Геометрическая волновая инженерия

Закон идеальной геометрической лучевой динамики в псевдопараболоидах второго порядка

Точная структура фокального возврата, периодические семейства лучей и топологическое разделение горизонтального и вертикального типов

Хаустов Владимир Игоревич

ORCID: 0009-0007-3657-2309

Лаборатория геометрической волновой инженерии https://vihrihaosa.ru/

Лицензия: CC BY 4.0

Дата публикации: 14 сентября 2026 года

DOI: 10.5281/zenodo.22737421

Научно-технический перевод с английского языка.

Редакция, адаптированная для русскоязычного инженера-исследователя.

Оригинал: Khaustov. V. Law of Ideal Geometrical Ray Dynamics in Second-Order Pseudoparaboloids: Exact Focal-Return Structure, Periodic Ray Families, and Topological Splitting of the Horizontal and Vertical Types. https://doi.org/10.5281/zenodo.22737421

Аннотация

Геометрическая волновая инженерия (ГВИ) рассматривает геометрию границы не просто как вместилище для распространения, а как пассивный геометрический оператор, способный организовывать лучевые траектории до применения какой-либо активной обработки сигнала. В рамках этой программы в настоящей работе вводится лучевая динамика псевдопараболоида второго порядка (PPB-2) — новой многоветвевой поверхности, построенной из противоположно ориентированных, радиально смещённых параболических меридианов и соответствующих поверхностей вращения. Известное свойство отдельной параболы «фокус — параллельный луч» остаётся локальным и классическим; новая задача возникает тогда, когда совместно действуют несколько смещённых родительских ветвей, а повторное распространение определяется конкуренцией между физически доступными отражениями.

Центральный результат — лучевой закон фокального возврата для регулярной меридиональной динамики PPB-2. Он даёт точное, разрешённое по ветвям описание последовательных зеркальных столкновений, включая физическое требование, согласно которому следующим событием должно быть наиболее раннее допустимое пересечение. Когда луч падает через родительский фокус, параболическое свойство отражения переводит выходящий луч в выделенное осевое постфокальное состояние. Из этого состояния повторное распространение от ветви к ветви управляется точным алгебраическим отображением, тогда как возврат к родительскому фокусу задаётся дополнительным геометрическим условием. Эта структура порождает рекуррентные и периодические семейства лучей и объясняет, как простое фокальное отражение преобразуется в организованную многоотражательную динамику. Закон относится к выделенной структуре фокального возврата и не сводит полный меридиональный бильярд к одномерной системе.

Дополнительной частью закона является различие между двумя трёхмерными реализациями одной и той же знаковой меридиональной образующей. Горизонтальный и вертикальный псевдопараболоиды после перестановки координат имеют одинаковую регулярную меридиональную ветвевую динамику, однако являются различными пространственными поверхностями: их азимутальные метрики, поля кривизны, топология апертур и немеридиональное распространение лучей не эквивалентны. Тем самым закон отделяет универсальные свойства меридионального механизма фокального возврата от свойств, возникающих вследствие трёхмерного вложения поверхности.

Этот препринт предназначен как первое систематическое изложение в рамках программы Геометрической волновой инженерии закона распространения лучей, связанного с псевдопараболоидом второго порядка. В едином математическом описании устанавливаются геометрия, допустимая отражающая область, точные условия столкновений и фокального возврата, структура периодических лучей, аппарат устойчивости, следствия для лучевой плотности и трёхмерное разделение горизонтального и вертикального типов. Результаты относятся к идеальной геометрической лучевой динамике. Дифракция при конечной длине волны, модовая структура, потери и экспериментальные характеристики требуют отдельной волновой и экспериментальной проверки и не являются частью настоящего закона.

Ключевые слова: псевдопараболоид второго порядка; лучевой закон фокального возврата; геометрическая оптика; бильярдное отображение; родительский фокус; периодические лучи; лучевая плотность; выход; косые лучи; Геометрическая волновая инженерия

Содержание

Аннотация 2
1. Введение и область применимости 4
2. Геометрия и регулярная отражающая область 4
2.1 Общая знаковая меридиональная образующая 4
2.2 Физическая геометрия горизонтального и вертикального типов 5
2.3 Регулярная область и точная меридиональная сопряжённость 6
3. Точное регулярное меридиональное бильярдное отображение 7
3.1 Полное двумерное граничное отображение 7
3.2 Точное постфокальное ветвевое отображение 8
4. Ввод через родительский фокус и видимость 8
5. Ветвевой закон фокального возврата 9
5.1 Безразмерное отображение ветвевого состояния 9
5.2 Постфокальное многообразие и строгое условие возврата 10
5.3 Минимальный уровень возврата и примитивный период 10
5.4 Структура замыкания при зеркальном обращении 10
5.5 Универсальное утверждение для двух типов 11
6. Точные периодические семейства 11
6.1 Точное семейство F4 11
6.2 Прямоугольное семейство P4 12
6.3 Центральная P2 и краевая предельная P2 «край—край» 12
6.4 Точное h-инвариантное семейство P6 13
6.5 Представительные физические периодические классы малых порядков 15
7. Устойчивость, границы существования и масштабное подобие 15
7.1 Монодромия F4 и P6 15
7.2 Точные границы существования и выхода 16
7.3 Равномерное масштабное подобие 17
8. Концентрация лучевой плотности 17
8.1 Что означает «лучевая плотность» в настоящей работе 17
8.2 Точный краевой предельный канал периода 2 на фокальной линии, возникающий только при $h > 0$ 17
8.3 Точная бифуркация плотности вблизи линии внешнего фокального радиуса 18
8.4 Карты плотности и отсутствие универсального внутреннего точечного аттрактора 20
8.5 Дефицит плотности в окне выхода и отсутствие складчатой каустики первого отображения 22
8.6 Точные осесимметричные многообразия концентрации внутри PPB 22
8.7 Научная интерпретация перехода от $h = 0$ к $h > 0$ 23
9. Трёхмерное разделение двух типов PPB 23
9.1 Разделение метрики, кривизны и апертуры 23
9.2 Разворачивание F4 при слабом горизонтальном косом возмущении 24
9.3 Вертикальное тождество первой косой хорды и согласованный трёхмерный транспорт 25
10. Численная проверка и границы утверждений 26
11. Обсуждение и ограничения 27
11.1 Научное содержание закона 27
11.2 Физические ограничения 28
12. Выводы 28
Приложение A. Представительные физические периодические классы малых порядков 28
Приложение B. Научная и техническая значимость 39
Приложение C. Обозначения 40
Литература 41

1. Введение и область применимости

Парабола обладает простым локальным оптическим свойством: луч, приходящий из её фокуса, после отражения идёт параллельно оси параболы. Однако в полости, образованной несколькими противоположно ориентированными параболическими ветвями, повторное распространение уже не описывается одним этим свойством отдельного отражателя. На каждом шаге необходимо определить, какая ветвь достигается первой, отбросить алгебраические пересечения, физически недоступные лучу, применить закон зеркального отражения и затем установить, может ли луч вернуться в конфигурацию родительского фокуса. Именно эта задача многократных отражений является предметом настоящего закона.

Рассматриваемый здесь псевдопараболоид второго порядка образуется радиальным смещением противоположно ориентированных параболических меридианов и вращением полученной знаковой кривой. Одна и та же меридиональная кривая задаёт два пространственных объекта: горизонтальный тип, вращаемый вокруг оси родительских фокусов, и вертикальный тип, вращаемый вокруг перпендикулярной оси. Их регулярная меридиональная геометрия идентична после перестановки координат, однако полная трёхмерная геометрия различна. Это различие принципиально, поскольку позволяет отделить точный меридиональный закон от эффектов апертуры, кривизны и косых лучей, обусловленных трёхмерным вложением.

Закон фокального возврата имеет три уровня. Во-первых, регулярный меридиональный бильярд представляет собой точное кусочно-алгебраическое отображение с правилом наиболее раннего положительного столкновения. Во-вторых, падение, направленное через фокус, переводит отражённый луч на выделенное осевое постфокальное многообразие, где можно точно записать редуцированное ветвевое отображение и строгое условие возврата к родительскому фокусу. В-третьих, повторяющиеся фокальные возвраты порождают периодические семейства. Некоторые семейства допускают аналитическое решение, тогда как общее соотношение периода подтверждено высокоточной проверкой на конечной области параметров и не заявляется как теорема для всех параметров.

Параметр f задаёт масштаб родительской параболы, R — знаковый радиальный масштаб, а h — взаимное осевое смещение противоположных родительских ветвей. Безразмерные параметры формы и разделения равны $\gamma=f/R$ и $\delta=h/f$; где удобно, используется $\eta=h/R=\gamma\delta$. Если явно не указано иное, общий для двух типов закон фокального возврата формулируется на регулярной области $h\geq 0$. Вертикальная геометрия с закрытым концом при $h<0$ рассматривается только как топологическое продолжение.

Это геометрически-лучевой результат в смысле математических бильярдов и геометрической оптики [1–5]. Он не заменяет волновой анализ дифракции, собственных мод, потерь или добротности резонатора [6–8]. Для явного разграничения научного статуса на протяжении всей работы различаются аналитические тождества, точные неявные соотношения, численные свидетельства на конечной области параметров и транспорт, обусловленный выбранной мерой запуска.

2. Геометрия и регулярная отражающая область

2.1 Общая знаковая меридиональная образующая

Пусть $b=\pm 1$ обозначает правую/левую родительскую ветвь, $s=\pm 1$ — верхнюю/нижнюю знаковую меридиональную ветвь, а u — параболическую координату. Оба типа PPB порождаются одними и теми же четырьмя евклидовыми кривыми. Здесь термин «второго порядка» является конструктивным обозначением геометрии, образованной двумя

противоположными родительскими параболами (b=±1) вместе с их знаковыми меридиональными ветвями (s=±1); он не означает изменения полиномиальной степени родительской параболы.

$$X_{b,s}(u) = (b(h+fu^2),\ s(R-2fu)) \quad (1)$$

Горизонтальный тип получается, если первую координату трактовать как x и вращать кривую вокруг оси x; вертикальный тип получается, если трактовать её как знаковую радиальную координату q и вращать вокруг оси z.

$$X_H^{(b)}(u,\varphi) = (b(h+fu^2), (R-2fu)\cos\varphi, (R-2fu)\sin\varphi) \quad (2)$$

$$X_V^{(s)}(u,\varphi) = ((h+fu^2)\cos\varphi, (h+fu^2)\sin\varphi, s(R-2fu)) \quad (3)$$

2.2 Физическая геометрия горизонтального и вертикального типов

Для открытого горизонтального типа регулярный рог в знаковых цилиндрических координатах (x,ρ) задаётся как

$$\rho(|x|) = R - 2\sqrt{(f(|x|-h))}, \quad h \le |x| \le L = h + R^2/(4f) \quad (4)$$

$$u = \sqrt{((|x|-h)/f)} = (R-\rho)/(2f), \quad |x|=h+fu^2, \quad \rho=R-2fu \quad (5)$$

Четыре родительских фокуса знаковых образующих ветвей имеют вид

$$F_{\sigma,\tau} = (\sigma(h+f), \tau R), \quad \sigma=\pm1, \tau=\pm1 \quad (6)$$

После вращения эти точки образуют два внешних фокальных кольца. На регулярном горизонтальном роге

$$K_H(u) = -u / [2f(R-2fu)(1+u^2)^2], \quad 0<u<u_{max}=R/(2f) \quad (7)$$

При u=0 горизонтальная поверхность имеет круговой край и K_H=0; при u→u_max азимутальный радиус стягивается к осевому острию, где регулярная формула кривизны становится сингулярной.

