполагается и не используется в фокальной теореме. Поэтому любое конечно-волновое рассеяние, связанное с переходом, является частью исследуемой границы. Текущий плоский корпус расчётов не отделяет рассеяние на стыке от эффектов профиля рупора, поэтому наблюдаемое различие состояния не приписывается исключительно фокальному закону, гауссовой кривизне или переходу к замыкающей части.

3.3. Точная теорема фокального сжатия и доказательство

Точное отображение применимо только к **регулярному наследуемому меридиональному фокально-сопряжённому семейству**: последовательные зеркальные отрезки чередуются между двумя гиперболическими рупорами и наследуют классическое фокальное соотношение без промежуточного усечения или ухода луча через окно. Это не теорема для произвольных начальных состояний и не закон акустической энергии [14].

Параметризуем точку правой ветви:

$$x = acoshu, \rho - R = -bsinhu,$$

и введём координату половинного угла

$$t = tanh(u/2), 0 \le t < 1.$$

Пусть следующая наследуемая точка на противоположной ветви имеет половинно-угловую координату s. Тогда две точки стенки можно записать в виде

$$P = \left[\frac{a(1+t^2)}{1-t^2}, R - \frac{2bt}{1-t^2}\right],$$

$$Q = \left[\frac{-a(1+s^2)}{1-s^2}, R - \frac{2bs}{1-s^2}\right].$$

Сместим радиальную координату, положив $\eta = \rho - R$. Противоположный фокус исходной гиперболы имеет координаты $F_- = (-c, 0) = (-aC, 0)$ в плоскости (x, η). Классическое фокальное отражательное свойство гиперболы требует коллинеарности следующего наследуемого отрезка с соответствующей линией противоположного фокуса. Вычисляя

$$det$$

и сокращая ненулевые знаменатели, получаем точную факторизацию

$$(1 + st)[(C + 1)s - (C - 1)t] = 0.$$

На физических внутренних ветвях $0 \le s, t < 1$, поэтому $1 + st > 0$ и этот множитель не может обратиться в ноль. Физически допустимый множитель даёт

$$t_{n+1} = \kappa t_n, \kappa = \frac{C-1}{C+1} = \frac{\sqrt{1+\beta^2}-1}{\sqrt{1+\beta^2}+1}, 0 < \kappa < 1.$$

Отсюда итерацией

$$t_n = \kappa^n t_0.$$

Тем самым теоремный вывод завершён. Радиальное смещение R сокращается из выражения для κ; коэффициент сжатия зависит только от отношения полуосей исходной гиперболы $\beta = b/a$.

3.3.1. Математический статус ограниченного отображения

Производная

$$\frac{\partial t_{n+1}}{\partial t_n} = \kappa$$

точна внутри наследуемого фокально-сопряжённого семейства; локальная линеаризация не используется. Это **не** определитель полного отображения возврата бильярда и данную величину нельзя отождествлять с фазовым рассеянием, диссипацией или общим показателем Ляпунова. Зеркальные бильярды остаются консервативными. При необходимости для описания только данного ограниченного семейства можно определить геометрический показатель фокального сжатия

$$\Lambda_F = -ln\kappa$$

на один наследуемый переход. Коэффициенты сжатия физических координат при конечном t не постоянны; их асимптотические множители равны κ для радиального смещения точки стенки и κ^2 для избытка осевой координаты над переходным значением. Ни одно из этих соотношений не является законом усиления акустической амплитуды, интенсивности или мощности.

3.4. Сжатие в физических координатах и предельная хорда

Из тождеств для половинного угла следуют координаты точек стенки:

$$|x_n| = a\frac{1+t_n^2}{1-t_n^2}, \rho_n = R - \frac{2bt_n}{1-t_n^2},$$

где $t_n = \kappa^n t_0$. Введём

$$\Delta x_n = |x_n| - a, \Delta\rho_n = R - \rho_n.$$

Тогда

$$\Delta x_n = \frac{2at_n^2}{1-t_n^2}, \Delta\rho_n = \frac{2bt_n}{1-t_n^2},$$

и при $n \to \infty$

$$|x_n| - a \sim 2at_0^2\kappa^{2n}, R - \rho_n \sim 2bt_0\kappa^n.$$

Необходимо различать два уровня сходимости.

Сходимость точек удара. Любая допустимая наследуемая последовательность точек удара сходится к переходной точке рупора: $|x_n| \to a$ и $\rho_n \to R$. Следовательно, одна последовательность точек удара не сходится поточечно к внутренности отрезка $|x| < a$.

Сходимость межветвевых отрезков. Пусть P_n и Q_n — последовательные точки стенки на противоположных ветвях, а

$$\Gamma_n = \{(1-\lambda)P_n + \lambda Q_n : 0 \le \lambda \le 1\}$$

— полный прямолинейный лучевой отрезок между ними в развёрнутом фокально-транспортном построении. Поскольку $P_n \to (a, R)$ и $Q_n \to (-a, R)$ с точностью до порядка чередования ветвей, концы отрезка сходятся к концам

$$L_0 = \{(x, \rho) : |x| \le a, \rho = R\}.$$

Более того, выпуклая интерполяция даёт равномерную поперечную оценку того же порядка, что и радиальные ошибки концов, поэтому

$$d_H(\Gamma_n, L_0) = O(\kappa^n),$$

где d_H — расстояние Хаусдорфа между двумя компактными отрезками. Таким образом, именно **межветвевые отрезки**, а не отдельные точки отражения, сходятся как множества к L_0.

Терминологически L_0 далее называется **предельной хордой на фокальной линии**, а не «фокальным сегментом»: фокусы исходной гиперболы расположены в $(\pm c, R)$, причём $c > a$, и поэтому лежат вне самой хорды. Теорема точно фиксирует геометрический радиус $\rho = R$ этой предельной хорды. Она не доказывает, что $\rho = R$ является единственным или акустически оптимальным радиусом конечно-волнового датчика. Поэтому в настоящем препринте L_0 используется как **геометрически обусловленная кандидатная хорда считывания**, а осевая координата x_s определяется из конечно-волнового отклика.

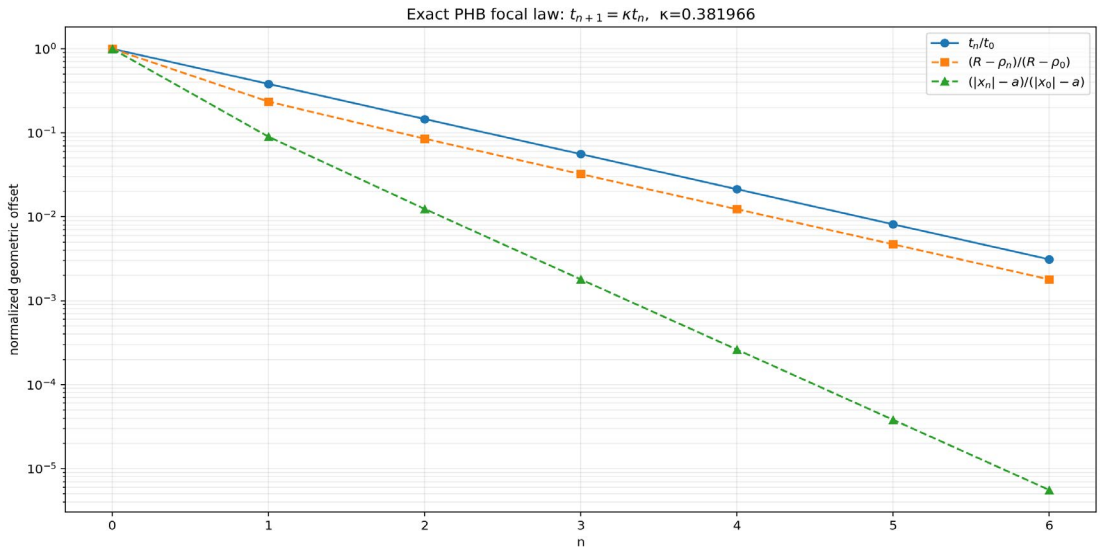

Рисунок 2. Точная последовательность фокального сжатия, рассчитанная по замкнутой рекуррентной формуле. Показанные величины являются геометрическими смещениями к предельной хорде; они не представляют акустическое давление, мощность или энергетическое усиление.

3.5. Обратная задача проектирования

Решая приведённое выше соотношение для коэффициента сжатия относительно параметра формы гиперболы, получаем

$$\beta = \frac{2\sqrt{\kappa}}{1-\kappa}.$$

Это обратное соотношение выделяет одну точную геометрическую проектную переменную. Оно не утверждает, что точность пеленга является однопараметрической функцией к: апертура, R/a, замыкание, масштаб по длине волны, потери, протяжённость

источника, координата датчика и декодер остаются независимыми конечно-волновыми переменными.

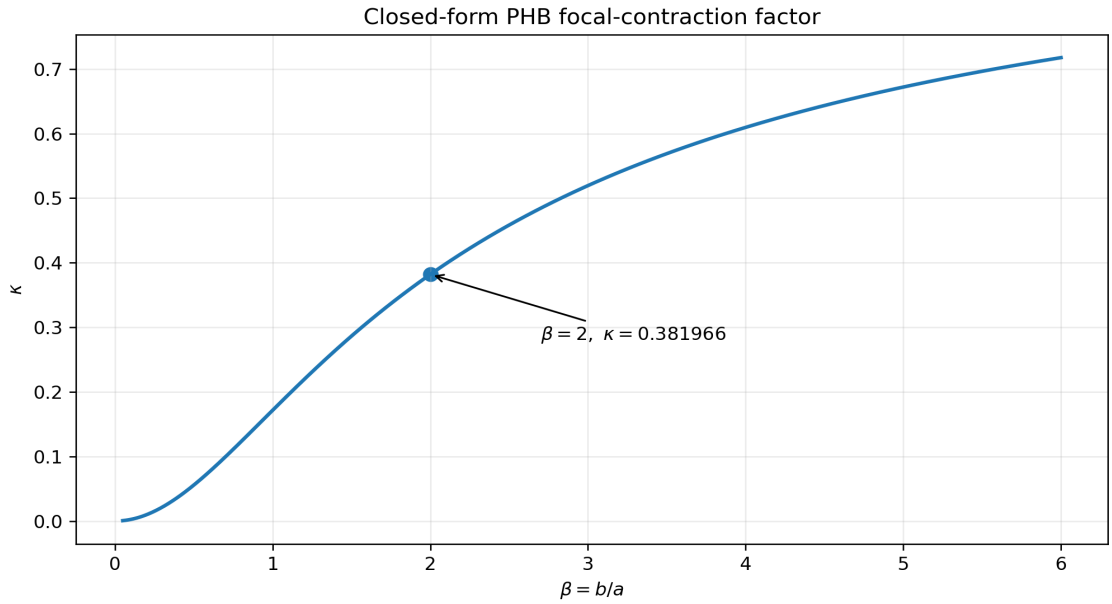

Рисунок 3. Замкнутая зависимость $\kappa(\beta)$. Кривая является геометрическим свойством наследуемого фокального отображения и не зависит от акустической амплитуды.

Таблица 1. Геометрия PHB в Regime A, использованная в широкополосных и полно-полевых расчётах.

Параметр	Значение	Роль
a	0.100 м	полуось гиперболы / половина длины переходной области
b	0.200 м	поперечный масштаб гиперболы
beta=b/a	2.000	отношение формы
R	1.000 м	радиальное смещение и геометрически мотивированный кандидатный радиус считывания
R_1	0.200 м	радиус левого входного окна
c	0.2236068 м	модуль меридиональной абсциссы фокуса
L	0.5099020 м	пересечение рупора с осью
kappa	0.381966011	точный коэффициент фокального сжатия

4. Скалярно-волновая модель и вычислительный протокол

4.1. Основное уравнение, статус плоской модели и аналог жёсткой стенки

В прямых акустических расчётах используется скалярное уравнение давления в однородной жидкости [1,2,4]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c_0^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right), \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{on an ideal rigid wall.}$$

Это **декартова плоская двумерная модель**. Она не является меридиональной редукцией трёхмерного осесимметричного акустического поля. Для сравнения, осесимметричное поле $p(x, \rho, t)$, не зависящее от азимута, удовлетворяло бы уравнению

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c_0^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} \right).$$

Дополнительный цилиндрический член отсутствует в представленных плоских расчётах. Следовательно, все утверждения об акустической эффективности относятся только к плоской полости с профилем PHB и не являются доказательством поведения полного трёхмерного или осесимметричного акустического устройства.

В корпусе результатов использованы две численные реализации. Ранние широкополосные и полно-полевые ветви используют прямой скалярный FDTD во временной области. Поздние расчёты высокого разрешения выполнены в MEEP [5,6] в однородной двумерной поляризации H_z как скалярном волновом аналоге. В этой поляризации тангенциальное электрическое поле на идеальном проводнике пропорционально нормальной производной H_z; поэтому условие идеального проводника $E_t = 0$ влечёт $\partial H_z / \partial n = 0$. Поле H_z MEEP используется только как математический скалярный аналог акустического давления у жёсткой стенки. Оно не является электромагнитной мощностью, не воспроизводит термовязкую акустику и не устраняет различие между плоской и осесимметричной задачами.

4.2. Формирование источника, поглощающая область и спектральное извлечение

В прямой широкополосной FDTD-ветви угол прихода задаётся конечной линией источника с задержкой: задержка изменяется вдоль линии как $y\sin\theta/c_0$, формируя наклонный волновой фронт. Передаточные функции получают из преобразований Фурье с окном Ханна для зарегистрированного сигнала и опорного сигнала источника. Сохраняются только частотные отсчёты, где спектр источника выше заранее заданного порога надёжности:

$$H(f) = \frac{F\{h(t)w(t)\}}{F\{s(t)w(t)\}}.$$

В ветвях MEEP конечная линейная система источников с задержкой возбуждает наклонный широкополосный гауссов импульс. Все заданные DFT-частоты накапливаются за один временной прогон; для каждой сравниваемой геометрии при одном и том же угле используется идентичный импульс источника. Внешняя вычислительная область завершается идеально согласованными слоями (perfectly matched layers, PML). Для компактной конфигурации финальной кампании высокого разрешения используется диапазон 2.5–4.0 кГц, одиннадцать DFT-каналов и 0.012 с затухания после окончания источника. Воздушные отступы области, длина источника и толщина PML масштабируются с длиной волны и размером полости и фиксируются в архивной конфигурации до сравнения геометрий.

Предписание задержек вдоль линейного источника задаёт номинальный угол прихода, используемый скриптами. Текущий двумерный корпус не содержит независимой аналитической или свободнополевой невязки для фактически сформированного угла фронта волны, поэтому эти значения рассматриваются как углы возбуждения, заданные скриптом, а не как экспериментально откалиброванные углы падения. Аналогично, 0,012 с послесигнального затухания в Regime B является фиксированным выбором протокола; отдельная последовательность сходимости по длительности затухания здесь не заявляется.

Полно-полевая ветвь v27 использует синхронную равноамплитудную мультисинусоиду Шрёдера на точных гармониках измерительного окна и накапливает два последовательных временных окна. Согласие между окнами используется как диагностический критерий стационарности и остаточного переходного процесса. Эта

ветвь формирует комплексные поля $H(x, y, f)$ во всей общей внутренней области, а не только на двух трассах датчиков.

4.3. Феноменологический стресс-тест с пониженной добротностью и без потерь

Базовое уравнение с жёсткой стенкой не содержит потерь. В ветви с пониженной добротностью намеренно добавляется отдельное однородное модовое затухание для проверки сохранности направленного кода при уширении резонансов. Непосредственно моделируемое уравнение имеет вид

$$p_{tt} + \sigma p_t = c_0^2 \nabla^2 p, \sigma = \frac{2\pi f_{ref}}{Q_{ref}}.$$

Дополнительное уменьшение целевой Q применяется к уже рассчитанному импульсному отклику умножением на $\exp(-\Delta\gamma t)$, где

$$\Delta\gamma = \pi f_{ref}\left(\frac{1}{Q_{target}} - \frac{1}{Q_{base}}\right),$$

после чего выполняется обратное преобразование в частотное представление. Поскольку σ постоянно, Q_{ref} является калибровочным значением на опорной частоте f_{ref}, а не постоянной добротностью во всём диапазоне; для данного феноменологического члена приближённо $Q(f) \propto f$. Поэтому операция описывается как **стресс-тест с постоянным коэффициентом затухания, откалиброванным по Q_{ref} на f_{ref}**, а не как физическая модель материала с постоянной низкой добротностью. Этот тест предназначен для попытки опровержения устойчивости к затуханию и не должен трактоваться как модель термовязкого пограничного слоя, реального импеданса стенки или структурного демпфирования оболочки.

4.4. Два вычислительных режима

Корпус доказательств намеренно включает две различные безразмерные конфигурации PHB. Это взаимодополняющие кампании, которые нельзя интерпретировать как одну последовательность сеточной сходимости одной неизменной полости.

Таблица 2. Вычислительные режимы и их различные научные роли.

Пункт	Regime A: масштаб закона / широкополосный	Regime B: компактный / высокое разрешение
Основная роль	широкополосный механизм, спектральная сигнатура, полно-полевые и зональные тесты считывания	сеточная устойчивость, контролируемое возмущение профиля, финальная проверка на отложенных углах
Безразмерная геометрия	beta=2, R/a=10, R_1/R=0.2	beta=2, R/a=4, R_1/R=0.2, a/lambda=0.8 при 4 кГц
Основной диапазон частот	500–4000 Гц в тесте с затуханием; 2500–4000 Гц в полно-полевых ветвях	2500–4000 Гц, 11 DFT-каналов в финальной кампании
Конечное разрешение	PPW = 56 в согласованных сравнениях	PPW = 56; один замороженный датчик проводится через PPW 12–56
Интерпретация	существование эффекта, чувствительность и проверки механизма на опровержение	компактная высокоразрешённая численная оценка на отложенных углах

Различие между режимами научно существенно. Regime A устанавливает широкополосное и полно-полевое поведение исходной полости масштаба закона с $R/a = 10$. Regime B изменяет безразмерную геометрию до $R/a = 4$ для исследования более компактного кандидата на существенно более высоком численном разрешении. Согласование выводов между двумя режимами является межкампанийным доказательством, а не формальной последовательностью сходимости одной неизменной физической геометрии.

4.5. Направленные признаки и декодер для отложенных углов

Пусть $H_+(f_k, \theta)$ и $H_-(f_k, \theta)$ — комплексные передаточные отклики на верхней и нижней трассах геометрически обусловленной хорды $\rho = R$ в 2D-сечении. Компактная знаковая спектральная координата задаётся как

$$Z_k(\theta) = ln$$

Представление через отношение пары каналов:

$$r_k = \frac{H_+}{H_-},$$

$$F_{ratio} = \left\{ ln|r_k|, \Re \frac{r_k}{|r_k| + \varepsilon}, \Im \frac{r_k}{|r_k| + \varepsilon} \right\}_k.$$

Отношение каналов приближённо подавляет спектр источника, общий для обоих датчиков. Более богатое полное двухканальное представление сохраняет оба спектра датчиков и удаляет только общий уровень и общую фазу. Для объединённого двухканального вектора h

$$z = \frac{h}{rms(h)}, z' = zexp\left[-iarg\left(z_g\right)\right],$$

где z_g — фиксированная опорная компонента, выбранная только по калибровочным данным. Вектор признаков

$$F_{full} = [log|z'| - \langle log|z'| \rangle, \Re(z'), \Im(z')].$$

Компоненты признаков стандартизируются по среднему μ и масштабу σ, вычисленным только по калибровке. Линейная интерполяция между калибровочными углами образует плотную шаблонную кривую. Отложенное направление оценивается как

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{argmin} \left\| \frac{F_{meas} - F_{cal}(\theta)}{\sigma} \right\|_2.$$

Поскольку F_{full} сохраняет спектральную структуру источника, его более высокая точность должна интерпретироваться как устойчивость в пределах **проверенного семейства спектров источника**, а не как независимая от спектра источника локализация. Результат по отношению каналов служит дополнительным тестом, где общая структура источника подавляется сильнее.

Фазовый член $\arg(H_+ H_-^*)$ является многозначным по ветвям. Заявленная монотонность относится только к архивному проверенному угловому сектору и набору частот; она не предполагается сохраняющейся при произвольных переходах через $\pm\pi$. Аналогично, сырое отношение H_+/H_- может становиться плохо обусловленным около спектрального нуля знаменателя. Поэтому анализ отношения каналов рассматривается как вторичная диагностика и интерпретируется только на заранее определённых надёжных спектральных отсчётах. В физической реализации следует использовать явную регуляризацию нулей или эквивалентное кросс-спектральное представление.

4.6. Равноплощадные контрольные геометрии, фиксированные датчики, синтетические возмущения и отложенные разбиения

Равноплощадные гладкие контроли сохраняют существенный общий масштаб полости, удаляя точный рупорный профиль PHB. Near-PHB-контроли сохраняют конечные точки и площадь, одновременно вводя контролируемые возмущения профиля. В компактном высокоразрешённом тесте знаковые пары возмущений построены в сохраняющем конечные точки, нулевую площадь изменения и монотонность семействе; точный PHB соответствует $\delta = 0$. Пустая конфигурация является инженерным свободнополевым эталоном, а не согласованным конкурентным типом полости.

Эти гладкие эталоны являются равноплощадными сравнительными геометриями, а не полностью согласованными акустическими полостями. Равенство заключённой площади не фиксирует периметр, локальную кривизну, распределение длин путей или модовый спектр; эти различия остаются частью контролируемого сравнения геометрий.

Финальная политика размещения датчиков в компактной геометрии замораживается до основного теста на отложенных углах. Основная координата $x/a = +0.9$ наследуется из кампании сеточного уточнения, а для проверки пространственной устойчивости заранее объявлена область $|x/a| = 0.6{,}0.7{,}0.8{,}0.9$. Ни одна метка отложенного угла не используется для последующего выбора наилучшего датчика в основном результате.

Финальный протокол содержит четыре взаимодополняющих класса тестов в пределах дискретно исследованного сектора примерно $\pm 20°$:

1. интерполяционное разбиение A: калибровка $(-20, -10{,}0, +10, +20)°$, отложенные углы $(-15, -5, +5, +15)°$;
2. интерполяционное разбиение B: калибровка $(-20, -15, -5{,}0, +5, +15, +20)°$, отложенные углы $(-10, +10)°$;
3. центральное удержание: калибровка на всех дискретных углах, кроме $0°$, тест в $0°$;
4. диагностическая экстраполяция по краям: калибровка от $-15°$ до $+15°$, тест в $\pm 20°$.

Синтетические комплексные спектральные возмущения парно согласуются между геометриями за счёт исключения идентификатора модели из начального зерна генератора случайных чисел. Для общего абсолютного уровня один RMS-эталон шума, вычисленный по калибровочному отклику пустой конфигурации, используется для всех геометрий:

Здесь «held-out» («отложенный») означает исключение угла из подгонки декодера в рамках заявленного калибровочного разбиения; это не перспективный лабораторный слепой эксперимент. Комплексное спектральное возмущение 20 дБ является заданным скриптом численным стресс-тестом устойчивости, а не калиброванной моделью микрофонного шума; из этого обозначения не выводятся лабораторное отношение сигнал/шум, ковариация каналов или статистика шума окружающей среды.

$$\sigma_{noise,|\square|} = \frac{rms(H_{empty,cal})}{10^{SNR/20}}.$$

Тесты с относительным SNR, напротив, масштабируют возмущение по каждому отдельному сигналу. Основной опубликованный стресс-тест использует синтетическое комплексное спектральное возмущение с общим абсолютным уровнем 20 дБ. Калибровка выполняется для плоского спектра источника; в отложенных тестах используются наклонный, «дроноподобный», случайно-гладкий и спектр с вырезом. В отдельной частотной абляции удаляются выбранные спектральные каналы. Эти изменения спектра

источника и удаление каналов выполняются офлайн над уже рассчитанными передаточными функциями и не являются дополнительными полевыми симуляциями.

Основные метрики угловой ошибки:

$$MAE = \frac{1}{N}\sum_i \left|\hat{\theta}_i - \theta_i\right|, RMSE = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_i \left(\hat{\theta}_i - \theta_i\right)^2}.$$

Для сравнения полей и спектральных векторов используется комплексный угол состояния, инвариантный к общему уровню:

$$\alpha(u, v) = arccos\frac{|u^H v|}{\| u \|_2 \| v \|_2}.$$

Бутстрэп-интервалы, приведённые для сканирования датчиков Regime A, являются **условными процентильными интервалами Монте-Карло при заявленной модели синтетического спектрального возмущения**. Тысячи реализаций декодера с возмущением являются повторными выборками детерминированных передаточных функций и не могут трактоваться как тысячи независимых физических экспериментов.

Таблица 3. Численный протокол, извлечённый из архивных исполняемых скриптов.

Элемент протокола	Заявленная реализация
Волновая переменная	скалярное давление в прямом FDTD; MEEP используется только как аналог давления у жёсткой стенки
Источник с заданным углом	конечная линия источников с задержкой; одинаковое возбуждение для сравниваемых геометрий при каждом угле
Низкодобротный диапазон Regime A	500–4000 Гц; прямой плюс дополнительные стресс-тесты
Основной диапазон MEEP Regime A	2500–4000 Гц, 31 одновременный DFT-канал; углы от −20° до +20° с шагом 5°
Финальная физика поля Regime B	2500–4000 Гц, 11 DFT-каналов, 0.012 с затухания, PPW56 (примерно 653 ячейки/м)
PML и воздушные отступы компактной задачи	PML = max(0,15 м, 1,75λ); воздух слева = max(0,20 м, 2,3λ); воздух справа = max(0,15 м, 1,75λ); поперечный воздушный отступ = max(0,20 м, 2,3λ)
Дискретизация стенки	номинальная физическая толщина 1 мм с минимум двумя численными ячейками в компактной кампании
Повторы финального отложенного возмущения	40 парных синтетических спектральных реализаций на каждое полно-полосное отложенное условие
Базовое зерно псевдослучайного генератора	20260830; идентификатор модели исключён из парного зерна
Основные исключённые эффекты	термовязкий пограничный слой, вибрации оболочки, реальная механика микрофона, турбулентность и 3D азимутальное распространение

4.7. Микрофонная подсистема и размещение по информационному критерию

Фокальная теорема задаёт не произвольный **геометрический кандидат** для радиальной координаты считывания. В плоской модели $\rho = |y|$, а предельная хорда

$$L_0 = \{(x, \rho): |x| \le a, \rho = R\}$$

представлена двумя трассами $y = +R$ и $y = -R$. Двухканальная выборка поля в архивных расчётах имеет вид

$$S_{+(x_S)=(x_S,+R)}, S_{-(x_S)=(x_S,-R),|x_S|<a.}$$

Внешние фокальные трассы исходной гиперболы являются геометрическими организаторами ограниченной лучевой теоремы и **не** являются координатами микрофонов. Точная геометрия мотивирует радиус R, тогда как осевая координата x_s не фиксируется лучевым законом и должна определяться по конечно-волновой информации. Не менее важно, что имеющийся корпус расчётов не содержит систематического радиального сканирования вне $\rho = R$; следовательно, этот радиус не заявляется как единственный или глобально оптимальный акустический радиус считывания.

Поэтому положение микрофонов оценивается по направленной информации, а не только по локальной величине отклика. Используются разделение комплексных состояний, ошибка на отложенных углах, правильность знака, устойчивость к общему абсолютному синтетическому спектральному возмущению и локальная прокси-метрика отклика по квадрату давления относительно согласованных контролей. Точка с высоким уровнем отклика может быть плохой точкой пеленга, а точка с меньшим откликом — более информативной, если комплексное состояние сильнее изменяется с направлением.

В Regime A из архивных массивов передаточных функций оценены 19 кандидатных положений пары на L_0. Непрерывная группа координат $x_s = -0.090, -0.080$ и -0.070 м одновременно даёт меньшую MAE PHB на отложенных углах относительно равноплощадного гладкого контроля и положительный локальный выигрыш PHB/smooth по прокси-метрике отклика. Координата $x_s = -0.080$ м является лучшим проверенным компромиссом **внутри данного исследовательского сканирования**, но не заранее объявленным универсальным оптимумом. При $x_s = -0.060$ м PHB имеет низкую ошибку, несмотря на меньший локальный отклик относительно гладкого контроля, что непосредственно показывает несовпадение максимумов информации и амплитуды отклика.

В Regime B используется другая компактная геометрия, и положение считывания не перенастраивается после просмотра меток отложенных углов. Основная координата заморожена при $x_s/a = +0.9$, а заранее заданное краевое множество $|x_s|/a \in \{0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$ используется для проверки устойчивости при сеточном уточнении. Таким образом, Regime A картирует потенциально информационно богатые позиции, а Regime B проверяет заранее фиксированное правило считывания.

Численный датчик является идеальной точечной выборкой поля. Размер и направленность реальной мембраны, монтаж, собственный шум, разбаланс коэффициента передачи и фазы каналов, рассеяние корпусом, ошибка синхронизации и дрейф калибровки не входят в настоящую скалярную модель. Приводимые координаты поэтому являются волново-информированными точками выборки для будущего эксперимента, а не завершённой спецификацией микрофона.