Для вертикального типа r(u)=h+fu² и z_s(u)=s(R−2fu). Его физический интервал простирается от u_min=max(0,√(−h/f)) до u_max=R/(2f) при условии L=h+R²/(4f)>0. Родительские фокальные кольца имеют радиус r_F=h+f и расположены при z=±R, если h+f>0.

$$K_V(u) = -1 / [2f(h+fu^2)(1+u^2)^2] \quad (8)$$

При h>0 вертикальная поверхность имеет две полярные круговые апертуры радиуса h; при h=0 полярные концы вырождаются в точки; при h<0 сохраняемые физические листы замыкаются на оси. Верхний и нижний листы соединяются при u=u_max по негладкому экваториальному шву, который исключается из обычного гладкого бильярдного отображения.

В безразмерных переменных γ=f/R и δ=h/f имеем L/R=γδ+1/(4γ) и r_F/R=γ(1+δ). При h>0 суммарная площадь двух полярных дисков-апертур равна 2π(γδ)²R². Это только геометрические тождества; им не приписывается интерпретация в терминах волновой энергии.

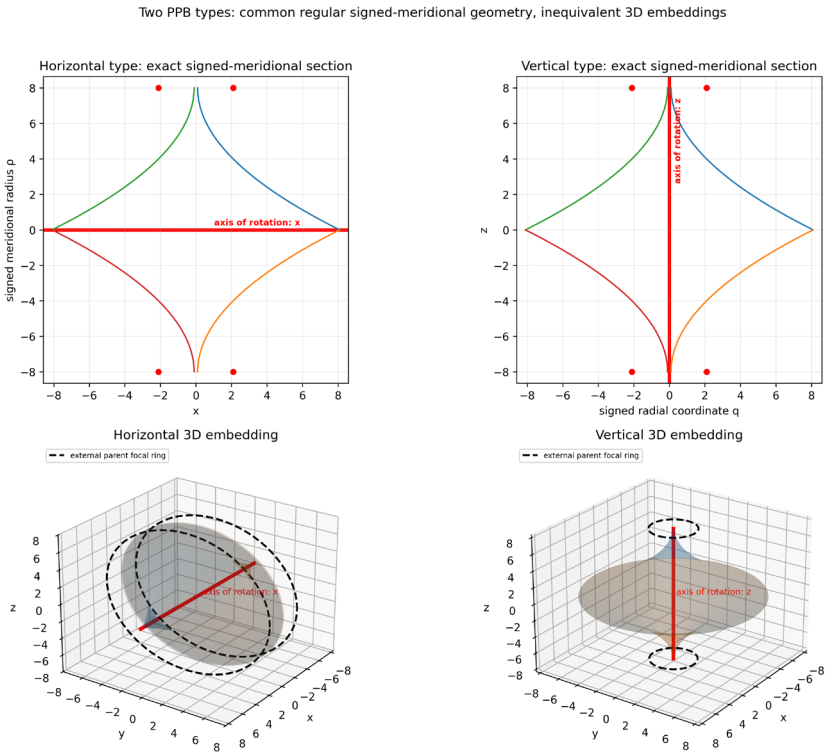

Рисунок 1. Общая знаково-меридиональная геометрия и две неэквивалентные поверхности вращения при f=2, R=8, h=0.1; показаны истинные оси вращения и внешние родительские фокальные кольца.

2.3 Регулярная область и точная меридиональная сопряжённость

Обычная динамика зеркального бильярда определена только на гладких отражающих участках. Края, осевые острия, вертикальный экваториальный шов и точки, лежащие внутри апертуры, исключаются. Для явно обозначенного краевого предела можно ввести одностороннюю предельную нормаль, однако такая конструкция не является регулярной гладкостенной орбитой.

Таблица 1. Регулярная отражающая область и исключённые краевые или сингулярные множества.

Тип / режим	Регулярный интервал	Исключённые множества
Горизонтальный	0<u<u_max	u=0 — круговые края; u=u_max — осевые острия
Вертикальный, h>0	0<u<u_max	края полярных апертур при u=0; экваториальный шов при u=u_max
Вертикальный, h=0	0<u<u_max	точечно-вырожденные полярные концы; экваториальный шов
Вертикальный, h<0	u_min<u<u_max	осевые острия r=0; экваториальный шов

Теорема 1 (регулярная знаково-меридиональная сопряжённость). Пусть B_H^reg и B_V^reg — идеальные отображения зеркального бильярда, ограниченные общей регулярной меридиональной областью. При отображении Φ:(x,ρ_signed)↦(q,z) точки ветвей, касательные, нормали, длины хорд, углы падения, оператор отражения и порядок наиболее раннего положительного столкновения совпадают. Следовательно,

$\Phi \circ B_H^{reg} = B_V^{reg} \circ \Phi$. Утверждение исключает каждую точку, в которой один из физических отражателей отсутствует или негладок.

Доказательство. В общей регулярной области обе реализации представлены одними и теми же четырьмя кривыми $X_{b,s}(u)$. Поэтому их производные, единичные касательные и нормали совпадают после отображения Φ. Каждая кандидатная хорда и её положительное время пролёта сохраняются, следовательно, сохраняется и минимальное положительное время пролёта. Зеркальное отражение коммутирует с Φ, что и доказывает сопряжённость.

$$ds_H^2 = 4f^2(1+u^2)du^2 + (R-2fu)^2 d\varphi^2 \quad (9)$$

$$ds_V^2 = 4f^2(1+u^2)du^2 + (h+fu^2)^2 d\varphi^2 \quad (10)$$

Общий меридиональный коэффициент и различные азимутальные коэффициенты являются математической причиной того, что идентичные регулярные меридиональные лучи не означают идентичной немеридиональной динамики.

Таблица 2. Общая меридиональная структура и зависящая от типа трёхмерная структура.

Свойство	Горизонтальный тип	Вертикальный тип
Ось вращения	x	z
Знаковая меридиональная ветвь	$(b(h+fu^2), s(R-2fu))$	та же кривая после перестановки координат
Родительские фокальные кольца	$x=\pm(h+f)$, радиус R	$z=\pm R$, радиус h+f
Азимутальный метрический множитель	$(R-2fu)^2$	$(h+fu^2)^2$
Регулярная гауссова кривизна	K_H	K_V
Регулярный меридиональный закон фокального возврата	общий	общий
Общая немеридиональная динамика	зависит от типа	зависит от типа

3. Точное регулярное меридиональное бильярдное отображение

3.1 Полное двумерное граничное отображение

Для общего гладкого меридионального состояния бильярд двумерен в граничном фазовом пространстве. Пусть $P_{b,s}(u)=[b(h+fu^2),s(R-2fu)]$ — текущая точка, $d=(d_x,d_\rho)$ — выходящее единичное направление, а $Q_{B,S}(v)=[B(h+fv^2),S(R-2fv)]$ — кандидатная следующая точка. При $\delta=h/f$ и $r=R/f$ условие коллинеарности даёт

$$B\, d_\rho v^2 + 2S\, d_x v + d_\rho[(B-b)\delta - b u^2] + d_x[(s-S)r - 2su] = 0 \quad (11)$$

Для каждой целевой ветви действительные корни фильтруются по физическому интервалу, положительному времени пролёта и правилу наиболее раннего столкновения среди всех ветвей. В выбранной точке направление отражается зеркально. Поэтому приведённое ниже однопараметрическое отображение является ограничением полного двумерного отображения, а не заменой общей динамики РРВ.

При импульсе Биркгофа $p=\sin\chi=d\cdot t$ и $ds/du=2f\sqrt{1+u^2}$ каждая гладкая однопереходная ветвь удовлетворяет

$$\det[\partial(v,p')/\partial(u,p)] = \sqrt{(1+u^2)}/\sqrt{(1+v^2)} \quad (12)$$

Это координатная форма инвариантной бильярдной меры ds dp вдали от сингулярностей переключения ветвей.

3.2 Точное постфокальное ветвевое отображение

После отражения через родительский фокус, создающего осевое состояние $P_0(u)=(h+fu^2,R-2fu)$ с направлением $(-1,0)$, луч сначала совершает детерминированный горизонтальный переход на противоположный рог при том же u. После зеркального отражения от этой противоположной ветви с тем же знаком последующее кандидатное столкновение с ветвью (B,S), имеющее параметр v, удовлетворяет

$$B\,f\,u\,v^2 + S\,f(u^2-1)v + u[f+h+Bh] + (R/2)(1-S)(u^2-1) = 0 \quad (13)$$

В безразмерных переменных $\gamma=f/R$ и $\eta=h/R$:

$$B\gamma u\,v^2 + S\gamma(u^2-1)v + u[\gamma+\eta+B\eta] + ((1-S)/2)(u^2-1) = 0 \quad (14)$$

Физический корень выбирается по тем же правилам допустимости и наиболее раннего столкновения, что и в полном отображении. Это редуцированное отображение является точным на указанном постфокальном многообразии.

Для канонического маршрута три точных порога разделяют сектора R+, R−, выхода и L−:

$$u\_A = \sqrt{(k+1)} - \sqrt{k}, \quad k=1+2h/f \quad (15)$$

$$u\_B = [\sqrt{((f+2h)^2+4R^2)} - (f+2h)]/(2R) \quad (16)$$

$$(u^2-1)^2 + 4u^2 + 4(R/f)u(u^2-1) = 0, \quad u=u\_C \quad (17)$$

Для f=2, R=8, h=0.1 получаем u_A=0.4003288264, u_B=0.8719088617 и u_C=0.8810176861, откуда Δu_escape=0.0091088244.

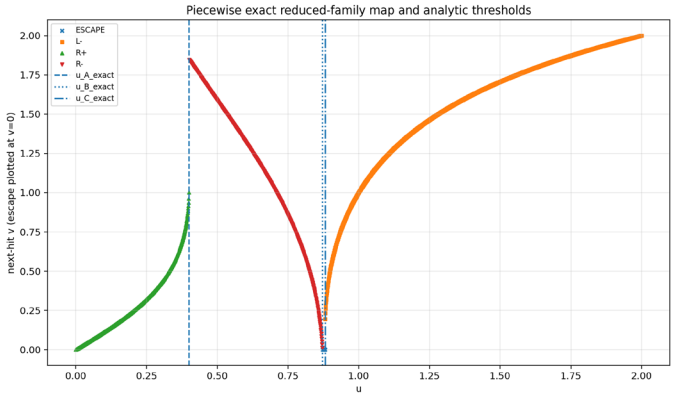

Рисунок 2. Точное редуцированное ветвевое отображение и его пороговая структура для канонической геометрии.

4. Ввод через родительский фокус и видимость

Рассмотрим внутреннюю точку S=(x_s,ρ_s) и выбранный внешний фокус $F_{\sigma,\tau}$. Если луч первым достигает родительской ветви этого фокуса, введём

$$X\_s=\sigma x\_s, \quad Y\_s=\tau\rho\_s, \quad A\_s=h+f-X\_s, \quad B\_s=R-Y\_s \quad (18)$$

$$u_0 = [\sqrt{(A\_s^2+B\_s^2)}-A\_s]/B\_s = B\_s/[\sqrt{(A\_s^2+B\_s^2)}+A\_s] \quad (19)$$

Формула понимается по непрерывности при B_s=0. Классическое свойство «фокус — параллельный луч» тогда даёт

$$d\_after = (-\sigma,0) \quad (20)$$

Эти соотношения задают ввод в специфичное для PPB постфокальное отображение; они не изменяют классическую локальную теорему для параболы.

Видимость ограничена касательными тенями. Для канонического фокуса F_{++} два параметра касания равны

$$u\_up = \sqrt{(1+2h/f)}, \quad u\_low = R/f - \sqrt{((R/f)^2-1)}, \quad 0<\gamma\leq 1 \quad (21)$$

Начальная точка принадлежит множеству видимости родительского фокуса только тогда, когда отрезок к выбранному фокусу не пересекается ранее другой физической ветвью. Это условие видимости является частью физического закона фокального возврата, поскольку алгебраически допустимой линии, направленной через фокус, недостаточно, если её раньше перекрывает другая ветвь.