4.7.1. Заданная скриптом двухканальная геометрия

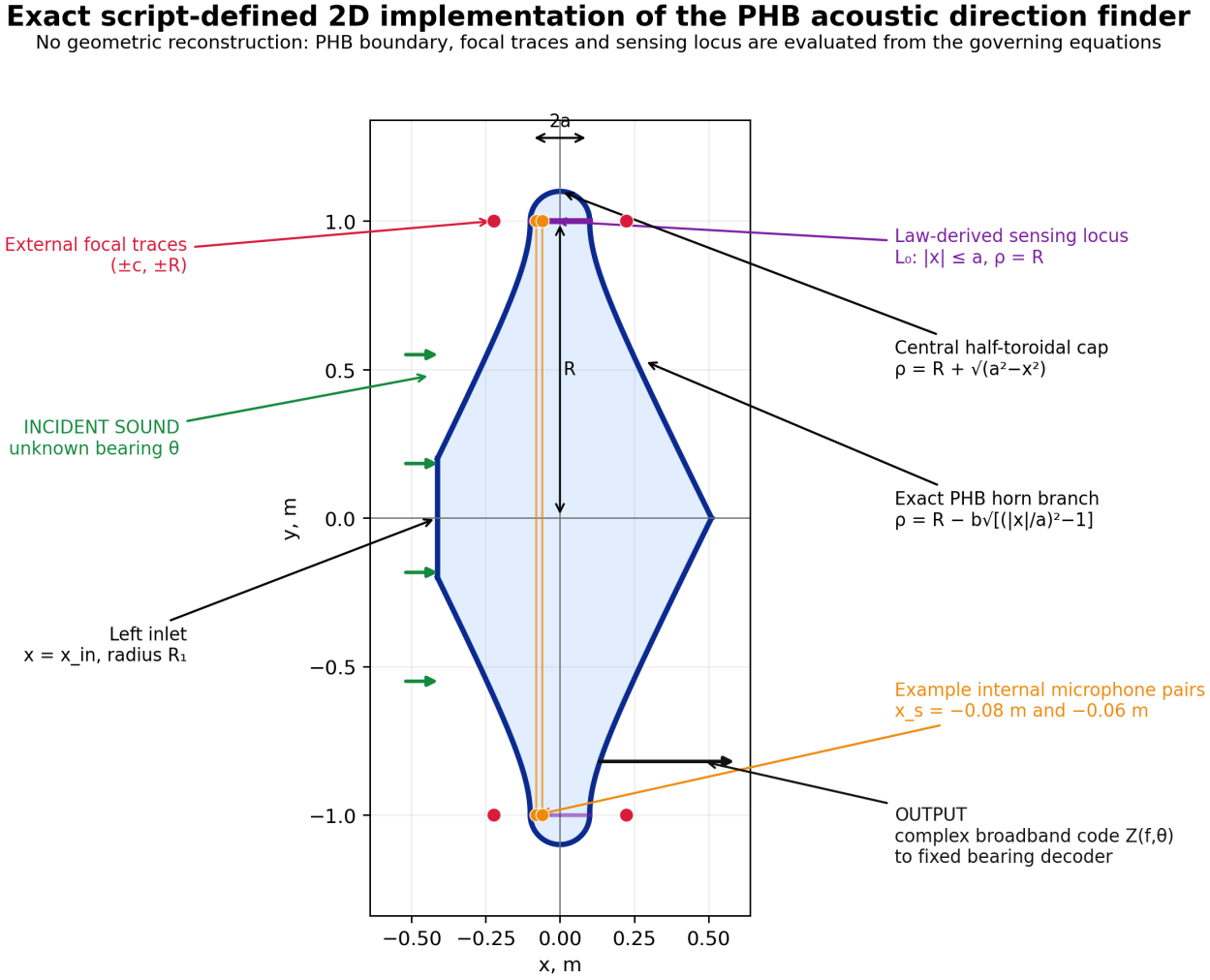

Рисунок 4. Заданная скриптом плоская двумерная реализация акустического пеленгатора на профиле PHB. Граница, выведенная из PHB, внешние фокальные трассы и геометрически обусловленная предельная хорда рассчитываются из основных уравнений. Показанные положения Regime A являются кандидатными координатами выборки поля, а не универсально оптимальными местами микрофонов.

5. Широкополосные и полно-полевые численные свидетельства

5.1. Широкополосное знаковое кодирование при феноменологическом затухании

Первый тест широкополосной устойчивости проверяет, сохраняется ли информация о знаке направления вне одного узкого резонанса. При широкополосном стресс-тесте с коэффициентом затухания дифференциальная координата PHB остаётся монотонной и почти линейной в исследованном диапазоне знаковых углов, с R^2 в интервале 0.989–0.993. Это подтверждает сохранение широкополосного дифференциального кода в заявленной модели. Результат не выделяет единственный резонанс как физический механизм и не преобразует коэффициент фокального сжатия в коэффициент волнового усиления.

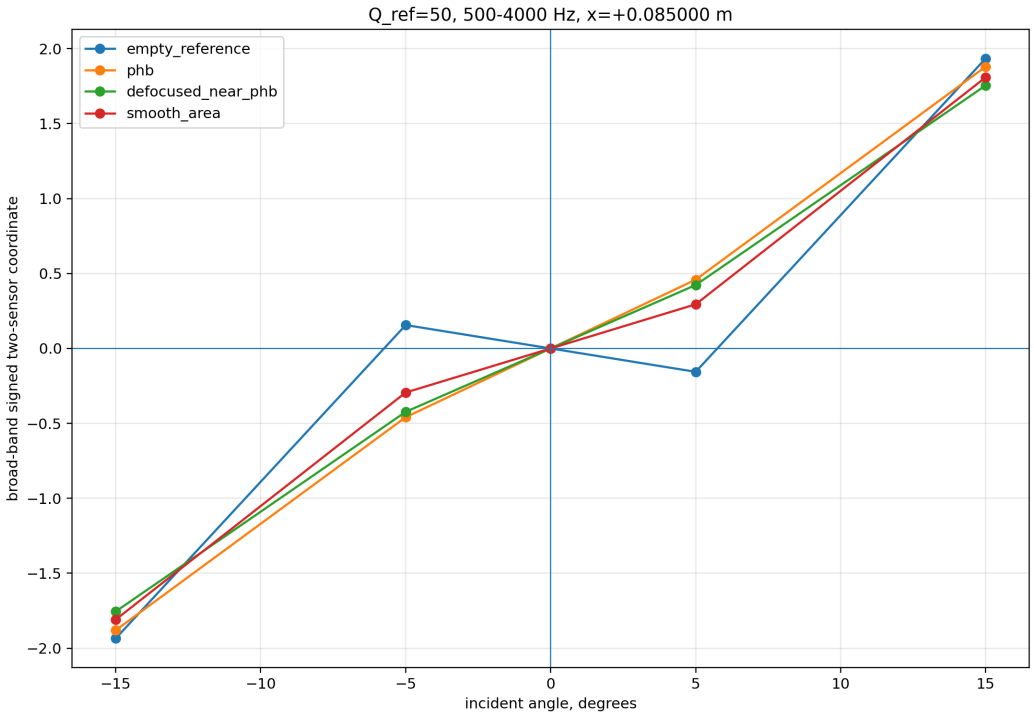

Рисунок 5. Широкополосная знаковая двухсенсорная координата на тонкой сетке при стресс-тесте $Q_{ref} = 50$. График является непосредственным конечно-волновым результатом скрипта и не представляет лучевой закон.

Смысл рисунка 4 состоит в направленной монотонности, а не в абсолютной величине отклика. Поэтому последующие тесты нормируют форму состояния, используют согласованные контроли и оценивают инверсию на отложенных углах вместо выбора геометрии по необработанной амплитуде.

Согласованные контроли также могут демонстрировать монотонные скалярные угловые координаты в некоторых низкодобротных редукциях. Почти линейная зависимость одной дифференциальной координаты поэтому не используется как критерий уникальности. Более строгие РНВ-специфические признаки исследуются в нормированной комплексной спектральной форме, распределённом полном поле, контролируемых возмущениях профиля и инверсии на отложенных углах.

5.2. Нормированная спектрально-фазовая сигнатура на двух сетках

В более строгом тесте из отклика пары вычитается обычный свободнополевой отклик и берётся нечётная угловая компонента между $+15°$ и $-15°$. При $x_s = -0.020$ м РНВ и равноплощадный гладкий контроль имеют почти одинаковую норму нечётного отклика на обеих сетках, однако их нормированные комплексные спектральные формы разделены на 54.6597° и 56.0830°. Соответствующие нормированные расстояния равны 0.9182 и 0.9402. Антисимметрия РНВ составляет 0.999932 и 0.999915, а нечётная норма РНВ изменяется между двумя сетками всего на 0.606%.

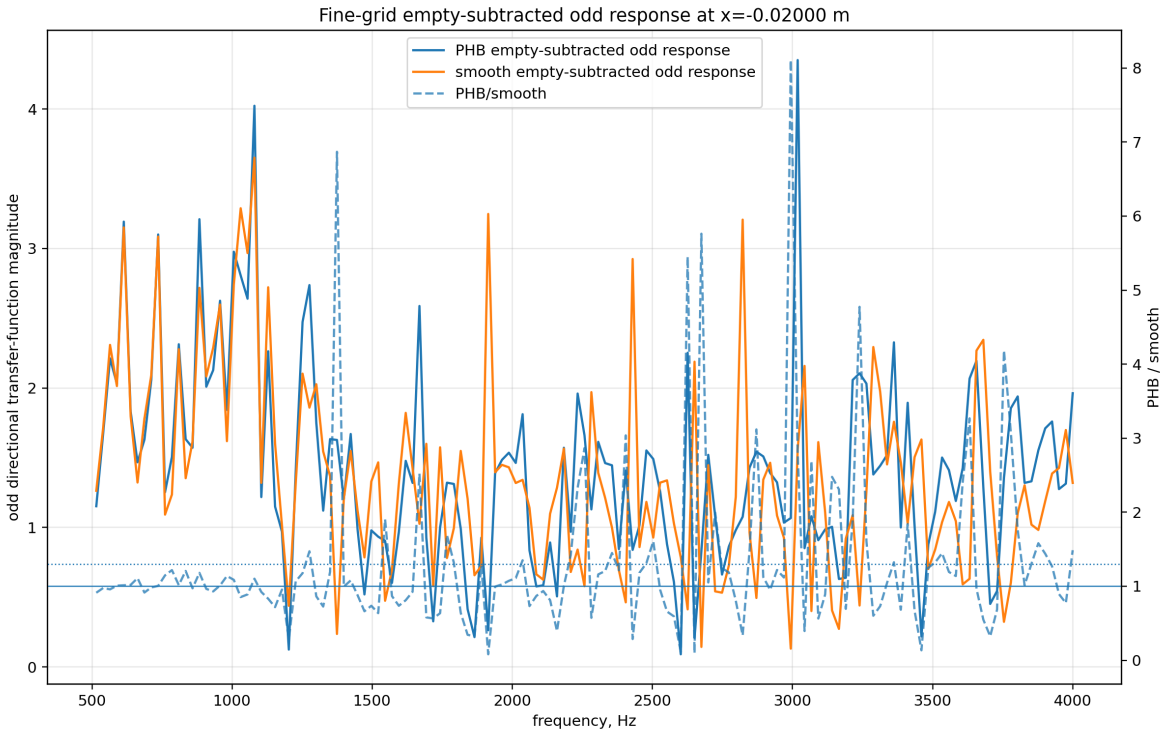

Рисунок 6. Нечётные спектры после вычитания пустого пространства в двухсеточном сравнении. Близость полной нормы не означает близости комплексной спектральной формы.

Различие распределено в пространстве. Для 41 внутреннего положения минимальный угол PHB/smooth по двум сеткам находится в диапазоне 49.07°–58.48°, медиана 53.90°; в 39 из 41 положения угол превышает 50°. Медиана минимального нормированного расстояния равна 0.906, минимальная антисимметрия — 0.999849, а медиана межсеточного изменения нечётной нормы — 0.78%. Позднее выявленная область малой ошибки при отрицательных x располагается внутри той же широкой полосы разделения состояний.

По тому же 41-точечному сканированию минимальное отношение нечётной компоненты к численному нулевому шуму превышает 1.09×10^4, а 90-й процентиль межсеточного изменения нечётной нормы составляет 3.57%. Эти диагностические показатели поддерживают численную устойчивость нормированной направленной сигнатуры, но не трактуются как формальное доказательство асимптотической сходимости.

Двухсеточный результат пространственно перекрывается с поздней областью малой ошибки микрофона. В интервале $x_s = -0.090 \ldots -0.060$ м минимальный двухсеточный угол PHB/smooth остаётся приблизительно 50.03°–56.44°, а уровень PHB в том же диапазоне примерно на 0.080–0.135 дБ выше гладкого контроля. Независимое повторное появление этой левосторонней области уменьшает риск того, что поздний результат на отложенных углах был выбран из единственной изолированной постфактум координаты. Архивная 41-точечная трасса включена ниже.

5.2.1. Интегрированная проверка пространственной согласованности по 41 положению

Архивная трасса ранжирования по двум сеткам служит независимой проверкой пространственной согласованности. Нормированная направленная сигнатура PHB/smooth остаётся большой по всем 41 проверенным положениям и перекрывает позднюю левую область Regime A с малой ошибкой. Это перекрытие **не** является доказательством исключительной причинности фокального закона; оно показывает только, что координаты

малой ошибки лежат внутри более широкой численно устойчивой полосы разделения состояний.

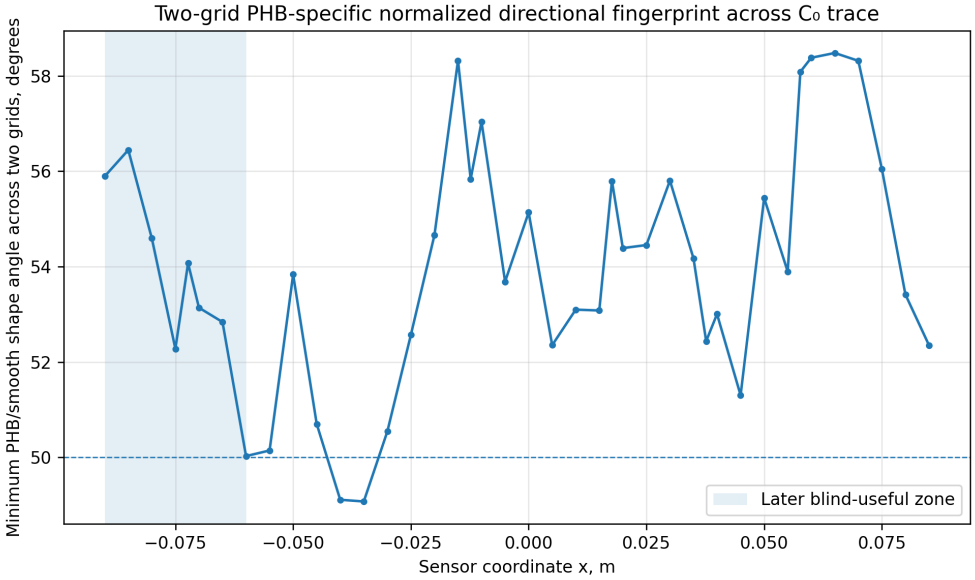

Рисунок 7. Минимальный двухсеточный угол нормированной направленной сигнатуры PHB/равноплощадного гладкого контроля вдоль 41-точечной трассы. Заштрихована поздняя левосторонняя область Regime A с малой ошибкой. Рисунок построен по архивной таблице ранжирования позиций.

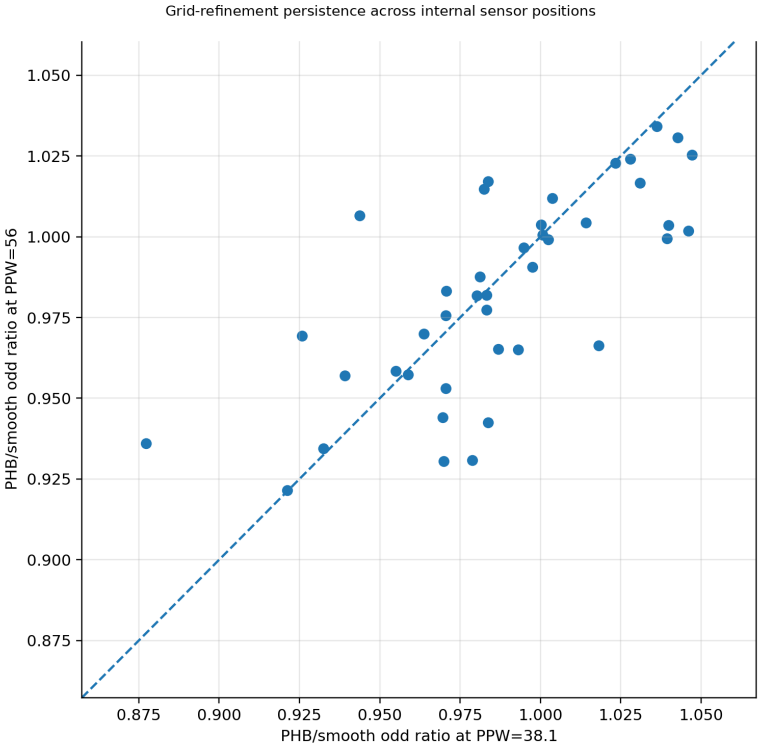

Рисунок 8. Сравнение по сеткам нормированной метрики нечётного отклика PHB/smooth вдоль внутренних положений датчика. Сохранение облака около тренда идентичности используется как диагностика численной устойчивости.

5.3. Полно-полевое перераспределение при согласованном возмущении профиля и исключении стенки

Близкий near-PHB-контроль сохраняет конечные точки и площадь, изменяя точный профиль. При PPW56 полные комплексные поля сравниваются для $-15°$, $0°$ и $+15°$ на синхронизированных частотах. Интегральные прокси-метрики отклика по квадрату давления для точного PHB и near-PHB практически одинаковы, однако глобальный угол комплексного поля равен 25.20° при 0° и 31.78° при $\pm 15°$. Медианные локальные спектральные углы равны соответственно 26.54° и 30.81°. Следовательно, возмущение профиля перестраивает фазу и амплитуду без обязательного увеличения общего уровня отклика полости.

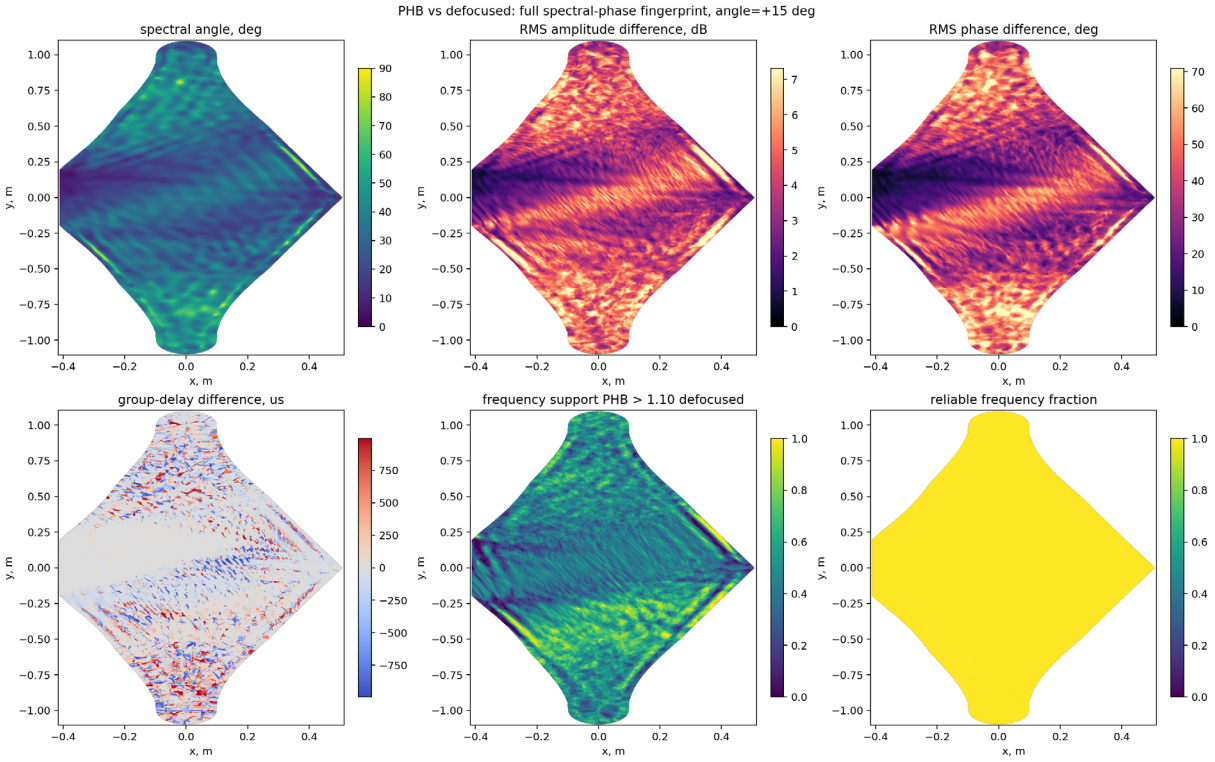

Рисунок 9. Сравнение поля точного PHB и согласованного near-PHB на тонкой сетке при +15°. Панели показывают распределённые различия спектрального угла, амплитуды, фазы, групповой задержки, частотной поддержки и стационарности, непосредственно сформированные вычислительным скриптом.

Повторный аудит локальных диагностик делает зависимость от профиля более явной. Медианное среднеквадратичное фазовое различие между точным PHB и 12-мм near-PHB-контролем составляет приблизительно 29.46°–37.23° на исследованных углах, а медианное различие групповой задержки — около -6.28 мкс при 0° и -3.87 мкс при $\pm 15°$. В окрестности геометрически мотивированной области считывания широкополосное отношение прокси-отклика PHB/near-PHB равно 1.241 при 0° и 1.370 при $\pm 15°$; в поддиапазоне 2.5–3.0 кГц оно возрастает до 1.366 и 1.680, а на 2597.66 Гц локальное отношение при $\pm 15°$ достигает 2.696 (+4.31 дБ). Это локальные прокси-метрики отклика и фазово-временные наблюдаемые, а не полная акустическая мощность или эффективность.

Для исключения тривиального объяснения различием растеризации границы из сравнения удаляются все точки в пределах 50 мм от изменённой стенки. Остаётся приблизительно 80.7% общей внутренней области, при этом медианный локальный угол состояния сохраняется на уровне 25.91° при 0° и 29.94° при $\pm 15°$. Когерентность между двумя временными окнами около 0.995, а ошибки зеркальной симметрии имеют порядок 10^{-6}. Следовательно, сохраняющееся различие является перестройкой внутреннего волнового

состояния в дискретизированной модели, а не просто сравнением разных стеночных ячеек.

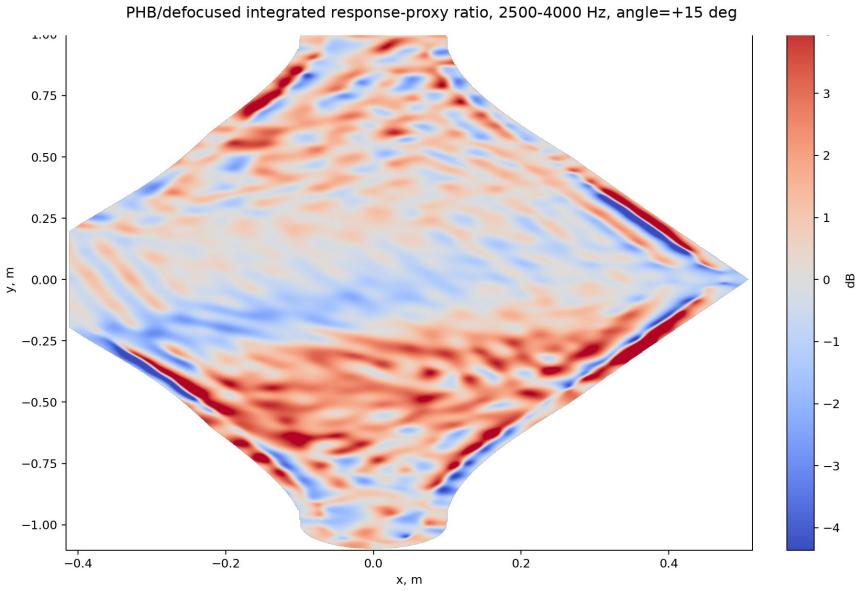

Рисунок 10. Широкополосное отношение прокси-метрики по квадрату давления точный PHB/near-PHB при +15°. Неоднородная пространственная картина демонстрирует перераспределение поля, а не равномерное усиление всей полости.

5.4. Зоны считывания и условная ошибка пеленга Монте-Карло

Необработанные массивы передаточных функций точного PHB, равноплощадного гладкого контроля и пустого эталона повторно обработаны для девяти углов и 19 кандидатных положений пары датчиков на $y = \pm R$. При общем абсолютном синтетическом комплексном спектральном возмущении 20 дБ несколько левосторонних координат одновременно обеспечивают меньшую MAE PHB на отложенных углах относительно smooth и положительный локальный выигрыш PHB/smooth по прокси-метрике отклика. Наиболее благоприятная точка не используется как главный результат поздней кампании Regime B; данное сканирование демонстрирует, что положение датчика является частью преобразователя.

Таблица 4. Представительные положения считывания Regime A при общем абсолютном синтетическом спектральном возмущении 20 дБ.

(м)	PHB MAE	Smooth MAE	Выигрыш PHB/smooth по прокси	Выигрыш PHB/empty по прокси
-0.090	0.775°	0.922°	+0.293 дБ	+9.30 дБ
-0.080	0.403°	1.048°	+0.750 дБ	+7.54 дБ
-0.070	1.487°	4.482°	+0.723 дБ	+5.69 дБ
-0.030	0.450°	1.344°	+0.118 дБ	+6.84 дБ

Повторный аудит Regime A даёт более широкую область полезной по точности работы приблизительно $-0.09 \le x_s \le -0.06$ м и более строгий двухцелевой набор -0.090, -0.080 и -0.070 м. Изолированная точка $x_s = -0.030$ м также удовлетворяет обоим критериям. При $x_s = -0.060$ м PHB остаётся существенно точнее smooth (0.426° против 2.024°), но локальная прокси-метрика PHB/smooth ниже на 0.250 дБ, прямо подтверждая,

что максимальный локальный отклик и максимальная направленная информация приходятся на разные положения.

При $x_s = -0.080$ м прокси-уровень отклика в 5.67 раза выше пустого эталона и в 1.19 раза выше гладкого контроля, а MAE меняется с 1.048° для smooth до 0.403° для PHB. Парный 95%-й бутстрэп-интервал средней разности ошибки PHB minus smooth равен $[-0.663°, -0.628°]$. Этот интервал характеризует условную неопределённость в рамках объявленного протокола Монте-Карло с синтетическим спектральным возмущением; это **не** экспериментальный доверительный интервал для изготовленного устройства. По всем 19 положениям PHB имеет меньшую 20-дБ MAE, чем smooth, в 10 точках; одновременно меньшая MAE и положительный локальный выигрыш PHB/smooth наблюдаются в четырёх точках.

В повторном анализе Regime A v29 для каждой координаты использовано 3600 парных ошибок (шесть отложенных углов × три спектра источника × 200 парных реализаций спектрального возмущения). 95%-е бутстрэп-интервалы средней разности ошибки PHB minus smooth равны −0,147° [−0,172,−0,121] при −0,090 м, −0,645° [−0,663,−0,628] при −0,080 м, −2,995° [−3,258,−2,741] при −0,070 м, −1,599° [−1,719,−1,480] при −0,060 м и −0,894° [−0,929,−0,858] при −0,030 м. Это условные интервалы Монте-Карло для детерминированных передаточных функций, а не экспериментальные доверительные интервалы. Полная зависимость ошибки и локального отношения отклика от положения показана на рисунках 11 и 12.

5.4.1. Интегрированная таблица положений и пояснение исследовательского статуса

Следующая таблица и рисунки сохранены в основном тексте именно потому, что сканирование датчиков Regime A имеет исследовательский характер и эффект выбора должен быть видим. Указанные интервалы Монте-Карло условны при каждой уже выбранной координате; они не учитывают неопределённость, связанную с предварительным просмотром 19 положений, и поэтому не должны интерпретироваться как постселекционные доверительные интервалы будущего изготовленного устройства.

Таблица 5. Положения Regime A, наиболее важные для выбора микрофонов. Отрицательные ΔMAE означают меньшую ошибку PHB относительно равноплощадного гладкого контроля в заявленной условной модели возмущений Монте-Карло.