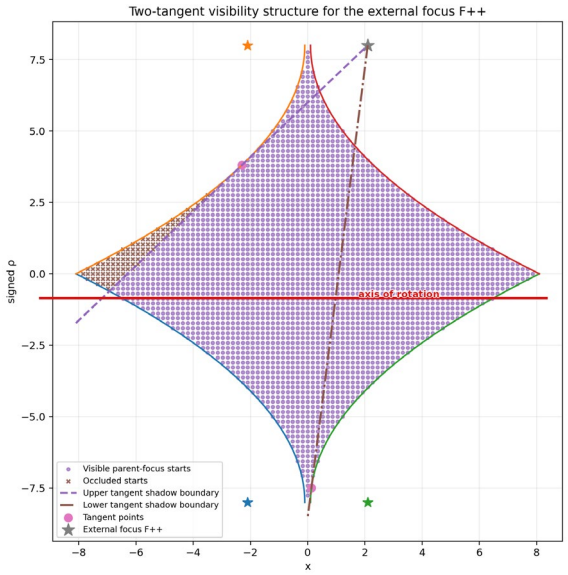

Рисунок 3. Структура видимости внешнего родительского фокуса, ограниченная двумя касательными.

5. Ветвевой закон фокального возврата

Закон определён на общей регулярной знаково-меридиональной области. Он состоит из точного ветвевого отображения, строгого условия возврата к родительскому фокусу и соотношения минимального уровня возврата с периодом. Общая гладкая динамика PPB остаётся двумерной; закон фокального возврата выделяет внутри неё особую инвариантную/возвратную структуру.

5.1 Безразмерное отображение ветвевого состояния

$$X\_c(u) = (b(\delta+u^2), s(r-2u)), \quad r=R/f=1/\gamma, \quad 0<u<r/2 \quad (22)$$

Ненормированная внутренняя нормаль имеет вид n=(s,bu), поэтому зеркальное отражение задаётся как

$$d' = d - 2(d\cdot n)/(1+u^2)\, n \quad (23)$$

Кандидатное столкновение с ветвью (B,S) определяется уравнением

$$B\, d\_\rho\, v^2 + 2S\, d\_x\, v + d\_\rho[(B-b)\delta - bu^2] + d\_x[(s-S)r-2su] = 0 \quad (24)$$

Закон включает физическое правило отбора: 0<v<r/2, положительное время пролёта и наименьшее положительное время пролёта среди всех допустимых ветвей.

5.2 Постфокальное многообразие и строгое условие возврата

$$F\_c = (b(\delta+1), sr) \quad (25)$$

$$\mathcal{A} = \{ (c,u,d): d=(-b,0), 0<u<r/2 \} \quad (26)$$

Пусть w=(c₀,c₁,…,c_n,c_f) — фиксированное физическое слово ветвей, начинающееся на $\mathcal{A}$. Итерация уравнений столкновения и отражения даёт конечную алгебраическую систему E₁=…=E_n=0. Если выходящее состояние перед последним столкновением равно (X_n,d_n), строгая сонаправленность с родительским фокусом ветви c_f требует

$$F\_w \equiv \det(F\_\{c\_f\}-X\_n, d\_n) = 0, \quad \tau>0 \quad (27)$$

Следующее наиболее раннее физическое столкновение действительно должно происходить с c_f. Отражение в этой точке возвращает луч на $\mathcal{A}$. Уравнения {E_k,F_w} вместе с неравенствами наиболее раннего столкновения образуют точный неявный закон фокального возврата для выбранного слова.

5.3 Минимальный уровень возврата и примитивный период

Пусть n_min — наименьшее число промежуточных столкновений, при котором выполняются все строгие физические условия возврата к родительскому фокусу. На проверенной области каждое принятое примитивное семейство фокального возврата удовлетворяет

$$P\_primitive = 2(n\_min+1) \quad (28)$$

Здесь n_min — индекс уровня возврата, а не сам период. На одном уровне могут существовать несколько слов ветвей, а кандидат является примитивным только в том случае, если никакая меньшая положительная итерация не замыкается. Приведённое выше соотношение имеет статус теоремы только для аналитически решённых семейств; для общего множества семейств оно остаётся высокоточным законом на конечной области параметров.

5.4 Структура замыкания при зеркальном обращении

Пусть M_x переставляет R+↔L+ и R−↔L−. Для регулярного возврата, в котором вторая половина порождается зеркальной симметрией относительно x и обратимостью бильярда, два полуслова удовлетворяют

$$w_2 = M\_x(\mathrm{reverse}(w_1)) \quad (29)$$

Это тождество объясняет чётное замыкание проверенных семейств фокального возврата. Само по себе оно не доказывает физичность каждого алгебраического корня; условия наиболее раннего столкновения и примитивного периода остаются обязательными.

Таблица 3. Число канонических семейств фокального возврата на конечной области до n_min=6. Все 710 принятых примитивных семейств удовлетворяют P=2(n_min+1).

n_min	Примитивные семейства	Примитивный период
1	2	4
2	8	6
3	18	8

n_min	Примитивные семейства	Примитивный период
4	60	10
5	160	12
6	462	14

5.5 Универсальное утверждение для двух типов

На общей регулярной знаково-меридиональной области уравнения столкновений, физический выбор наиболее раннего столкновения, условие возврата к родительскому фокусу и проверенное соотношение периода сопряжены отображением Ф. Это универсальная часть закона. Утверждения, зависящие от типа, начинаются только тогда, когда в рассмотрение входят трёхмерное вложение, топология апертуры, осевой момент импульса, поверхностная мера или немеридиональное косое движение.

Центральное семейство F4 и прямоугольное семейство P4 возникают как неподвижные точки различных ветвей одного и того же редуцированного отображения. Для ветви R− при v=u получаем

$$u^2 + 2(\gamma+\eta)u - 1 = 0, \quad u\_F=\sqrt{(1+(\gamma+\eta)^2)}-(\gamma+\eta) \quad (30)$$

Для ветви L− при v=u получаем

$$(u^2-1)(1-2\gamma u)=0 \quad (31)$$

Регулярный внутренний корень u=1 является состоянием прямоугольного P4 и существует при $\gamma<1/2$.

6. Точные периодические семейства

6.1 Точное семейство F4

Пусть a=h+f и $D=\sqrt{(a^2+R^2)}$. Луч, запускаемый из центра в направлении родительского фокуса, достигает стенки при

$$u\_F = (D-a)/R = R/(D+a) = \tan(\theta\_F/2) \quad (32)$$

$$s\_F = 1 - 2f/(D+a) \quad (33)$$

Четыре точки столкновения имеют координаты (±s_F a,±s_F R), а точная длина цикла равна

$$L\_F4 = 4(D+h-f) \quad (34)$$

При параксиальном сдвиге отражения $c\_F=1/[f(1+u\_F^2)]$, горизонтальном пролёте $\ell\_h=2s\_F(h+f)$ и диагональном пролёте $\ell\_d=2s\_FD$ след полуобхода равен

$$Q\_F = 2 + 2c\_F(\ell\_h+\ell\_d) + c\_F^2\ell\_h\ell\_d \quad (35)$$

$$\lambda\_\{s,u\} = [(Q\_F \mp \sqrt{(Q\_F^2-4)})/2]^2, \quad \lambda\_s\lambda\_u=1 \quad (36)$$

Для всех положительных регулярных параметров Q_F>2; следовательно, F4 является точным гиперболическим семейством периода 4 на указанной области h≥0.

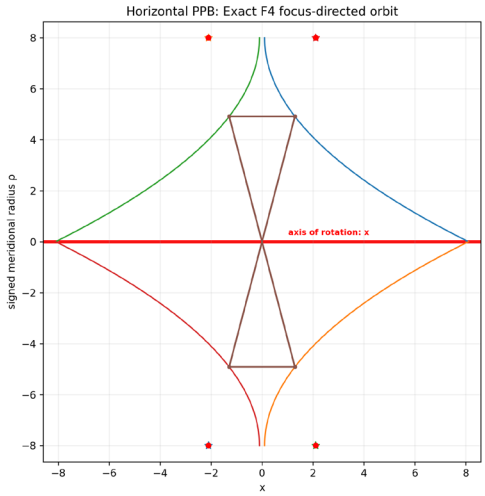

Рисунок 4. Точная фокусно-направленная орбита F4 в канонической геометрии.

6.2 Прямоугольное семейство P4

Вторая неподвижная точка уровня n_min=1 соответствует u=1. Она регулярна только при R>2f (γ<1/2). При q=R−2f точки столкновения образуют прямоугольник (±(h+f),±q), периметр которого равен

$$L\_P4 = 4(h+R-f) \quad (37)$$

Внутренний боковой запуск из x=±(h+f) в направлении соседнего родительского фокуса достигает u=1 и поворачивает точно на 90°, переводя луч на ту же P4. Для малого углового возмущения ε при начальной ординате y_0 точное соотношение первого столкновения имеет вид

$$u_1(\varepsilon)=\tan\varepsilon + \sqrt{(1-A\tan\varepsilon+\tan^2\varepsilon)}, \quad A=(R-y_0)/f \quad (38)$$

Область существования γ<1/2 следует из геометрии и не зависит от канала возмущения.

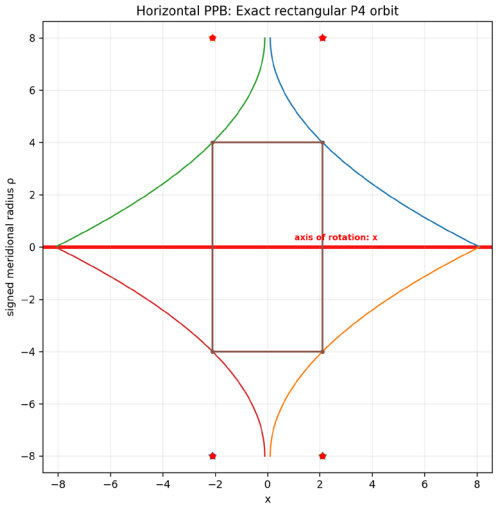

Рисунок 5. Точный прямоугольный скелет P4, создаваемый внутренним боковым запуском.

6.3 Центральная P2 и краевая предельная P2 «край—край»

Регулярная центральная нормальная P2 определяется единственным положительным корнем

$$f\,u_2^3 + (h+2f)u_2 - R = 0 \quad (39)$$

Противоположные точки столкновения лежат на одной прямой, проходящей через центр. Другой объект существует при u=0 и h>0: два края рогов при ρ=±R ограничивают конечный отрезок −h≤x≤h. Поскольку u=0 является краем, разворот определяется только через одностороннюю предельную нормаль. Получающийся цикл представляет собой идеальную краевую предельную орбиту, а не регулярную гладкостенную орбиту.

$$L_{line,P2}=4h \quad (40)$$

Для близкой фокусно-направленной координаты u возврат на ту же ветвь удовлетворяет

$$u\,v^2 + (u^2-1)v + k\,u = 0, \quad k=1+2h/f \quad (41)$$

$$T_h(u) = [1-u^2-\sqrt{((1-u^2)^2-4ku^2)}]/(2u) \quad (42)$$

$$T_h(u)=k\,u+k(k+1)u^3+O(u^5), \quad T_h'(0)=1+2h/f \quad (43)$$

Таким образом, при h>0 редуцированное краевое предельное состояние линейно отталкивающее. При h=0 линейный множитель становится единичным, а первый отталкивающий член — кубическим. В вертикальной реализации при h>0 знаково-меридиональный образ отрезка «край—край» проходит через полярную апертуру и поэтому не является физическим отражающим отрезком вертикальной поверхности.