(м)	PHB MAE	Smooth MAE	PHB/smooth proxy	PHB/empty proxy	Условный 95%-й интервал MAE
-0.090	0.775°	0.922°	+0.293 дБ	+9.30 дБ	[-0.172, -0.121]°
-0.080	0.403°	1.048°	+0.750 дБ	+7.54 дБ	[-0.663, -0.628]°
-0.070	1.487°	4.482°	+0.723 дБ	+5.69 дБ	[-3.258, -2.741]°
-0.060	0.426°	2.024°	-0.250 дБ	не используется как двухцелевая точка	[-1.719, -1.480]°
-0.030	0.450°	1.344°	+0.118 дБ	+6.84 дБ	[-0.929, -0.858]°

Непрерывный двухцелевой набор образуют $x_s = -0.090, -0.080$ и -0.070 м. Результат $x_s = -0.080$ м является лучшим проверенным компромиссом внутри данного исследовательского сканирования, тогда как $x_s = -0.060$ м показывает, что малая ошибка пеленга не требует максимального локального отклика. Поскольку сравнение координат выполнено после пространственного сканирования, значение 0.403° приводится как

лучший исследовательский результат и не используется как основной показатель оценки препринта.

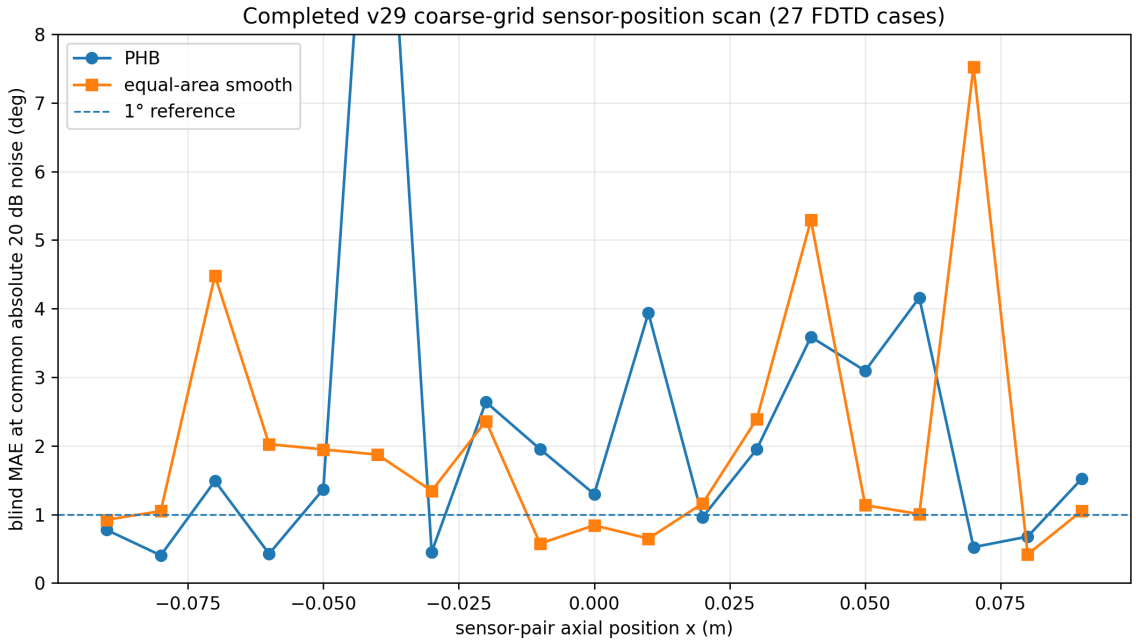

Рисунок 11. MAE на отложенных углах в Regime A в зависимости от осевой координаты пары микрофонов для точного PHB и равноплощадного гладкого контроля при общем абсолютном синтетическом спектральном возмущении 20 дБ. Сильная зависимость от координаты подтверждает, что положение считывания является частью преобразователя.

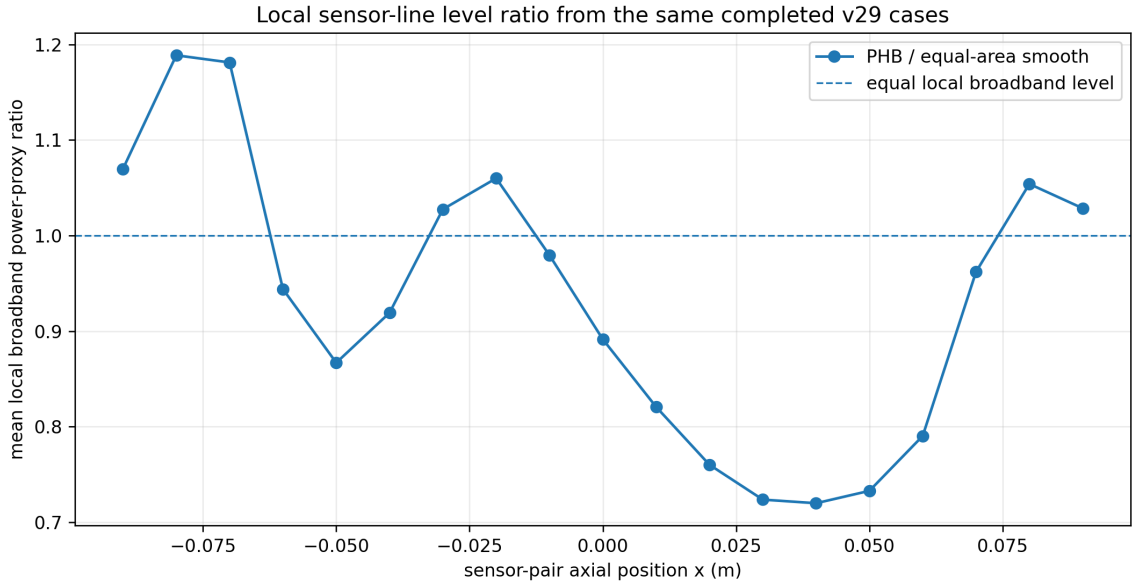

Рисунок 12. Среднее локальное широкополосное отношение прокси-метрики по квадрату давления PHB/равноплощадный smooth вдоль той же кандидатной хорды считывания. Сравнение с рисунком 11 показывает, что величина отклика и направленная информация не имеют одного и того же оптимума.

6. Компактная высокоразрешённая численная оценка

6.1. Компактная геометрия и сеточное уточнение при замороженном датчике

Компактная кампания изменяет безразмерный масштаб относительно Regime A, сохраняя $\beta = 2$ и, следовательно, тот же точный κ. Её цель — не продолжать сеточную

последовательность Regime A, а проверить более компактный высокоразрешённый вариант при одной замороженной координате считывания.

Таблица 6. Компактная геометрия Regime B.

Параметр	Значение	Роль
a/lambda	0.8	волновой масштаб на целевой частоте
a	68.6 мм	полуось гиперболы
b	137.2 мм	beta=2
R	274.4 мм	R/a=4
R_1	54.88 мм	$R_1/R=0.2$
максимальный диаметр	686 мм	внешний геометрический диаметр
моделируемая длина корпуса	282.83 мм	осевой размер корпуса
kappa	0.381966011	не меняется, поскольку beta=2

Одна и та же координата датчика $x/a = +0.9$ проводится через все сетки без перенастройки.

Таблица 7. Метрики сеточного уточнения при замороженном датчике.

PPW	Выигрыш PHB/smooth по прокси	Угол формы PHB/smooth	Разделение состояний PHB при ±15°
12	+1.012 дБ	16.131°	70.431°
16	+0.067 дБ	9.898°	70.571°
20	+0.040 дБ	10.458°	71.936°
24	+0.196 дБ	13.200°	76.047°
28	+0.294 дБ	12.635°	74.887°
32	+0.745 дБ	13.108°	73.984°
36	+0.534 дБ	12.579°	73.761°
40	+0.745 дБ	10.707°	72.364°
44	+0.469 дБ	10.186°	71.339°
48	+0.661 дБ	11.225°	73.009°
52	+0.684 дБ	10.944°	73.102°
56	+0.681 дБ	10.524°	73.224°

На самой тонкой сетке сохраняются угол формы PHB/smooth 10.524°, разделение состояний при $\pm 15^\circ$ 73.224° и локальный выигрыш по прокси-метрике +0.681 дБ. Более существенно для численной устойчивости, последовательность PPW48 → PPW52 → PPW56 изменяет направленное разделение лишь с 73.009° до 73.102° и 73.224°, а выигрыш по прокси меняется +0.661 → +0.684 → +0.681 дБ.

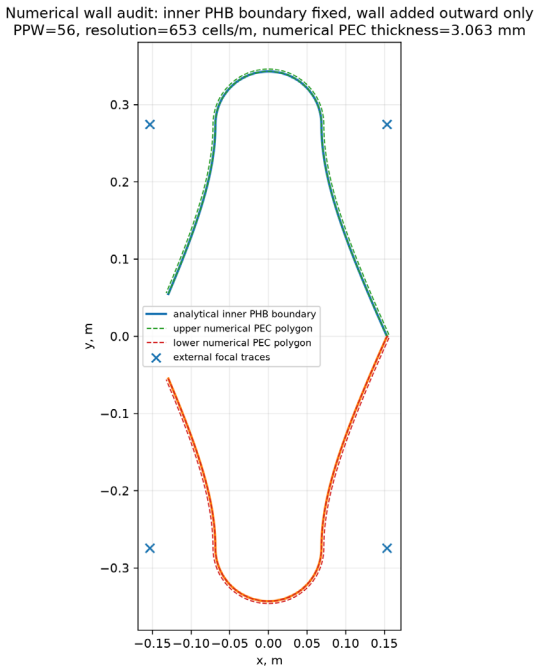

Рисунок 13. Численный аудит границы стенки компактного кандидата при PPW56. Физическая внутренняя граница заморожена; более тонкая сетка разрешает тот же заданный скриптом профиль, а не перенастраивает геометрию.

6.1.1. Пространственная политика замороженного считывания

В компактной кампании основная координата $x_s/a = +0.9$ была заморожена до основного анализа отложенных углов и проведена через PPW 12–56 без перенастройки. Заранее объявленный краевой набор $|x_s|/a \in \{0.6,0.7,0.8,0.9\}$ проверяет пространственную устойчивость. Этот протокол решает иную задачу, чем сканирование Regime A: Regime A картирует кандидатные информационно богатые области, тогда как Regime B оценивает устойчивость при фиксированном правиле считывания. Ни один из этих протоколов не определяет размер физической мембраны, направленность, монтаж, разбаланс каналов, собственный шум или электронику.

6.2. Контролируемое равноплощадное возмущение профиля

Высокоразрешённый тест профиля включает точный PHB, равноплощадный гладкий контроль, пустой эталон и симметричные возмущения $\delta/a = \pm 0.03$ и ± 0.06, сохраняющие конечные точки и нулевую площадь изменения. Термин **контролируемое согласованное возмущение профиля** используется намеренно: это детерминированное вмешательство в численную модель уравнения в частных производных, а не формальный эксперимент причинного вывода. Историческое имя скрипта v35 содержит CAUSAL_UNIQUENESS; это имя сохраняется только для прослеживаемости происхождения данных.

При PPW56 точный PHB имеет большее разделение направленных состояний, чем равноплощадный гладкий контроль, во всех проверенных положениях датчика и по всей заранее заданной краевой области. Средний запас разделения PHB minus smooth составляет +3,17°, медианный +2,98°, хотя медианный выигрыш PHB/smooth по прокси-отклику равен −0,17 дБ. Это свидетельство различия комплексных направленных состояний, а не преимущества по громкости.

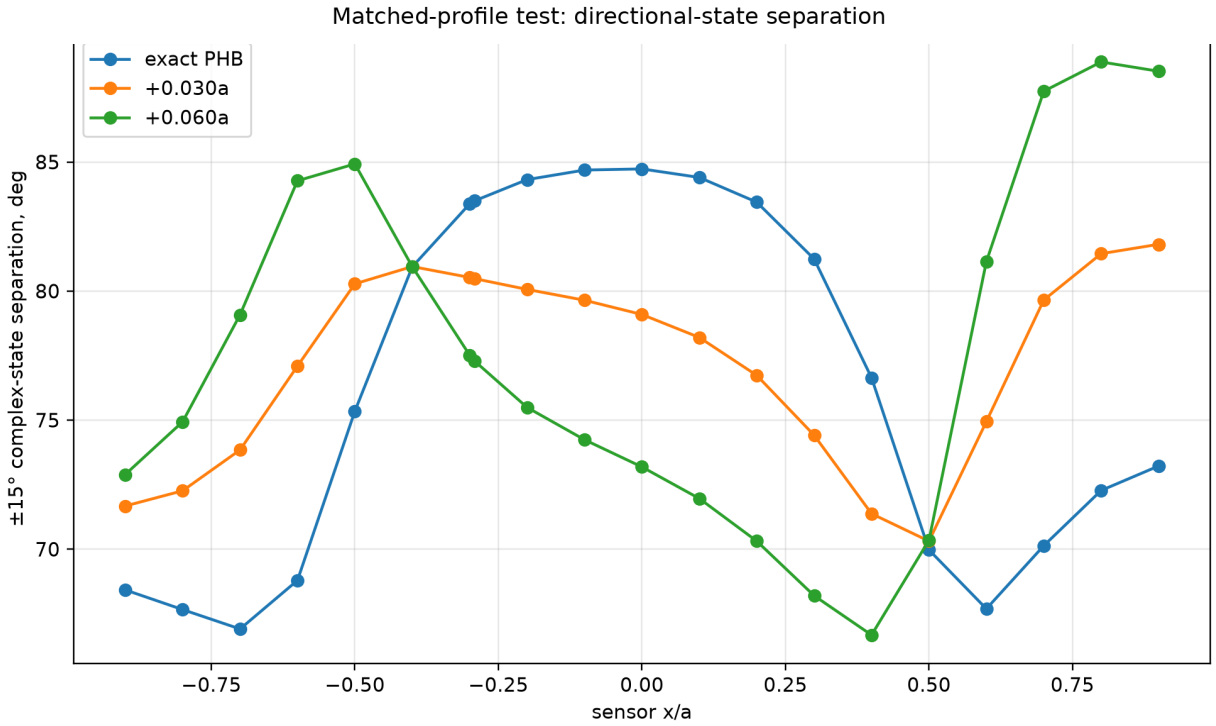

Рисунок 14. Высокоразрешённое разделение направленных состояний вдоль линии датчиков. Точный PHB отличается от равноплощадного гладкого контроля, а положительные near-PHB-возмущения выявляют близкое пространство инженерной оптимизации.

Таблица 8. Сравнение точного PHB при PPW56 с согласованными контролями.