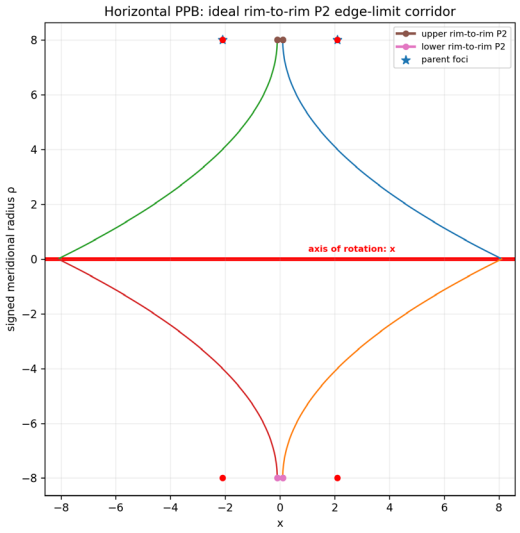

Рисунок 6. Горизонтальный краевой предельный коридор P2 «край—край» при h>0. Отрезок расположен на фокальном радиусе и отличается от оси вращения.

6.4 Точное h-инвариантное семейство P6

Пусть r=R/f. Пусть u — координата верхнего столкновения на уровне перехода между рогами, а v — координата нижнего столкновения на хорде нормального разворота в том же роге. Одна половина орбиты имеет вид L+(u)→L−(v)→L+(u)→R+(u), а другая является её зеркальным образом в правом роге. Два точных условия равны

$$E_1(u,v)=u\,v^2+(u^2-1)v-u-r(u^2-1)=0 \quad (44)$$

$$E_2(u,v)=2(u+v-r)-v(u^2-v^2)=0 \quad (45)$$

Исключая v, получаем

$$Res_v(E_1,E_2)=-r(r-2u)[r(u^2-1)^3-u(u^2+1)^2] \quad (46)$$

Множитель $r-2u$ соответствует исключённой конечной точке осевого острия. Поэтому регулярное семейство удовлетворяет

$$r(u^2-1)^3 = u(u^2+1)^2 \quad (47)$$

$$v = 2u/(u^2-1) \quad (48)$$

Функция $r(u)=u(u^2+1)^2/(u^2-1)^3$ строго убывает при $u>1$, поскольку

$$dr/du = -(u^2+1)(u^4+10u^2+1)/(u^2-1)^4 < 0 \quad (49)$$

При $u=\sqrt{3}$ имеем $r=2\sqrt{3}$. Следовательно, единственный регулярный член существует точно при

$$1<u<\sqrt{3}, \quad R/f>2\sqrt{3}, \quad \gamma=f/R<1/(2\sqrt{3}) \quad (50)$$

Координаты столкновений зависят только от R/f и поэтому инвариантны относительно h. Точная длина цикла равна

$$L_6 = 4h + 4fu^2 + 4Ru(3-u^2) \quad (51)$$

Таким образом, $dL_6/dh=4$, тогда как u и v остаются неизменными. При равенстве $\gamma=1/(2\sqrt{3})$ регулярная орбита заканчивается на осевом острие.

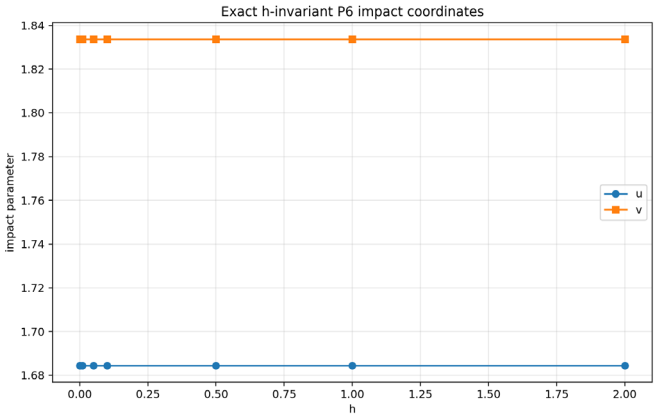

Рисунок 7. Точная h-инвариантность координат столкновений P6; при изменении h меняется только метрическая длина цикла.

Таблица 4. Аналитически определённые периодические и предельные семейства.

Семейство	**Точное существование / определяющее соотношение**	**Статус**
F4	$f>0$, $R>0$, $h\geq 0$; $u=u_F$	точный период 4, гиперболическое
Прямоугольная P4	$\gamma<1/2$; $u=1$	точный период 4
Центральная нормальная P2	положительный корень $fu_2^3+(h+2f)u_2-R=0$	точный рекуррентный скелет
P2 «край—край»	$h>0$, $u=0$, односторонняя предельная нормаль	краевой предельный объект, не гладкостенная орбита
h-инвариантная P6	$\gamma<1/(2\sqrt{3})$; $r(u^2-1)^3=u(u^2+1)^2$	точный период 6, гиперболическое

6.5 Представительные физические периодические классы малых порядков

Точные семейства F4, прямоугольное P4 и h-инвариантное P6 являются аналитически выделенными членами более широкого периодического скелета малых порядков. В канонической геометрии f=2, R=8, h=0.1 разрешены шестнадцать сведённых по симметрии физических классов с периодами P4, P6, P8, P10 и P12. Они заполняют минимальные уровни фокального возврата n_min=1,...,5: F4 и P4 образуют два якоря n_min=1, представители P6 возникают при n_min=2, P8 — при n_min=3, P10 — при n_min=4 и P12 — при n_min=5.

Эти шестнадцать классов образуют представительный атлас малых порядков, а не полный каталог периодической динамики PPB. Все шестнадцать гиперболичны в канонической высокоточной проверке. Для F4 имеется замкнутая формула монодромии, а для семейства C03/G2 P6 получен точный аналитический результат о гиперболичности на его регулярной области существования; гиперболичность остальных представительных классов установлена численно для канонической геометрии. Общая динамика PPB также содержит периодические состояния вне иерархии фокального возврата, включая нефокальные траектории и траектории нечётного периода.

Полная таблица маршрутов и шестнадцать отдельных рисунков физических классов сохранены в Приложении A.

7. Устойчивость, границы существования и масштабное подобие

7.1 Монодромия F4 и P6

Приведённые выше мультипликаторы F4 удовлетворяют λ_sλ_u=1 и Q_F>2, поэтому F4 гиперболична во всей своей регулярной области h≥0. Большой неустойчивый мультипликатор описывает консервативный неустойчивый периодический скелет, а не притягивающее состояние.

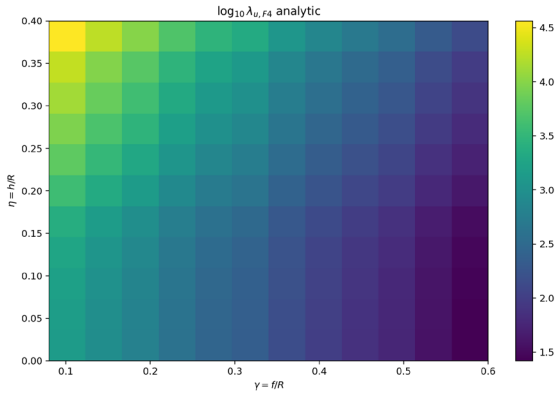

Рисунок 8. Аналитический неустойчивый мультипликатор Флоке F4 на безразмерной плоскости параметров.

Для P6 определим матрицы свободного пролёта и отражения F(ℓ)=[[1,ℓ],[0,1]] и S(c)=[[1,0],[c,1]]. На точной ветви P6

$$c_u=1/[f(1+u^2)],\quad c_v=(u^2-1)^3/[f(u^2+1)^3] \quad (52)$$

$$A_6=S_u\,F(\ell_S)\,S_v\,F(\ell_S)\,S_u\,F(\ell_H),\quad M_6=A_6^2 \quad (53)$$

$$P(u)=10u^{10}-7u^8-112u^6-34u^4-2u^2+1 \quad (54)$$

$$H(u)=u^8+4u^6-58u^4+4u^2+1=(u^4-6u^2+1)(u^4+10u^2+1) \quad (55)$$

$$D(u)=(u^2-1)^3(u^2+1)^3 \quad (56)$$

$$Q_6=\mathrm{Tr}(A_6)=-2[P(u)+\delta H(u)]/D(u), \quad \delta=h/f \quad (57)$$

$$\mathrm{Tr}(M_6)=Q_6^2-2, \quad \det(M_6)=1 \quad (58)$$

Для $1<u<\sqrt{3}$ выполняются $D(u)>0$ и $H(u)<0$. При $\delta=0$

$$Q_6(0)-2 = -2u^2(u^4+10u^2+1)(u^6-11u^2-2)/D(u) > 0 \quad (59)$$

$$\partial Q_6/\partial\delta = -2H(u)/D(u) > 0 \quad (60)$$

Следовательно, каждый регулярный член этого семейства P6 гиперболичен при $h\geq 0$. Увеличение h/f усиливает гиперболичность, не изменяя u и v.

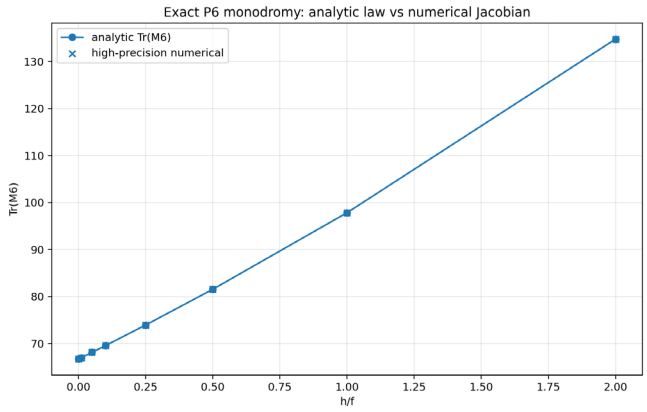

Рисунок 9. Аналитическая монодромия P6 в сравнении с прямым численным дифференцированием на регулярной области.

7.2 Точные границы существования и выхода

Независимые безразмерные переменные равны $\gamma=f/R$ и $\delta=h/f$. Регулярную горизонтальную кривизну можно записать как

$$K_H R^2 = -u / [2\gamma(1-2\gamma u)(1+u^2)^2] \quad (61)$$

Редуцированные пороги выхода принимают вид

$$u_A = \sqrt{(2+2\delta)} - \sqrt{(1+2\delta)} \quad (62)$$

$$u_B = [\sqrt{(\gamma^2(1+2\delta)^2+4)} - \gamma(1+2\delta)]/2 \quad (63)$$

$$(u^2+1)^2 + (4/\gamma)u(u^2-1) = 0, \quad u=u_C \quad (64)$$

При $0<\gamma<1$ величина u_C является большим положительным корнем. При $\gamma=1$ полином превращается в $(u^2+2u-1)^2$, и

$$u_C=\sqrt{2}-1, \quad \delta_{escape,c}=1/2 \quad (65)$$

Интервал выхода равен $\Delta u_{escape}=\max(0,u_C-u_B)$. Это свойство редуцированного фокусно-направленного отображения и не тождественно вероятности выхода полного двумерного бильярда.

Не следует смешивать три различные критические механизма: прямоугольное P4 заканчивается при $\gamma=1/2$, точное P6 — при $\gamma=1/(2\sqrt{3})$, а редуцированный порог u_C испытывает слияние двойного корня при $\gamma=1$.

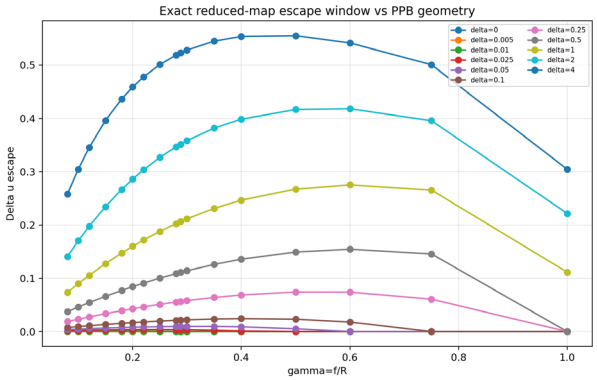

Рисунок 10. Точная геометрия редуцированного окна выхода на плоскости γ и δ, включая границу двойного корня при γ=1.

7.3 Равномерное масштабное подобие

При преобразовании (f,R,h)↦q(f,R,h) все физические длины масштабируются в q раз, тогда как γ, δ, безразмерные ветвевые уравнения, уровни возврата, следы монодромии и мультипликаторы Флоке остаются неизменными. Это точное подобие идеальных лучевых уравнений. Конечная длина волны, шероховатость поверхности, скругление краёв и материальные потери вводят дополнительные размерные масштабы и поэтому не обязаны подчиняться этому подобию.

8. Концентрация лучевой плотности

8.1 Что означает «лучевая плотность» в настоящей работе

Утверждение о лучевой плотности не является однозначным до тех пор, пока не заданы ансамбль запусков и мера плотности. Поэтому в настоящем анализе различаются четыре понятия, которые часто смешивают: (i) плотность проталкивания ансамбля начальных точек в редуцированную координату u; (ii) плотность длины пути внутри полости; (iii) плотность столкновений на стенке; и (iv) точные концентрационные многообразия меньшей размерности, возникающие вследствие симметрии или вырожденного по рангу отображения. Ни одна из этих величин сама по себе не является плотностью оптической или акустической мощности. Конечная длина волны, дифракция, потери, когерентность источника и скругление границы регуляризуют геометрические сингулярности.

Анализ плотности использует открытые рога, заданную меру начальных точек в знаково-меридиональной области, точные фокусно-направленные запуски и накопление длины пути после первого отражения. Независимые численные трассировки лучей повторно проверили геометрию на фокальной линии и в её окрестности для значений h от 0 до 2 и непосредственно подтвердили локальное отображение возврата. Поэтому значения плотности всегда приводятся вместе с соответствующим ансамблем запусков и не интерпретируются как универсальные плотности мощности.

8.2 Точный краевой предельный канал периода 2 на фокальной линии, возникающий только при h > 0

Горизонтальная линия ρ = ±R содержит как внешние родительские фокусы, так и две вершины рогов. При h > 0 две вершины $V_\tau^\pm = (\pm h, \tau R)$ различны, и между рогами остаётся конечный внутренний отрезок. Любой старт $S = (x_0, \tau R)$ при $|x_0| < h$, запущенный вдоль этой линии к одному из соседних внешних фокусов, встречает соответствующую вершину рога раньше, чем может достичь фокуса. При u = 0, которое является краем регулярной отражающей области, односторонняя предельная

меридиональная нормаль направлена по оси. В идеальном краевом предельном продолжении зеркальное отражение разворачивает луч на 180°, поэтому луч попеременно проходит между двумя вершинами.

$$\mathscr{L}_\tau = \{(x, \tau R): -h \le x \le h\}, \quad \ell_{half} = 2h, \quad L_{line,P2} = 4h. \quad (66)$$

При h>0 две вершины различны, и этот отрезок задаёт конечный геометрический краевой предельный коридор, а не регулярную гладкостенную орбиту. Прямая численная трассировка 252 невырожденных конфигураций с тем же правилом одностороннего предела сохраняла каждое столкновение при u=0; каждое отражение в вершине было разворотом на 180° в пределах численной точности, а максимальная ошибка координаты вершины составила 2.22×10^−16. При h=0 две вершины сливаются, и конечная длина коридора исчезает.

Односторонняя меридиональная кривизна каждой падающей ветви стремится к $\kappa_0 = 1/(2f)$, что даёт формальную величину краевого предельного сдвига отражения $c_0 = 1/f$. При длине свободного пролёта 2h соответствующий формальный след полуобхода и мультипликаторы линеаризованного возврата полного периода равны

$$Q_0 = 2 + 2h/f, \quad \lambda_{s,u}^{(line)} = [(Q_0 \mp \sqrt{(Q_0^2 - 4)})/2]^2. \quad (67)$$

В рамках этого одностороннего краевого предельного продолжения формальный возврат гиперболичен при любом h > 0, тогда как h = 0 представляет собой параболически вырожденный предел нулевой длины. Это не теорема об устойчивости гладкостенного бильярда: идеальная линия может поддерживать повторные прохождения луча только в рамках указанной предельной конструкции, а пучок конечной угловой ширины к ней не притягивается.

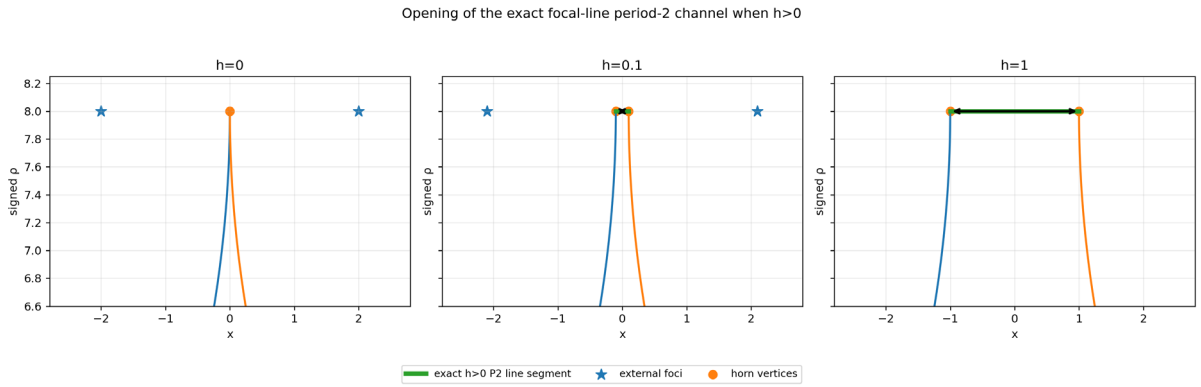

Рисунок 11. Открытие точного краевого предельного коридора P2 на фокальной линии при переходе h от нуля к положительным значениям. Внешние фокусы остаются на ρ = R, а вершины рогов расходятся на расстояние 2h.

8.3 Точная бифуркация плотности вблизи линии внешнего фокального радиуса

Общий закон первого столкновения $u_0 = \tan(\Theta/2)$ имеет дополнительное следствие для плотности. В полярных координатах с центром в выбранном внешнем фокусе обозначим через ξ радиальное расстояние от этого фокуса. Тогда u_0 зависит от направления луча Θ, но не от ξ. Поэтому все коллинеарные старты на одной и той же видимой линии визирования переходят в одно и то же постпервое состояние. В дифференциальной форме $\partial u_0/\partial \xi = 0$: двумерное множество стартов уменьшается по рангу.

Для равномерной плотности стартов в исследуемой знаково-меридиональной области открытых рогов $dA = \xi\, d\xi\, d\Theta$ и $d\Theta/du = 2/(1+u^2)$. Если видимый радиальный интервал вдоль направления равен $[\xi_{min}(u), \xi_{max}(u)]$, плотность проталкивания равна

$$p_u(u) = [\xi_{max}^2(u) - \xi_{min}^2(u)] / [A(1 + u^2)], \quad A = 4hR + R^3/(3f). \quad (68)$$

На точной фокальной линии u = 0 интервал центрального зазора равен $\xi \in [f, f + 2h]$. Следовательно,

$$p_u(0) = 4h(f + h)/A. \quad (69)$$

Уравнение (69) задаёт строгую h-зависимую бифуркацию плотности. При h = 0 доступный радиальный интервал имеет нулевую меру и p_u(0) = 0. При любом h > 0 вблизи краевого предельного канала фокальной линии появляется множество стартов конечной меры. Численные гистограммы на рисунке 12 воспроизводят этот качественный переход: при увеличении h постепенно заполняется сектор малых u, почти отсутствующий в ансамбле при h = 0.



Рисунок 12. Плотность проталкивания видимых фокусно-направленных стартов в u_0 при h = 0, 0.1, 0.5, 1 и 2. При раскрытии зазора между рогами включается населённость области малых u.

После первого отражения луч идёт горизонтально при ρ(u) = R − 2fu. Расстояние до противоположного верхнего рога равно ℓ_h(u) = 2(h + fu²). Поэтому плотность длины пути первого горизонтального прохода на единицу поперечной координаты равна

$$\Lambda_1(\rho(u)) = p_u(u)\, \ell_h(u)/(2f) = p_u(u)(h + fu^2)/f. \quad (70)$$

На линии фокального радиуса это принимает вид

$$\Lambda_1(R) = 4h^2(f + h)/(fA). \quad (71)$$

Таким образом, пространственный гребень плотности пути при ρ ≈ R математически отсутствует в пределе h = 0 и включается при h > 0. Это наиболее прямой количественный ответ на вопрос о том, что изменяется на линии внешних фокусов при разделении двух рогов РРВ.

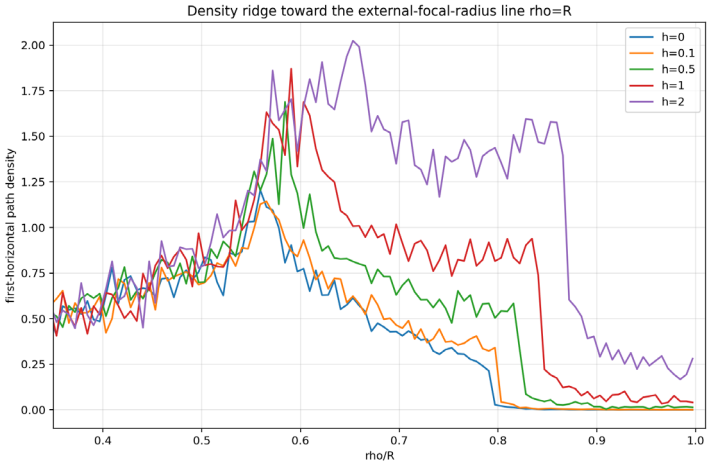

Рисунок 13. Плотность пути первого горизонтального прохода в зависимости от ρ/R. Увеличение h создаёт выраженный гребень плотности на больших радиусах в направлении линии внешнего фокального радиуса ρ = R.

Таблица 5. Точные h-зависимые величины для фокальной линии и плотности при f = 2, R = 8.

h	4h	λu,line	p_u(0)	Λ1(R)	Δu_escape
0	0	1	0	0	0
0.1	0.4	1.87733	0.00948795	0.000474398	0.00910882
0.5	2	4	0.0493421	0.0123355	0.0510914
1	4	6.8541	0.102273	0.0511364	0.100241
2	8	13.9282	0.214286	0.214286	0.188017

8.4 Карты плотности и отсутствие универсального внутреннего точечного аттрактора

Карты плотности после первого отражения на рисунках 14–16 показывают широкое многопоточное лучевое поле, а не единый универсальный точечный аттрактор для произвольных видимых фокусно-направленных стартов. Наиболее сильные гистограммные максимумы возникают в высокорадиусных, пристеночных полосах, положение которых изменяется с h и зависит от меры запуска. Поэтому их следует классифицировать как зависящие от ансамбля максимумы плотности, а не как новые точные фокальные точки.

Этот отрицательный результат научно важен. Точный закон PPB порождает детерминированное уменьшение размерности и точные периодические скелеты, однако общие фокусно-направленные ансамбли не концентрируются все в одной внутренней точке. Точные точечные концентрации возникают только для специально заселённых осесимметричных семейств, описанных ниже.