Контроль	Доля всех проверенных положений с большим разделением PHB	Доля заранее заданных краевых положений с большим разделением PHB	Среднее разделение PHB минус контроль	Медианный угол состояния относительно PHB	Медианный выигрыш PHB/control по прокси
smooth area	100%	100%	+3.17°	9.06°	-0.17 дБ
defocus -0.03a	55%	100%	+1.37°	9.72°	-0.39 дБ
defocus +0.03a	45%	0%	-0.86°	10.08°	+0.38 дБ
defocus -0.06a	60%	100%	+2.85°	18.14°	-0.67 дБ
defocus +0.06a	45%	0%	-1.04°	20.05°	+0.79 дБ

Расстояние в пространстве состояний от точного PHB систематически возрастает с величиной возмущения. Медианный угол полного комплексного двухканального состояния увеличивается с 9.89° до 19.08° при росте $|\delta|/a$ от 0.03 до 0.06, а медианный угол отношения каналов — с 15.20° до 28.09°. Это подтверждает сильную чувствительность к профилю. Результат **не** доказывает, что точный PHB является

оптимумом; напротив, положительные возмущения улучшают некоторые эксплуатационные метрики.

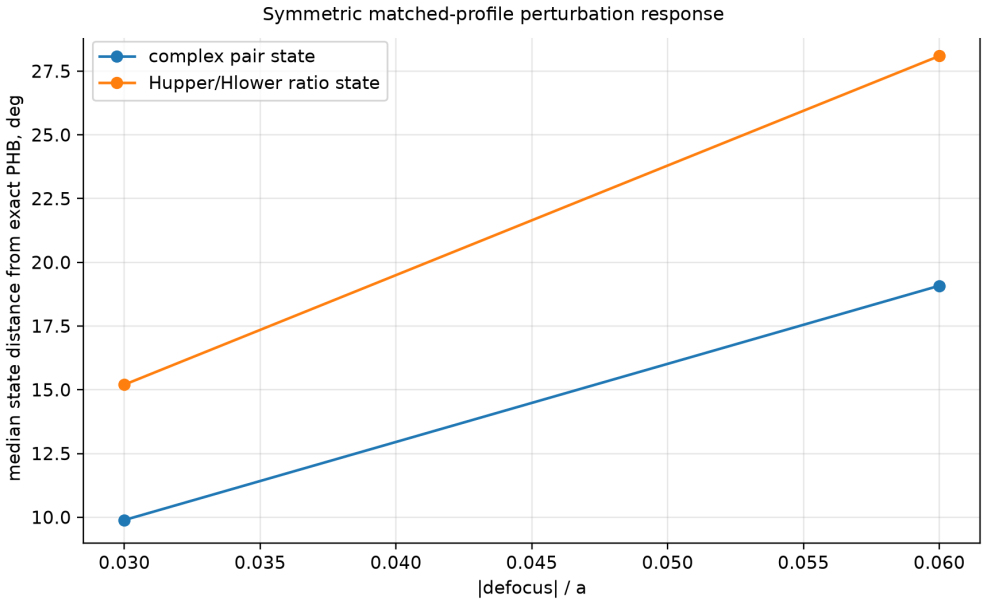

Рисунок 15. Дозовый отклик на симметричное возмущение профиля. Полное комплексное двухканальное состояние и отношение каналов удаляются от состояния точного PHB по мере роста $|\delta|/a$.

6.3. Основная замороженная инверсия на отложенных углах

Основной тест с замороженным протоколом использует фиксированную краевую политику датчиков, разбиения из раздела 4, несовпадение спектров источника и парные синтетические комплексные спектральные возмущения с общим абсолютным уровнем 20 дБ. Ни одна метка отложенного угла не используется для перенастройки координаты датчика или гиперпараметров декодера. Более богатое нормированное полное двухканальное представление служит основной демонстрацией инвертируемости.

Таблица 9. Основные результаты замороженной проверки на отложенных углах для нормированного полного двухканального признака и конкретного свободнополевого инженерного эталона GCC-PHAT.

Геометрия / эталон	MAE	RMSE	Медиана	p95	Точность знака
Точный PHB	0.975°	1.386°	0.750°	2.50°	1.000
Равноплощадный smooth	0.991°	1.336°	0.800°	2.60°	0.9999
Near-PHB +0.03a	0.829°	1.127°	0.650°	2.15°	0.9999
Near-PHB +0.06a	0.737°	0.998°	0.550°	2.05°	1.000
Empty, full-pair	6.797°	8.809°	3.950°	16.70°	0.6845
Empty, GCC-PHAT	2.202°	2.911°	1.725°	5.30°	0.9963

Точный PHB достигает MAE = 0.975°. Результат равноплощадного гладкого контроля отличается всего на 0.016° по MAE и имеет немного меньший RMSE (1.336° против 1.386°); следовательно, имеющийся корпус не демонстрирует практически значимого совокупного преимущества точного PHB над данным гладким контролем. В полной двухканальной метрике эти две геометрии эксплуатационно очень близки, тогда как два

положительных near-PHB-профиля лучше. Поэтому корректная интерпретация состоит не в том, что «точный PHB — лучшая полость», а в том, что PHB-построение выделяет высокоинформационное семейство геометрий, в котором точная теоремно определённая поверхность служит аналитической опорой, а соседние конечно-волновые профили образуют пространство инженерной оптимизации.

Для разности MAE 0,016° между точным PHB и гладким контролем в текущем корпусе доверительный интервал не приведён. Вместе с противоположным порядком RMSE это исключает утверждение о статистическом или практическом превосходстве точного PHB над равноплощадным гладким контролем в основном совокупном тесте.

По сравнению с **конкретным** свободнополевым двухточечным GCC-PHAT, реализованным на том же семействе передаточных данных и при том же общем абсолютном 20-дБ спектральном возмущении, MAE полного состояния точного PHB ниже примерно на 56%. Это только инженерное базовое сравнение; оно не является сравнением с оптимизированными микрофонными массивами, современными нейросетевыми системами локализации или всеми традиционными методами DoA. Важным будущим контролем остаётся более сильный свободнополевой эталон с теми же двумя датчиками и той же апертурой, например широкополосная максимально-правдоподобная или согласованно-полевая оценка [3].

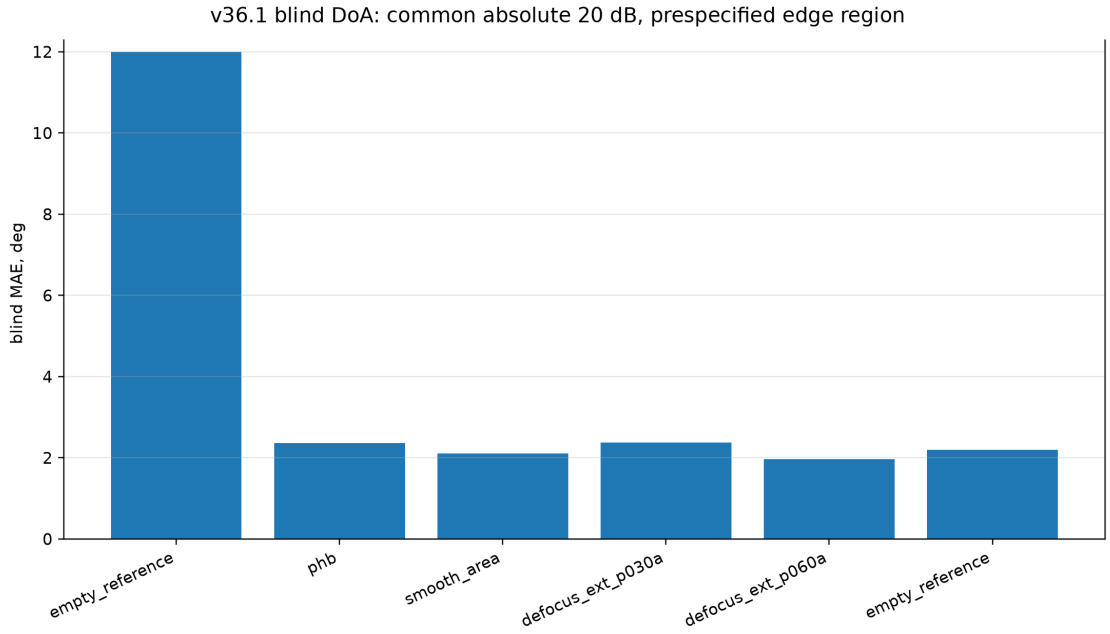

Рисунок 16. Сформированная скриптом сводка MAE на отложенных углах для финального двухсенсорного анализа. Столбец пустого эталона GCC-PHAT является конкретным инженерным базовым сравнением, а не универсальным эталоном традиционных методов.

6.4. Проверки отношения каналов и частотной абляции

Представление через отношение пары каналов сильнее удаляет общую спектральную структуру источника, но одновременно отбрасывает информацию, содержащуюся в индивидуальных спектрах. Для точного PHB его MAE = 2.366°, что хуже равноплощадного smooth и near-PHB $+0.06a$, но существенно лучше пустого состояния отношения каналов. Это различие важно: наиболее сильная направленная информация в данном семействе полостей переносится полным широкополосным комплексным двухканальным состоянием, а не одним дифференциальным отношением.

Таблица 10. Финальные результаты на отложенных углах для отношения каналов.

Геометрия	MAE	RMSE	Медиана	p95	Точность знака
Точный PHB	2.366°	4.317°	1.200°	6.85°	0.9558
Равноплощадный smooth	2.110°	3.697°	1.100°	5.00°	0.9885
Near-PHB +0.03a	2.379°	4.187°	1.250°	10.00°	0.9823
Near-PHB +0.06a	1.966°	3.492°	1.050°	5.80°	0.9945
Empty pair ratio	12.000°	13.254°	12.700°	25.00°	0.5118

Частотная абляция дополнительно отвергает интерпретацию через единственную спектральную линию. После вырезания 3.4 кГц или удаления выбранных каналов 3.4/3.55 кГц MAE точного PHB на отложенных углах остаётся приблизительно 2.03–2.41°, а точность знака 0.956–0.971. Следовательно, конечно-волновой код широкополосен и спектрально избыточен в проверенном наборе каналов, хотя это не является утверждением об устойчивости к произвольным пропускам частот.

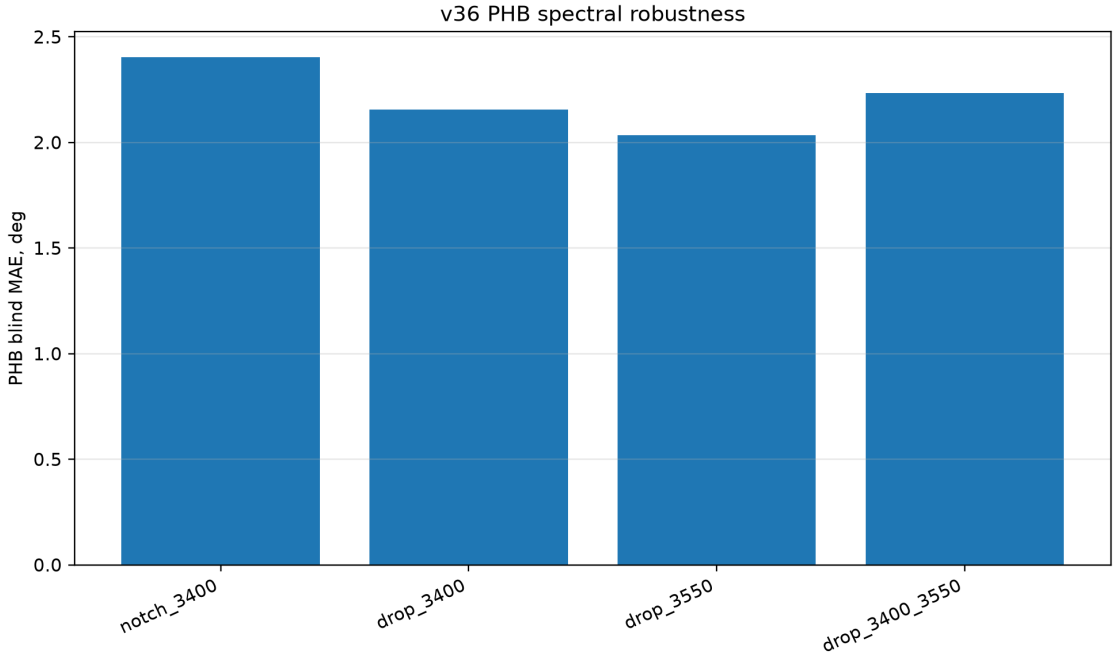

Рисунок 17. Спектральная устойчивость кода PHB на отложенных углах после вырезания или удаления выбранных частотных каналов.

7. Интегрированная физическая интерпретация

Корпус результатов поддерживает трёхуровневую интерпретацию, которую нельзя сводить к одному причинному утверждению.

Уровень I — точная ограниченная геометрия. Смещённый гиперболический меридиан задаёт исходные фокальные организаторы, коэффициент сжатия κ и сходимость наследуемых межветвевых отрезков как множеств к предельной хорде L_0. Эти утверждения точны только внутри явно заданного лучевого семейства.

Уровень II — формирование плоского конечно-волнового состояния. Дифракция, многократные отражения, накопление фазы, интерференция и модовое взаимодействие перестраивают падающее поле в зависящее от геометрии комплексное состояние плоской скалярно-волновой модели. Изменение профиля границы изменяет это состояние, однако

тесты возмущений не позволяют однозначно приписать изменение одному только фокальному закону.

Уровень III — калиброванная инверсия на отложенных углах. Конечная проекция внутреннего комплексного состояния преобразуется фиксированным декодером обратно в пеленг. Наиболее точное полное двухканальное представление сохраняет информацию о спектре источника, поэтому продемонстрированная инвертируемость условна относительно проверенного семейства спектров источника.

Несколько результатов отвергают простое объяснение «более громкая полость является лучшим пеленгатором». PHB может иметь большее разделение направленных состояний, чем smooth, при меньшей медианной прокси-метрике отклика по квадрату давления. PHB и smooth могут иметь близкую широкополосную норму при сильном различии нормированной комплексной спектральной формы. Точный PHB и near-PHB могут иметь близкие интегральные прокси-метрики отклика при существенном различии полного комплексного поля. Значимой наблюдаемой величиной поэтому является организация комплексной амплитуды и фазы, а не только необработанный уровень отклика.

Особенно информативны положительные near-PHB-возмущения. В финальной совокупной MAE они превосходят точный PHB, показывая, что теоремная геометрическая точность и конечно-волновая инженерная оптимальность являются разными целями. Точный PHB следует рассматривать как воспроизводимую аналитическую опору, вокруг которой можно оптимизировать более широкое семейство профилей. Этот результат поддерживает геометрически организованное проектирование, но не доказывает, что ограниченный фокальный закон является единственной физической причиной численной эффективности.

Логика размещения микрофонов аналогична. Точная геометрия мотивирует кандидатный радиус, а осевая координата считывания остаётся информационно-инженерной переменной. Поэтому любое утверждение об «оптимальной» точке считывания условно относительно геометрии полости, диапазона частот, сетки, модели возмущений, представления признаков, семейства источников и набора контролей. До присвоения самому $\rho = R$ статуса акустического оптимума требуется систематическое радиальное сканирование вне этой хорды.

8. Иерархия утверждений, статистическая интерпретация и ограничения

Таблица 11. Иерархия утверждений и безопасная для рецензирования интерпретация.

Статус	Утверждение, поддерживаемое работой	Граница интерпретации
Точное	для регулярного наследуемого меридионального фокального семейства	не является отображением произвольных лучей; не является акустическим усилением
Точное	межветвевые отрезки сходятся к предельной хорде при	геометрически мотивирован, но его акустическая уникальность или оптимальность не доказана
Численное	PHB и согласованные контроли формируют различимые широкополосные комплексные состояния в проверенных 2D-режимах	не доказывает уникальность среди всех возможных поверхностей

Статус	Утверждение, поддерживаемое работой	Граница интерпретации
Численное	различие сохраняется при сеточном уточнении, нормировке, полно-полевом сравнении, исключении стенки и возмущениях профиля	проверен конечный набор геометрий и частот
Численное	2D-пеленг на отложенных углах инвертируем при заявленных синтетических спектральных возмущениях и семействах спектров	не является независимой от спектра или экспериментальной аппаратной гарантией
Инженерный вывод	точный РНВ — аналитический эталон внутри РНВ-центрированного пространства оптимизации	положительные near-РНВ-профили могут превосходить точный РНВ
Не установлено	3D-наблюдаемость, разделение нескольких источников, устойчивость к ветру/реверберации, допуски изготовления, термовязкие/структурные потери	требуются независимые вычисления и эксперимент

Основные ограничения сформулированы явно:

1. Вычислительная модель не учитывает термовязкие пограничные слои, частотно-зависимый импеданс стенки, вибрации оболочки, механику микрофона, ветер, атмосферную турбулентность, комнатную реверберацию, доплеровский сдвиг, несколько одновременных источников, производственные допуски и полное трёхмерное азимутальное распространение.
2. Синтетические спектральные возмущения с общим абсолютным уровнем и условные результаты Монте-Карло характеризуют устойчивость к объявленным численным возмущениям детерминированных передаточных функций. Они не оценивают вариабельность между лабораториями или изготовленными экземплярами.
3. Декодер полного двухканального представления не независим от спектра источника. Устойчивость продемонстрирована только для явно проверенного семейства спектров и выбранных вариантов удаления каналов.
4. GCC-PHAT является конкретным двухточечным свободнополевым инженерным эталоном при согласованных данных и возмущениях, а не универсальным сравнением с оптимизированными массивами, широкополосными максимально-правдоподобными оценивателями, согласованно-полевыми методами или обучаемыми системами локализации.
5. Контролируемое возмущение профиля демонстрирует детерминированную чувствительность состояния к геометрии в численной модели. Оно не является причинно-статистической идентификацией единственного физического механизма, поскольку при изменении границы одновременно изменяются несколько волновых процессов.
6. Исследованное акустическое считывание сосредоточено на геометрически мотивированной хорде $\rho = R$. Корпус не содержит систематического радиального сканирования вне этой линии, поэтому акустическая уникальность или оптимальность данного радиуса не установлена.

7. Отложенные углы выбраны из конечного дискретного сектора приблизительно $\pm 20^{\circ}$. Субградусная MAE в этом протоколе не является доказательством эквивалентной работы на полном полукруге или при непрерывно случайных физических углах прихода.
8. Комплексные возмущения вносятся в спектральном представлении. Это контролируемый тест устойчивости, а не калиброванная модель временного собственного шума микрофона, разбаланса усиления, фазового разбаланса, ошибки тактовой синхронизации или коррелированного окружающего шума.

- Финальная MAE пеленга Regime B приведена при PPW56; кампания PPW12–56 демонстрирует устойчивость выбранных наблюдаемых состояний, а не сеточную сходимость самой финальной MAE.
- Для Regime B не представлена независимая последовательность чувствительности по толщине PML, внешним воздушным отступам, реализации линейного источника с задержкой или длительности послесигнального затухания. Эти проверки остаются критериями верификации решателя/протокола, а не завершёнными свидетельствами настоящего двумерного препринта.
- Разность MAE между точным PHB и гладким контролем в основном тесте очень мала и не сопровождается доверительным интервалом. Поэтому в рукописи эти совокупные результаты рассматриваются как практически близкие, а не статистически разделённые.

9. Связь с трёхмерным продолжением

Настоящее акустическое исследование намеренно является плоским. Меридиональный профиль PHB используется как граничный контур двумерной декартовой скалярно-волновой задачи. Поэтому работа не устанавливает поведение соответствующей трёхмерной поверхности вращения и не должна описываться как меридиональная конечно-волновая редукция этого 3D-устройства.

Геометрически вращение линии $\rho = R$ создаёт цилиндрический лист C_0, а исходные фокусные точки превращаются в круговые фокальные множества. Эта конструкция мотивирует будущую кольцевую или распределённую микрофонную архитектуру, однако соответствующее трёхмерное акустическое поле должно рассчитываться независимо. Даже осесимметричная редукция потребовала бы цилиндрического члена оператора $(1/\rho)\,\partial p/\,\partial \rho$; общий направленный приёмник дополнительно требует полной азимутальной зависимости, которую невозможно вывести из представленных плоских результатов.

Строгое 3D-продолжение должно сохранить разработанные здесь методологические контроли: точный PHB как аналитический эталон, согласованные гладкие и near-PHB-профили, правила размещения датчиков и декодирования, замороженные до оценки на отложенных данных, явные тесты спектра источника, реалистичные модели стенок и микрофонов, проверки сходимости и надлежащим образом согласованные традиционные эталоны. Трёхмерная эффективность не используется в настоящем препринте для усиления или «спасения» двумерных утверждений.

В пределах плоского двумерного корпуса вопросы невязок решателя, фактически реализованного угла источника, размеров PML/вычислительной области, длительности затухания после возбуждения, сходимости финального MAE, считывания вне геометрически мотивированного радиуса, реалистичного шума и аппаратной реализации остаются незакрытыми требованиями к верификации или эксперименту. Часть этих вопросов независимо исследована в последующем полном 3D-продолжении, кратко рассмотренном в разделе 9.1, однако трёхмерные результаты не используются для

ретроспективного закрытия двумерных критериев верификации и не усиливают двумерные утверждения сверх уровня межразмерностной согласованности.

10. Воспроизводимость и доступность данных

Материалы воспроизводимости организованы как пакет «утверждение → доказательство». Необработанные или близкие к необработанным файлы NPZ/CSV/JSON/HDF5 сохраняют передаточные функции, полные поля, аудиты геометрии, диагностику сеточного уточнения, результаты декодирования на отложенных углах, хэши конфигураций и манифесты SHA-256. Завершённые высокоразрешённые случаи могут повторно использоваться только после проверки скриптом идентичности физической конфигурации поля и аудита импортированных файлов передаточных функций. Вводные рисунки геометрии и фокального закона строятся непосредственно из уравнений и не учитываются как конечно-волновые численные доказательства.

Для настоящего препринта результат считается независимо воспроизводимым только в той мере, в какой соответствующий исполняемый скрипт, конфигурация, продукт передаточной функции/поля и запись контроля целостности фактически присутствуют в публикуемом пакете Zenodo. Предлагаемые аналитические проверки невязок не считаются завершённым доказательством, если файлы этих невязок не включены в выпуск.

10.1. Требования к верификации решателя и аналитические эталоны

Сеточное уточнение PPW 12–56 (раздел 6.1) демонстрирует численную устойчивость выбранных наблюдаемых, но сама по себе сеточная устойчивость не доказывает корректность решателя. Поэтому опубликованный вычислительный пакет должен сопровождаться независимыми аналитическими проверками. В настоящем тексте не придумываются отсутствующие численные ошибки решателя: завершёнными доказательствами верификации могут считаться только остаточные ошибки, фактически присутствующие в выпускаемом пакете данных.

(a) Свободнополевой тест функции Грина для точечного источника. Для истинного двумерного точечного источника в $\mathbf{r}_s$ частотная функция Грина с точностью до выбранного соглашения о временной гармонике равна

$$G_{2D}(r, r_s; \omega) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|r - r_s|).$$

Поэтому отдельный FDTD-тест с точечным источником может непосредственно сравнивать рассчитанную передаточную функцию или отношение передаточных функций с соответствующим выражением через функцию Ханкеля. Если используется отношение между двумя точками приёма, аналитический эталон также должен быть отношением

$$H_a(\omega) = \frac{G_{2D}(r_2, r_s; \omega)}{G_{2D}(r_1, r_s; \omega)},$$

а не одной величиной функции Грина.

(b) Тест конечной линии источников с задержкой. Реальное направленное возбуждение в расчётах полости представляет собой конечную линию источников с зависящей от положения задержкой. Поэтому её аналитическое свободнополевое поле является суперпозицией

$$p(r, \omega) \propto \int_{\Gamma_s} A(s) e^{-i\omega\tau(s)} G_{2D}(r, r_s(s); \omega) ds.$$

Конечную линию с задержкой следует сравнивать с этим интегралом или его численно сходящейся квадратурой, а не с одним изолированным членом $H_0^{(1)}$.

(c) Пустая прямоугольная полость с жёсткими стенками. Для прямоугольника со сторонами L_x и L_y

$$f_{m,n} = \frac{c_0}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2}, m,n = 0,1,2,\dots,(m,n) \neq (0,0).$$

Для восстановленных модовых частот следует приводить и шаг DFT-канала, и относительную ошибку $|f_{num} - f_{exact}|/f_{exact}$.

(d) Дополнительная проверка рассеяния на жёстком цилиндре. Для жёсткого кругового цилиндра известно решение в цилиндрических гармониках, которое может служить дополнительной проверкой границы и PML.

Для воспроизводимого выпуска Zenodo таблица верификации должна приводить фактические невязки в зависимости от PPW и указывать точный скрипт/артефакт данных для каждой проверки. Если файлы невязок отсутствуют в публикуемом корпусе, такие проверки должны описываться как необходимые критерии верификации, а не как завершённое численное доказательство.

Таблица 12. Набор исполняемых скриптов, представленный в текущем корпусе доказательств.

Исполняемый файл	Научная роль
PHB_ACOUSTIC_BROADBAND_LOWQ_INTERNAL_SENSORS_v20.py	широкополосный знаковый код при затухании и аудит внутренних датчиков
PHB_ACOUSTIC_HRTF_FOCAL_ADVANTAGE_v22.py	двухсеточная нормированная спектрально-фазовая сигнатура
PHB_ACOUSTIC_COLAB_FINE_COMPLEX_FIELD_v27.py	полное комплексное поле на тонкой сетке и анализ с исключением стенки
PHB_ACOUSTIC_MEEP_FULL_VERIFICATION_v29.py	многоугловые передаточные функции, считывание на отложенных углах, согласованные контроли
PHB_ACOUSTIC_MEEP_4KHZ_ENGINEERING_OPTIMIZER_VOVA_v34.py	компактная геометрия и уточнение PPW12–56
PHB_ACOUSTIC_MEEP_4KHZ_CAUSAL_UNIQUENESS_VOVA_v35.py	историческое имя; контролируемое симметричное согласованное возмущение профиля
PHB_ACOUSTIC_MEEP_4KHZ_BLIND_DOA_DECISIVE_VOVA_v36_1.py	оценка направления прихода при PPW56 с замороженным протоколом и отложенными углами

10.2. Последовательность независимого воспроизведения

Следующая последовательность объединяет путь двумерных численных свидетельств, уже представленный архивными скриптами и данными. Она не вводит новых полевых расчётов; её цель — не допустить смешения точной математики, численных наблюдений и инженерных решений в одно утверждение.

1. **Геометрия и терминология.** Построить меридиональный профиль PHB по радиально смещённой гиперболе раздела 3, включая объявленное входное окно и

центральное замыкание. Не подменять его стандартным квадрическим гиперболоидом. До любого волнового расчёта проверить аналитическую внутреннюю границу и фокальные параметры.

2. **Геометрически обусловленная хорда считывания.** Использовать $L_0 = \{|x| \leq a, \rho = R\}$ как выведенную из теоремы предельную хорду и кандидатный радиус считывания. В плоской 2D-задаче выбирать противоположные точки $S_+ = (x_s, +R)$ и $S_- = (x_s, -R)$. Внешние фокальные трассы трактовать как геометрические организаторы, а не как микрофоны. Не заявлять акустическую оптимальность $\rho = R$ без радиального сканирования вне хорды.

3. **Широкополосный стресс-тест затухания.** Выполнить или проверить ветвь v20 с линейным источником с задержкой, скалярной моделью жёсткой стенки и феноменологическим коэффициентом затухания. Проверить знаковую монотонность на объявленных углах, не трактуя наклон или R^2 как уникальность или акустическое усиление.

4. **Согласованная спектральная сигнатура на двух сетках.** В v22 вычесть отклик пустой пары, сформировать нечётную угловую компоненту, нормировать комплексное спектральное состояние и сравнить точный PHB с равноплощадным гладким контролем на обеих объявленных сетках. Сохранить полный 41-точечный скан.

5. **Полно-полевой тест согласованного профиля.** В v27 сравнить синхронизированные комплексные поля точного PHB и близкого near-PHB. Проверить стационарность двух окон, зеркальную симметрию, прокси-метрику по квадрату давления, угол состояния, фазу/групповую задержку и результат после исключения стенки.

6. **Сканирование считывания Regime A.** По массивам v29 с порядком осей H[sensor,frequency,channel] оценить все 19 кандидатных положений пары при одном и том же общем абсолютном синтетическом спектральном возмущении. Публиковать одновременно направленную ошибку и локальную прокси-метрику; пространственный оптимум обозначать как исследовательский.

7. **Компактное уточнение при фиксированном датчике.** Для v34 сохранять безразмерную компактную геометрию и проводить $x_s/a = +0.9$ через PPW 12–56 без перенастройки. Использовать последовательность как диагностику устойчивости/уточнения, а не как формальное доказательство асимптотической сходимости.

8. **Контролируемое возмущение профиля.** В v35 сравнить точный PHB, равноплощадный smooth, пустой эталон и near-PHB-возмущения, сохраняющие конечные точки и нулевую площадь. Оценить разделение состояний, прокси-отклик, расстояние от точного PHB и дозовый отклик на величину возмущения. Исторические имена файлов с «CAUSAL_UNIQUENESS» использовать только для прослеживаемости.

9. **Замороженная инверсия на отложенных углах.** Для v36.1 заморозить правило считывания и калибровочные разбиения до оценки отложенных углов. Применить заявленные варианты спектра источника, парные общие абсолютные возмущения, полное двухканальное представление и отношение каналов, инженерный GCC-PHAT-эталон и спектральные абляции. Не перенастраивать систему по меткам отложенных углов.