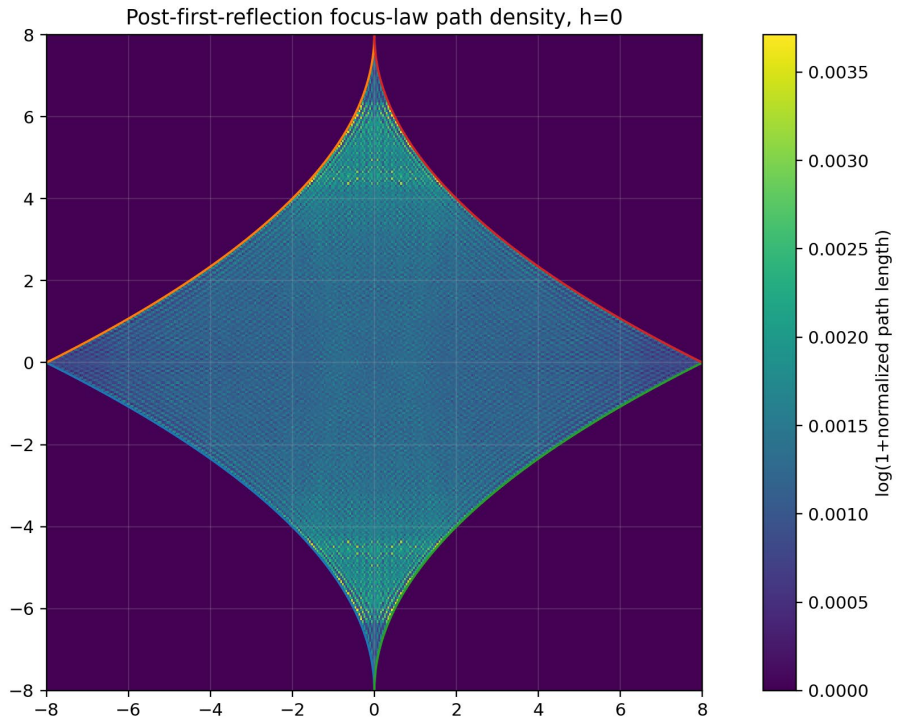

Рисунок 14. Плотность пути в открытых рогах после первого отражения для фокусного закона при h = 0. Коридор фокальной линии схлопнут; поле остаётся широко многопоточным.

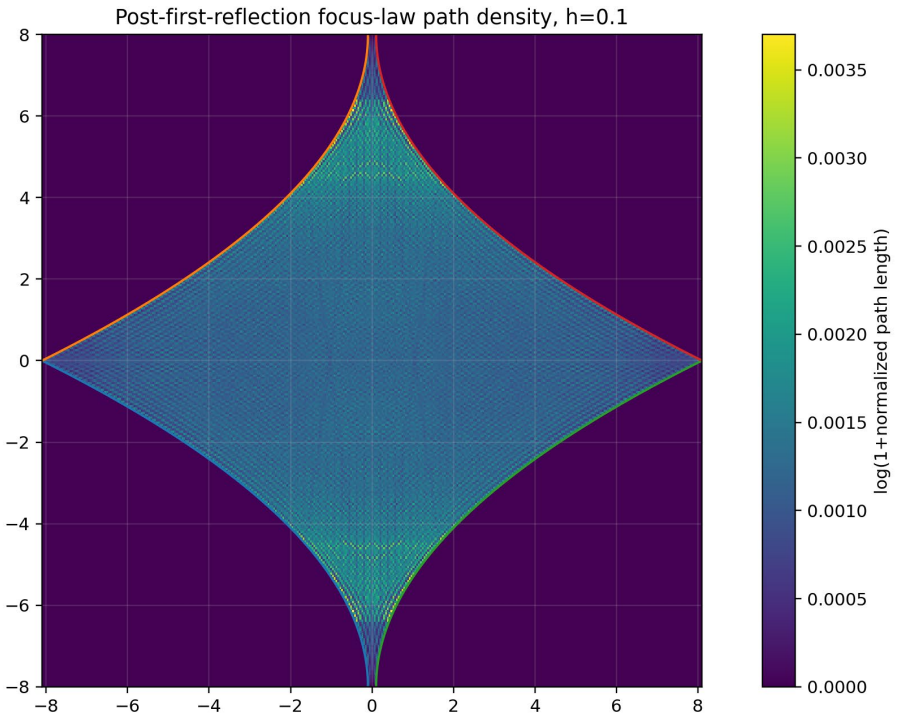

Рисунок 15. Соответствующая плотность пути в открытых рогах при h = 0.1. Присутствует конечное центральное разделение рогов, тогда как поле в целом остаётся многопоточным.

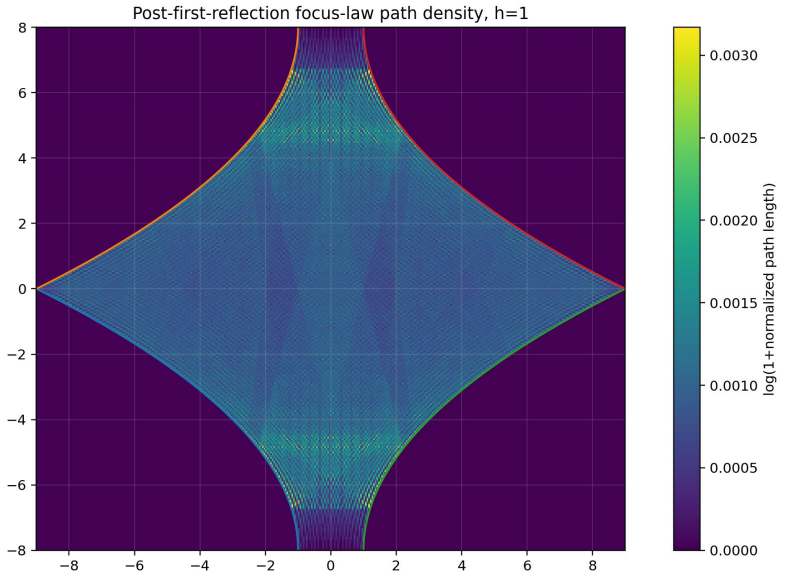

Рисунок 16. Плотность пути в открытых рогах при h = 1. Населённость области малых и/больших радиусов и вклад центрального зазора существенно усиливаются.

8.5 Дефицит плотности в окне выхода и отсутствие складчатой каустики первого отображения

Ветвевые пороги также перестраивают плотность. При фиксированных f = 2 и R = 8 начало ветви L−, u_C, не зависит от h, тогда как u_B уменьшается с h. Истинный открытый интервал выхода появляется при u_B < u_C. Порог открытия равен

$$h_{esc} = \tfrac{1}{2}[R(1 - u_C^2)/u_C - f] = 0.01613323034\ldots \quad \text{for } f = 2,\ R = 8. \quad (72)$$

При h = 0 конечного окна выхода нет. При h = 0.1 его ширина равна 0.0091088; при h = 0.5 — 0.0510914; при h = 1 — 0.1002413; при h = 2 — 0.1880172. Это создаёт настоящую полосу дефицита лучевой плотности, а не полосу концентрации.

Для плотности столкновений со стенкой соответствующий якобиан имеет вид p_v(v) = Σ p_u(u)/|dv/du|. Прямая проверка производной не выявила ни смены знака, ни нуля dv/du на физических ветвях первого отображения R+, R− или L− для h = 0, 0.1, 0.5, 1 и 2. Поэтому первое редуцированное ветвевое отображение не имеет сингулярности складчатой каустики в этом проверенном семействе. Ветвь L− даёт лишь конечное сжатие; при γ = 0.25 максимальный ограниченный коэффициент 1/|dv/du| составляет около 2.20. Ветви R+ и R− преимущественно разрежают плотность столкновений.

8.6 Точные осесимметричные многообразия концентрации внутри PPB

Хотя общий фокусно-направленный ансамбль не имеет универсального точечного аттрактора, несколько точных периодических семейств порождают подлинные многообразия концентрации меньшей размерности при вращении меридиональных решений по азимуту. Эти структуры являются геометрическими и могут быть локализованы аналитически.

Центральная концентрация F4. Диагональные участки F4 проходят через O. Их знаково-меридиональное уравнение ρ = ±(R/a)x ограничено сегментом F4. Вращение полного азимутального семейства F4 порождает конический лучевой лист. Для равномерной азимутальной/путевой меры на поверхности вращения элемент площади равен dA_sheet = 2πρ ds; поэтому геометрическая плотность листа масштабируется как Σ_F4 ∝ 1/ρ, и все

азимуты сходятся в O. Следовательно, центр является точной точкой концентрации для полностью заселённого кольцевого семейства F4 при любом $h \geq 0$.

Осевые концентрации P4. При $R > 2f$ прямоугольная P4 имеет вертикальные диаметральные участки $x = \pm a$, $-q \leq \rho_{signed} \leq q$, где $q = R - 2f$. Вращение меридионального семейства образует два диска при $x = \pm a$. Их плотность путевого листа также масштабируется как $1/\rho$, создавая точные осевые точки концентрации $C_{\pm} = (\pm(h+f), 0)$. Радиус диска q не зависит от h, тогда как положения осевых максимумов линейно смещаются с h.

Концентрация центральной нормальной P2. Центральная P2 удовлетворяет $f u_2^3 + (h + 2f)u_2 - R = 0$ и $\rho_2 = u_2 x_2$. Поэтому её противоположные точки столкновения лежат на прямой, проходящей через O. При азимутальном вращении эта прямая образует ещё один конический лист с той же центральной сингулярностью $1/\rho$. Эта P2 является точным рекуррентным скелетом, а не аттрактором. Утверждение о гиперболичности для всех параметров здесь не делается.

Идеальная концентрация у осевого острия. При $u \to u_{max} = R/(2f)$ физический радиус кольца $\rho = R - 2fu$ стремится к нулю. Если конечный, распределённый по азимуту поток лучей достигает таких колец, множитель длины окружности $2\pi\rho$ формально даёт усиление кольцевой плотности как $1/\rho$. Это наименее устойчивый из точных геометрических эффектов, поскольку идеальное острие имеет сингулярную кривизну; любое реальное скругление, дифракция или конечная длина волны регуляризуют его.

8.7 Научная интерпретация перехода от h = 0 к h > 0

Параметр h изменяет лучевую плотность тремя математически различными способами. Во-первых, он открывает конечный краевой предельный коридор P2 на фокальной линии точной длины 2h, причём населённость области малых u при равномерной площадной мере пропорциональна $h(f+h)$. Во-вторых, он усиливает высокорадиусный гребень плотности первого прохода согласно $h^2(f+h)$. В-третьих, после превышения порога открытия выхода он одновременно создаёт полосу дефицита в редуцированном отображении. Поэтому увеличение h не просто «увеличивает концентрацию»: оно перераспределяет лучевую плотность, открывая один точный высокорадиусный краевой предельный канал и одновременно удаляя растущий интервал лучей через открытый выход.

Для технического проектирования наиболее воспроизводимыми концентрационными локусами являются не общие гистограммные максимумы, а аналитически заданные многообразия или предельные локусы: краевой предельный цилиндр фокальной линии $\rho = R$ для точного выравнивания при $h > 0$, центральные конические пересечения F4/P2, осевые точки P4 при $x = \pm(h+f)$ и выбранные периодические кольца на стенке. Эти локусы дают воспроизводимые кандидатные положения для датчиков, поглотителей, излучателей или возмущающих образцов при условии последующей конечно-волновой проверки.

9. Трёхмерное разделение двух типов PPB

9.1 Разделение метрики, кривизны и апертуры

Хотя регулярный знаково-меридиональный закон общий, полные поверхности не являются изометрическими. Вблизи горизонтального осевого острия, где $R-2fu \to 0$, горизонтальная азимутальная окружность схлопывается, тогда как вертикальная окружность в общем случае остаётся конечной. Вблизи $u=0$ при $h>0$ вертикальная окружность равна $2\pi h$ и ограничивает полярное отверстие, тогда как горизонтальная

окружность приблизительно равна 2πR. Поэтому различные метрические коэффициенты и поля кривизны порождают различную немеридиональную динамику и динамику выхода.

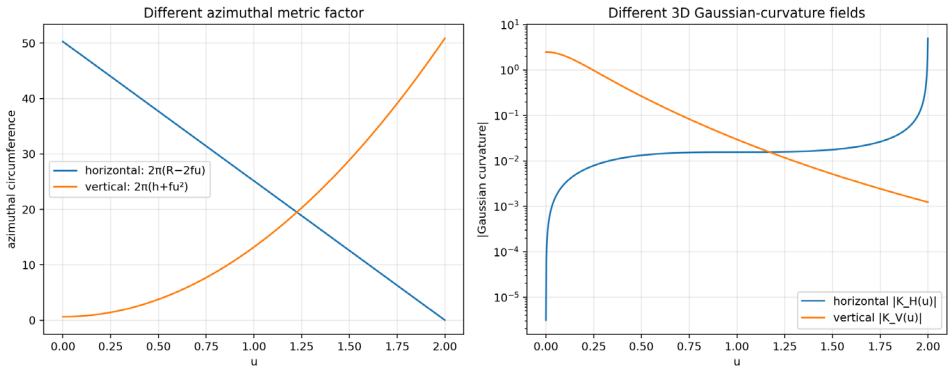

Рисунок 17. Азимутальная окружность и модуль гауссовой кривизны для двух типов PPB в канонической геометрии.

9.2 Разворачивание F4 при слабом горизонтальном косом возмущении

Осесимметрия сохраняет горизонтальный осевой момент импульса, где **r** обозначает радиус-вектор,

$$J_x=(\mathbf{r}\times d)_x, \quad j=J_x/R \qquad (73)$$

Для косого возмущения якоря F4 координата первого столкновения с противоположным рогом u_1 удовлетворяет точному неявному соотношению

$$(1-2\gamma u_1)^2-s_F^2 = [j^2/(s_F^2-j^2)]\,[2\eta+\gamma(u_F^2+u_1^2)]^2 \qquad (74)$$

Разложение по теореме о неявной функции в окрестности j=0 даёт

$$u_1=u_F-C_2j^2+O(j^4), \quad C_2=(\gamma+\eta)^2/(\gamma s_F) \qquad (75)$$

Следовательно, ведущие смещения квадратичны, а не линейны по косому угловому моменту. Это локальный закон первого столкновения; он не утверждает существования глобально периодического косого продолжения F4.

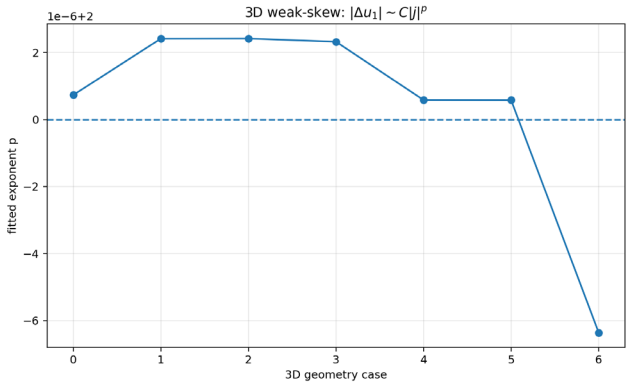

Рисунок 18. Измеренные показатели слабого косого возмущения для семи геометрий; аппроксимированный показатель приблизительно равен 2, что согласуется с аналитическим квадратичным членом.

9.3 Вертикальное тождество первой косой хорды и согласованный трёхмерный транспорт

Вертикальный тип сохраняет J_z=(**r**×d)_z, где используется то же обозначение радиус-вектора **r**. После отражения через родительский фокус возмутим радиальное выходящее направление по азимуту, сохраняя d_z=0: d(ψ)=(−cosψ,sinψ,0). Поскольку z остаётся постоянной, следующее пересечение с тем же листом остаётся на том же круговом сечении, поэтому

$$u_1=u\_F, \quad t_1=2r\_\{F4\}\cos\psi \quad (76)$$

Это тождество является точным, пока данная хорда представляет собой наиболее раннее физическое столкновение. Оно принципиально отличается от горизонтального квадратичного сдвига. Тождество не означает глобальной косой периодичности.

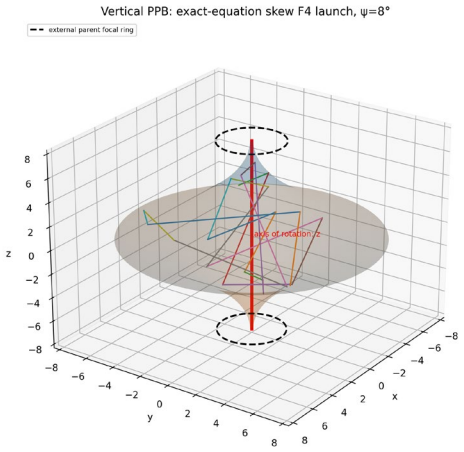

Рисунок 19. Вертикальный косой запуск F4, иллюстрирующий первую хорду с постоянным z и внешние фокальные кольца.

Согласованное трёхмерное сравнение с одинаковыми безразмерными локально-граничными случайными параметрами запуска подтверждает, что две полные поверхности могут иметь различное поведение выхода и времени пребывания, несмотря на общий регулярный меридиональный закон. Сравнение обусловлено указанной мерой запуска и не является утверждением о плотности энергии.

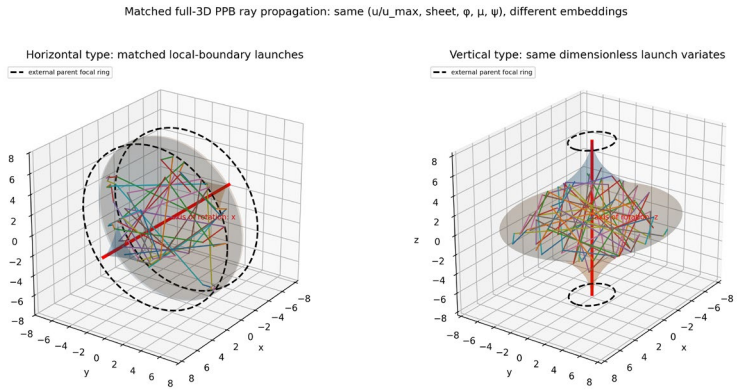

Рисунок 20. Согласованные примеры трёхмерных лучей для горизонтального и вертикального типов при одинаковых безразмерных параметрах запуска.

Таблица 6. Сводка трёхмерной проверки на конечной области.

Величина	Результат
Согласованные пары H/V	5,760 на 24 геометриях (11,520 отдельных траекторий)
Максимум $\|\Delta J_x\|/R$	3.719×10^{-15}
Максимум $\|\Delta J_z\|/R$	6.883×10^{-15}
Показатель слабого горизонтального косого возмущения	1.998823–2.000448
Вертикальный максимум $\|u_1-u_F\|$	2.220×10^{-16}
Вертикальная максимальная ошибка первой хорды /R	2.000×10^{-9}
Геометрии хотя бы с одним номинальным парным 95%-ным интервалом выхода/числа отражений, не содержащим ноль	18 из 24; описательно; без утверждения о множественных сравнениях по всему семейству

10. Численная проверка и границы утверждений

Численная проверка используется только там, где аналитическое сведение не даёт полной теоремы. Кандидатные корни возврата уточняются с высокой точностью и принимаются только после успешного прохождения проверок допустимости ветви, положительного времени пролёта, порядка наиболее раннего столкновения, сонаправленности с родительским фокусом, полного замыкания и примитивного периода. Численная неоднозначность не трактуется как несуществование; плохо обусловленные случаи пересчитываются с повышенной точностью и устойчивым вычислением корней квадратного уравнения.

Конечное проверочное множество внутренне согласуется с аналитическими тождествами. Канонический набор семейств содержит 710 примитивных корней с числами {2,8,18,60,160,462} до n_min=6 и нулём нарушений закона периода. Все 710 примитивных семейств имеют требуемых зеркальных партнёров полувозврата. Десять тысяч осевых отрицательных контролей дали ноль ложных замыканий, 28 из 28 монодромий нижних уровней удовлетворили симплектическому критерию определителя, а 2,840 проверок масштаба/зеркальности не выявили ни одного нарушения. Набор параметров при неотрицательном h содержит 286 геометрий; 32 первоначально плохо обусловленных случая были разрешены при 160 десятичных знаках, после чего на проверенной области не осталось ни контрпримеров, ни неразрешённых случаев.

Регулярное вертикальное меридиональное отображение после перестановки координат воспроизводит горизонтальное состояние с машинной точностью, поддерживая Теорему 1. Затем согласованное трёхмерное сравнение показывает, что точная меридиональная сопряжённость не продолжается до полной трёхмерной изометрии. Это разделение является важной границей утверждений, а не численным несовершенством.

Таблица 7. Численная проверка общего соотношения фокального возврата и вспомогательных тождеств.

Проверяемая величина	Результат на конечной области
Примитивные семейства фокального возврата	710; распределение {2,8,18,60,160,462} для n_min=1…6
Нарушения примитивного периода	0
Отсутствующие партнёры полувозврата	0
Случайные осевые отрицательные контроли	10,000; ложных замыканий 0
Монодромии нижних уровней	28/28: выполнен симплектический критерий определителя
Проверки масштаба/зеркальности	2,840; нарушений 0
Геометрии параметров при неотрицательном h	286; контрпримеров 0; неразрешённых 0
Пересчитанные плохо обусловленные случаи	32/32 успешно при 160 десятичных знаках
Максимальная каноническая невязка полного замыкания	$9.13\times10^{-}133$
Максимальное каноническое отклонение от родительского фокуса	$1.88\times10^{-}137$

Уровень доказательности не следует завышать: конечный численный успех не доказывает P=2(n_min+1) при n→∞ или для каждого непрерывного (γ,δ). Напротив, точные F4, прямоугольная P4, P6, сопряжённость, тождества плотности и локальные косые соотношения не зависят от конечного числа семейств, если выполняются их заявленные аналитические предпосылки.

11. Обсуждение и ограничения

11.1 Научное содержание закона

Результат не является модификацией закона зеркального отражения и не представляет собой переформулировку свойства «фокус — параллельный луч» отдельной параболы. Его содержание — точная организация многократных отражений, создаваемая противоположными радиально смещёнными параболическими ветвями: физическое ветвевое отображение наиболее раннего столкновения, строгое условие возврата к родительскому фокусу, аналитически решаемые рекуррентные семейства, соотношение примитивного периода на конечной области и точное разделение общего меридионального закона и зависящей от типа трёхмерной динамики.

Наиболее важное математическое различие проходит между универсальной регулярной меридиональной структурой и сингулярными либо топологически иными граничными множествами. Краевая предельная P2 не является гладкостенной орбитой, вертикальная полярная апертура не является отражателем, а экваториальный шов и осевые острия не

входят в обычное регулярное бильярдное отображение. Эти исключения — часть закона, а не технические детали.

11.2 Физические ограничения

Все результаты настоящей рукописи относятся к идеальным зеркально-лучевым утверждениям. Физическое оптическое, электромагнитное или акустическое устройство требует отдельной конечно-волновой проверки. Такая проверка должна учитывать длину волны, дифракцию на апертуре, скругление краёв и острий, материальные граничные условия и потери. Только после этого допустимы утверждения о собственных модах, добротности резонатора Q, модовом удержании, пороге, усилении поля, характеристиках датчика или экспериментальной робастности.

Открытые математические вопросы включают доказательство или опровержение общего соотношения примитивного периода для всех слов ветвей, полную классификацию границ рождения и уничтожения корней ветвей и аналитическую монодромию более широких периодических семейств. Эти вопросы не изменяют точные результаты, уже установленные для явно решённых семейств.