10. **Отчёт по уровням утверждений.** Разделять точную геометрию, плоские конечно-волновые доказательства и аппаратные гипотезы. Сохранять отрицательные

контроли и почти нулевые результаты, явно указывать, что Regime A и Regime B — разные безразмерные кампании, и не выводить 3D- или реальную микрофонную эффективность из плоских скалярных данных.

10.3. Карта «утверждение — доказательство — критерий опровержения»

Таблица 13. Карта двумерных численных свидетельств.

Вопрос	Доказательство	Наблюдаемая	Поддерживаемый вывод	Ограничивающий/опровергающий исход
Ограниченная фокальная геометрия	раздел 3 / скрипт фокального закона	точная рекурренция; сходимость отрезков к	точно для наследуемого фокально-сопряжённого семейства	ошибка вывода или нарушение условий области применимости
Широкополосный знаковый код	v20	знаковая координата при затухании	направленный код сохраняется в проверенной модели	исчезновение монотонности при заявленной модели
Согласованное спектральное состояние	v22	двухсеточная нормированная комплексная форма; 41-точечная трасса	PHB отличается от равноплощадного smooth в проверенном семействе	различие исчезает при уточнении/нормировке
Полевое состояние, чувствительное к профилю	v27	полно-полевой угол, фаза/задержка, исключение стенки	распределённое состояние изменяется при согласованном возмущении профиля	различие локализовано только в растре стенки/переходном процессе
Размещение считывания	v29	ошибка 19 позиций на отложенных углах + локальная прокси	осевая координата считывания является частью преобразователя	преимущество исчезает при согласованном правиле/возмущении
Сеточная устойчивость	v34	заморожено , PPW 12–56	компактное состояние сохраняется в проверенном уточнении	состояние на тонких сетках становится неустойчивым или меняется геометрия
Возмущение профиля	v35	smooth/near-PHB-разделение; дозовый отклик	точный PHB — аналитическая опора, но не обязательно оптимум	отсутствие систематической чувствительности состояния к профилю
Инвертируемость на отложенны	v36.1	MAE/RMSE/p95/знак; спектры/возмущ	проверенное плоское состояние инвертируемо при замороженном	эффективность на отложенных углах разрушается

Вопрос	Доказательство	Наблюдаемая	Поддерживаемый вывод	Ограничивающий/опровергающий исход
х углах		ения/абляция	протоколе	

10.4. Правила интерпретации

1. Regime A и Regime B используют разные безразмерные геометрии; это взаимодополняющие кампании, а не одна последовательность сходимости неизменной полости.
2. Популяции Монте-Карло являются повторными выборками детерминированных передаточных функций в объявленной модели синтетических возмущений, а не независимыми лабораторными экспериментами.
3. Точный PHB — определённый теоремой аналитический эталон. Соседние положительные возмущения превосходят его по финальной совокупной MAE, поэтому точный PHB не заявляется как конечно-волновой оптимум.
4. Прокси-метрики по квадрату давления не являются калиброванной акустической мощностью, эффективностью или чувствительностью микрофона.
5. Представленные координаты считывания являются идеальными плоскими выборками поля. Размер и направленность мембраны, монтаж, собственный шум, разбаланс каналов, электроника и окружающий шум остаются экспериментальными переменными.
6. Ни один результат не устанавливает полную 3D-наблюдаемость по азимуту/углу места, разделение нескольких источников, устойчивость в реверберирующем поле или аппаратную эффективность.

11. Научная новизна и границы приоритета

Научная новизна, фиксируемая настоящим препринтом, PHB-специфична и намеренно ограничена. Точный вклад состоит в ограниченном отображении фокального транспорта смещённого гиперболического меридионального профиля и вытекающей сходимости наследуемых межветвевых отрезков к предельной хорде L_0. Численный вклад состоит в плоской двумерной демонстрации того, что полость с границей, выведенной из PHB, вместе с контролируемыми near-PHB-профилями и равноплощадным гладким эталоном формирует воспроизводимые комплексные состояния, зависящие от направления и допускающие инверсию для отложенных пеленгов в исследованном секторе.

Настоящая запись не заявляет приоритет на пассивное структурное кодирование, моноуральную спектральную локализацию, акустическую метаматериальную локализацию или геометрически ассистированное определение направления вообще — для всех этих направлений существует предшествующая литература [7–13,15,16]. Также не утверждается, что точный PHB является лучшим конечно-волновым профилем или что L_0 — единственный оптимальный акустический радиус датчиков. Финальные замороженные результаты прямо показывают почти равные совокупные MAE полного двухканального представления для точного PHB и равноплощадного smooth, в то время как два положительных near-PHB-возмущения работают лучше. Поэтому заявляемая область приоритета — конкретная аналитическая PHB-конструкция фокального транспорта, её гипотеза геометрически обусловленного считывания и документированная программа вычислительной фальсификации/валидации вокруг этой конструкции. Это не заключение о патентоспособности и не заявление исчерпывающей новизны относительно всех пассивных акустических кодеров.

12. Выводы

Настоящая работа устанавливает три различных уровня результата, которые необходимо строго разделять: точное геометрическое утверждение, плоскую конечно-волновую численную демонстрацию и инженерную гипотезу о размещении считывания.

Во-первых, точный геометрический результат относится к ограниченному наследуемому меридиональному фокально-сопряжённому семейству смещённо-гиперболического профиля PHB. В полуугловой координате $t_{(n+1)} = \kappa t_n$, где κ определяется $\beta = b/a$ и равно 0,381966 при $\beta = 2$. Отдельные точки ударов о стенку сходятся к точкам перехода рогов, тогда как полные наследуемые межветвевые отрезки сходятся как множества к предельной хорде $L_0 = \{(x,\rho): |x| \le a, \rho = R\}$ с поперечным порядком $O(\kappa^n)$. Это даёт строгую геометрическую основу для проверки $\rho = R$ как кандидатного радиуса считывания, но не является законом акустического усиления и не доказывает акустическую оптимальность.

Во-вторых, конечно-волновые доказательства являются численными и плоскими. Прямой акустический FDTD и скалярный аналог MEEP демонстрируют воспроизводимые зависящие от направления комплексные состояния в широкополосном стресс-тесте затухания, двухсеточных нормированных спектральных сигнатурах, полно-полевых сравнениях согласованных профилей, проверке с исключением пристеночной зоны, уточнении сетки при фиксированном датчике, контролируемых возмущениях профиля, несовпадении спектра источника, инверсии на отложенных углах и спектральной абляции. В основном замороженном сравнении Regime B для полного двухканального признака точный PHB даёт MAE 0,975°, равноплощадный гладкий контроль — 0,991°, near-PHB +0,03a — 0,829°, near-PHB +0,06a — 0,737°. Следовательно, гладкий контроль практически неотличим от точного PHB по совокупной MAE, а соседние положительные возмущения лучше по этой метрике. Точный PHB поэтому является аналитической опорной геометрией внутри семейства конечно-волновой оптимизации, а не доказанным конечно-волновым оптимумом.

В-третьих, два дополнительных эффекта, не сводимых к одной совокупной метрике точности, усиливают обоснование PHB-центрированной схемы кодирования при сохранении всех указанных ограничений.

Первый эффект — локальное усиление прокси-отклика в зоне считывания. В исследовательском сканировании Regime A вдоль геометрически обусловленной хорды выбранные осевые координаты одновременно дают меньшую ошибку PHB на отложенных углах по сравнению с гладким контролем и положительный локальный прокси-отклик по квадрату давления относительно как гладкого контроля, так и пустого эталона: при $x_s = -0{,}080$ м локальная прокси-метрика равна 5,67× относительно пустого эталона и 1,19× относительно гладкого контроля, а MAE PHB на отложенных углах улучшается с 1,048° (smooth) до 0,403°. Широкополосные значения прокси-отклика включают, например, +0,293 дБ при −0,090 м и до +0,75 дБ при −0,080 м, а узкополосные локальные отношения достигают 2,696 (+4,31 дБ) на 2597,66 Гц для ±15°. Это прокси-величины p^2-отклика, а не калиброванная акустическая мощность, эффективность или чувствительность микрофона; улучшение обусловлено последующим выбором после пространственного сканирования 19 положений и поэтому остаётся исследовательским результатом, а не основным показателем оценки. Кроме того, это не универсальное свойство геометрии: в компактном Regime B медианный выигрыш PHB/smooth по прокси-отклику отрицателен (−0,17 дБ), поэтому наблюдавшееся в Regime A преимущество по уровню отклика не сохраняется, тогда как преимущество по различимости состояния сохраняется.

Второй эффект — устойчивые спектральные и пространственно распределённые численные сигнатуры различимости PHB. На разных сетках, при нормировках, исключении пристеночной зоны и согласованных возмущениях профиля PHB отличается от контролей главным образом организацией комплексной амплитуды и фазы, а не величиной отклика. PHB и равноплощадный гладкий контроль имеют почти равные нормы нечётного отклика, однако их нормированные комплексные спектральные формы разделены на ≈54,7°–56,1° (медиана 53,90° по 41 положению; 39 из 41 > 50°) при антисимметрии 0,99993. Точный PHB и near-PHB-контроль имеют практически равные интегральные прокси-отклики, но полно-полевой угол комплексного состояния 25,2°–31,8°, сохраняющийся после исключения 50-мм пристеночной зоны (≈80,7% внутренней области: медианный угол состояния остаётся 25,9°–29,9°). В Regime B PHB демонстрирует большее разделение направленных состояний, чем гладкий контроль, во всех проверенных положениях (средний запас +3,17°, медианный +2,98°), хотя медианный выигрыш по прокси-отклику отрицателен. Эти численные сигнатуры устанавливают воспроизводимую, чувствительную к профилю различимость и разделение комплексных направленных состояний внутри исследованного PHB-центрированного семейства.

Необходимо столь же ясно указать, чего эти численные сигнатуры не доказывают. Они показывают устойчивое отличие PHB по организации состояния, но не доказывают, что PHB является причинно уникальным кодером: при изменении границы одновременно меняются несколько волновых процессов — дифракция, отражение, интерференция и модовое взаимодействие, — а контролируемое возмущение не является причинно-следственной идентификацией фокального закона как единственного механизма. Эти результаты также не отменяют основной итог по точности: архетипический гладкий контроль практически равен точному PHB по совокупной MAE, а положительные near-PHB-возмущения превосходят его. Различимость состояния и превосходство по отдельной метрике точности — разные утверждения.

Таким образом, поддерживаемый вклад представляет собой воспроизводимую PHB-центрированную схему геометрического кодирования для плоского двумерного акустического определения направления: точная геометрия задаёт ограниченное фокальное отображение и кандидатную хорду считывания; обычная конечно-волновая физика формирует зависящее от направления комплексное состояние, которое локально усилено по отклику в Regime A и устойчиво отличается от исследованных сравнительных геометрий; фиксированный калиброванный декодер инвертирует это состояние на отложенных углах. Работа не демонстрирует универсального преимущества над традиционной локализацией, независимости от спектра источника, работы по полному кругу, трёхмерной наблюдаемости, реалистичной работы микрофонов или экспериментальной валидации. Решающий следующий этап требует как минимум опубликованных вместе с данными невязок решателя, радиальных сканирований датчиков вне хорды, более плотных независимо отложенных физических углов, более сильных надлежащим образом согласованных традиционных эталонов, реалистичных моделей потерь/шума/рассогласования, полного 3D расчёта и эксперимента.

Литература

[1] Pierce, A. D. *Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications*. Acoustical Society of America, 1989.

[2] Morse, P. M.; Ingard, K. U. *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press, 1968.

[3] Knapp, C. H.; Carter, G. C. The generalized correlation method for estimation of time delay. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* 24(4), 320-327 (1976). DOI: 10.1109/TASSP.1976.1162830.

[4] Botteldooren, D. Finite-difference time-domain simulation of low-frequency room acoustic problems. Journal of the Acoustical Society of America 98, 3302-3308 (1995). DOI: 10.1121/1.413817.

[5] Oskooi, A. F. et al. MEEP: A flexible free-software package for electromagnetic simulations by the FDTD method. *Computer Physics Communications* 181, 687-702 (2010). DOI: 10.1016/j.cpc.2009.11.008.

[6] Taflove, A.; Hagness, S. C. *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, 3rd ed. Artech House, 2005.

[7] Saxena, A.; Ng, A. Y. Learning Sound Location from a Single Microphone. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1737-1742 (2009). DOI: 10.1109/ROBOT.2009.5152861.

[8] Park, Y.; Choi, A.; Kim, K. Monaural Sound Localization Based on Reflective Structure and Homomorphic Deconvolution. *Sensors* 17, 2189 (2017). DOI: 10.3390/s17102189.

[9] Sun, X.; Jia, H.; Zhang, Z. et al. Sound Localization and Separation in 3D Space Using a Single Microphone with a Metamaterial Enclosure. *Advanced Science* 7, 1902271 (2020). DOI: 10.1002/advs.201902271.

[10] Jekateryńczuk, G.; Piotrowski, Z. A Survey of Sound Source Localization and Detection Methods and Their Applications. *Sensors* 24, 68 (2024). DOI: 10.3390/s24010068.

[11] Kim, K.; Kim, Y. Monaural Sound Localization Based on Structure-Induced Acoustic Resonance. *Sensors* 15(2), 3872-3895 (2015). DOI: 10.3390/s150203872.

[12] El Badawy, D.; Dokmanić, I. Direction of Arrival with One Microphone, a Few LEGOs, and Non-Negative Matrix Factorization. *IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing* 26(12), 2436-2446 (2018). DOI: 10.1109/TASLP.2018.2867081.

[13] Li, X.; Cai, Z.-X.; Feng, C.-Y.; Zou, X.-Y.; Chen, Q.; Cheng, J.-C. Single-microphone speaker localization using acoustic metamaterial antenna and voiceprint recognition. *Physical Review Applied* 24, 034077 (2025). DOI: 10.1103/prw9-8pjt.

[14] Khaustov, V. Focal-Transport Ray Law in Pseudohyperboloidal Cavities with Variable Negative Gaussian Curvature: Exact Focal Contraction, Event-Order Transport, Skew-Ray Unfolding, and Finite-Wavelength Computational Tests. Zenodo (2026). DOI: 10.5281/zenodo.21969312.

[15] DiPassio, T.; Heilemann, M. C.; Bocko, M. F. Direction of arrival estimation of an acoustic wave using a single structural vibration sensor. Journal of Sound and Vibration 553, 117671 (2023). DOI: 10.1016/j.jsv.2023.117671.

[16] Kim, Y.; Kim, K. Near-Field Sound Localization Based on the Small Profile Monaural Structure. Sensors 15(11), 28742-28763 (2015). DOI: 10.3390/s151128742.