12. Выводы

Псевдопараболоид второго порядка имеет точную регулярную меридиональную бильярдную структуру, которую можно записать как разрешённое по ветвям алгебраическое отображение с физическим выбором наиболее раннего столкновения. Падение через родительский фокус переводит луч на выделенное постфокальное многообразие, а строгий возврат к родительскому фокусу определяет лучевой закон фокального возврата. Закон содержит точные неподвижные точки F4 и прямоугольной P4 и точное h-инвариантное семейство P6 вместе с аналитическими границами устойчивости и существования.

Один и тот же знаковый меридиональный закон разделяется горизонтальным и вертикальным типами PPB, однако эта эквивалентность заканчивается на регулярном меридиональном уровне. Различные азимутальные метрические множители, кривизны, апертуры и связь с угловым моментом порождают действительно различную трёхмерную лучевую динамику. Следствия для лучевой плотности также имеют смысл только для явно заданных мер запуска и должны отличаться от конечно-волновой мощности или интенсивности поля.

Общее соотношение примитивного периода сильно поддерживается на проверенной конечной области, однако остаётся законом конечной области, а не теоремой для всех параметров. Поэтому полный результат представляет собой ограниченное и проверяемое утверждение об идеальной геометрической лучевой динамике. Его конечно-волновые, приборные и экспериментальные следствия требуют отдельной проверки.

Приложение A. Представительные физические периодические классы малых порядков

A.1 Канонический атлас маршрутов

Рисунки ниже сохраняют явное физическое содержание периодического скелета малых порядков. Каждая траектория показана в канонической геометрии f=2, R=8, h=0.1 и задаёт упорядоченную последовательность столкновений на четырёх знаковых ветвях. Атлас преднамеренно является представительным, а не исчерпывающим: он визуализирует различные физические классы маршрутов, лежащие в основе части иерархии фокального возврата P4/P6/P8/P10/P12.

Таблица A1. Представительные физические периодические классы малых порядков в канонической геометрии.

Класс / группа(ы)	**Период**	**u**	**Маршрут**	**λ_u**	**Статус**
C01 / G1	4	1.000000000	L+>L->R->R+	102.030199	Точный якорь P4
C02 / G5	4	0.771379224	L+>R->L->R+	155.874397	Точный якорь F4
C03 / G2	6	1.684358487	L+>L->L+>R+>R->R+	68.094122	Точное h-инвариантное семейство P6
C04 / G4	6	0.464527280	L+>R->R+>L+>L->R+	342.298594	Численно разрешённое P6
C05 / G7	6	0.534680378	L+>R->L+>R+>L->R+	1004.189677	Численно разрешённое P6
C06 / G8/G9	6	0.836600946	L+>R->L->R->L->R+	1006.485803	Численно разрешённое P6; G9 эквивалентен по симметрии/обращению времени
C07 / G10	6	0.904049996	L+>L->R->L->R->R+	1449.928183	Численно разрешённое P6
C08 / G11	8	0.848514489	L+>R->L->R->L->R->L->R+	2844.277689	Численно разрешённое P8
C09 / G12	8	1.263054817	L+>L->R+>L->R->L+>R->R+	4156.198828	Численно разрешённое P8
C10 / G14	8	0.754674150	L+>R->L->L+>R+>R->L->R+	17320.490078	Численно разрешённое P8
C11 / G15	8	1.208586879	L+>L->R+>R->L->L+>R->R+	2157.175121	Численно разрешённое P8
C12 / G17	8	0.508456410	L+>R->R+>L+>R+>L+>L->R+	28073.821796	Численно разрешённое P8
C13 / G3	10	1.925842460	L+>L->L+>R->R+>L+>L-	2109.457320	Численно разрешённое P10

			>R+>R->R+		
C14 / G16	10	0.889780149	L+>L->R->L->R->L->R->L->R->R+	14944.906301	Численно разрешённое P10
C15 / G6	12	1.765541008	L+>L->L+>R->R+>R->L->L+>L->R+>R->R+	2302.398572	Численно разрешённое P12
C16 / G13	12	1.805310221	L+>L->L+>R->R+>L->R->L+>L->R+>R->R+	10071.241243	Численно разрешённое P12

Метки C01–C16 обозначают различные физические маршруты после сведения по симметрии и обращению времени. Обозначения групп в скобках сохранены лишь как устойчивые идентификаторы представителей маршрутов и не отражают хронологию вычислений.

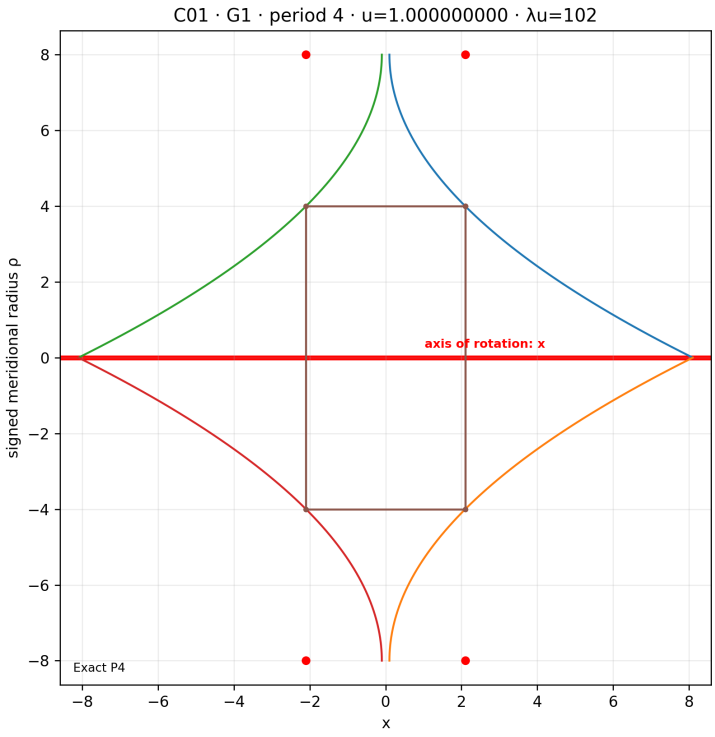

Рисунок 21. Физический класс C01 (G1), период 4, u = 1.000000000, λ_u = 102.030199. Ход луча: R+ старт -> L+ -> L- -> R- -> R+. Точный якорь прямоугольной P4.

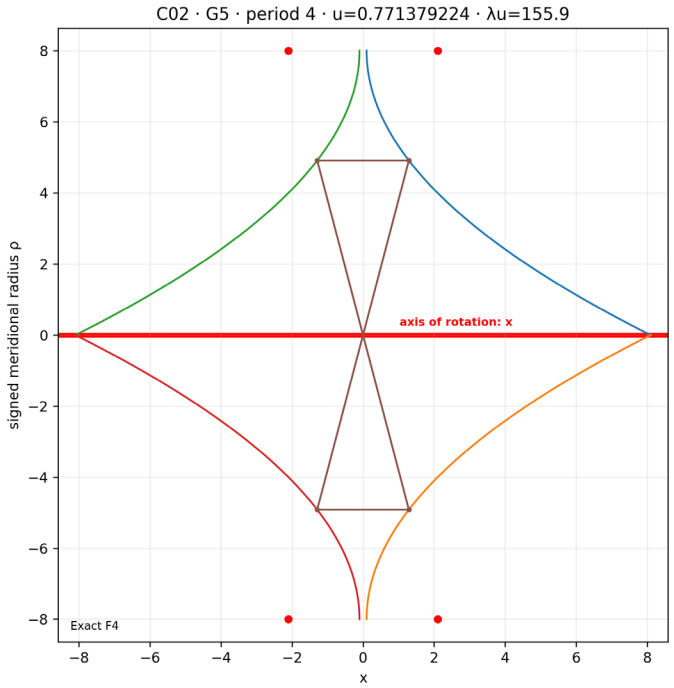

Рисунок 22. Физический класс C02 (G5), период 4, u = 0.771379224, λ_u = 155.874397. Ход луча: R+ старт -> L+ -> R- -> L- -> R+. Точный якорь F4 периода 4.

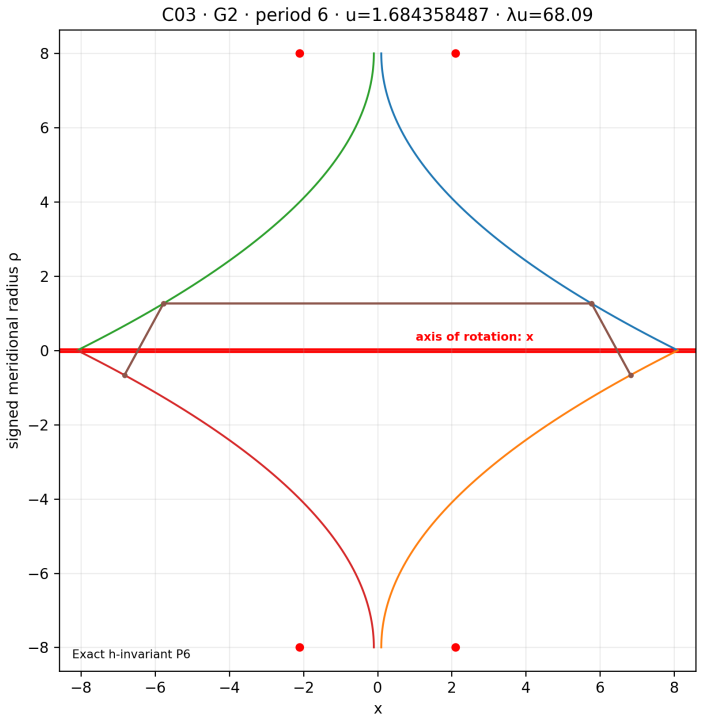

Рисунок 23. Физический класс C03 (G2), период 6, u = 1.684358487, λ_u = 68.094122. Ход луча: R+ старт -> L+ -> L- -> L+ -> R+ -> R- -> R+. Точное h-инвариантное семейство P6; его существование и аналитическая

гиперболичность выведены в основном тексте.

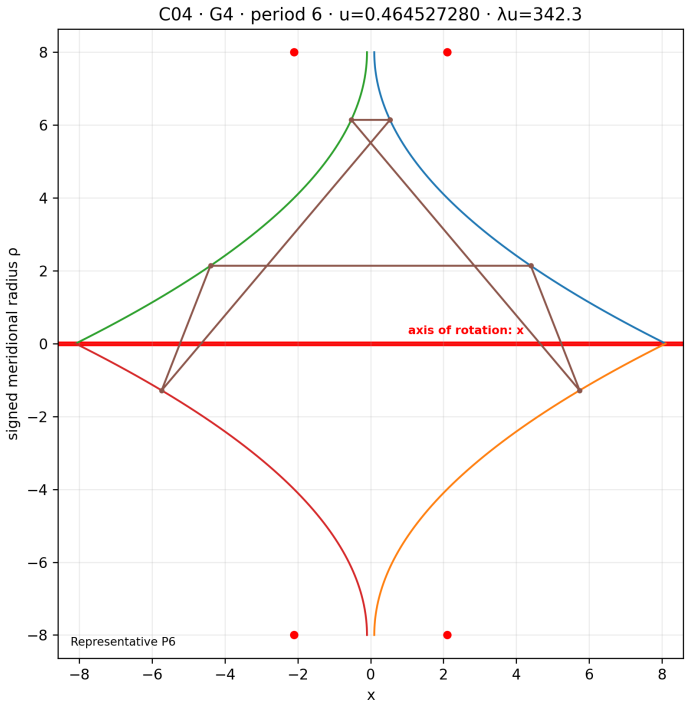

Рисунок 24. Физический класс C04 (G4), период 6, u = 0.464527280, λ_u = 342.298594. Ход луча: R+ старт -> L+ -> R- -> R+ -> L+ -> L- -> R+. Представительное семейство P6.

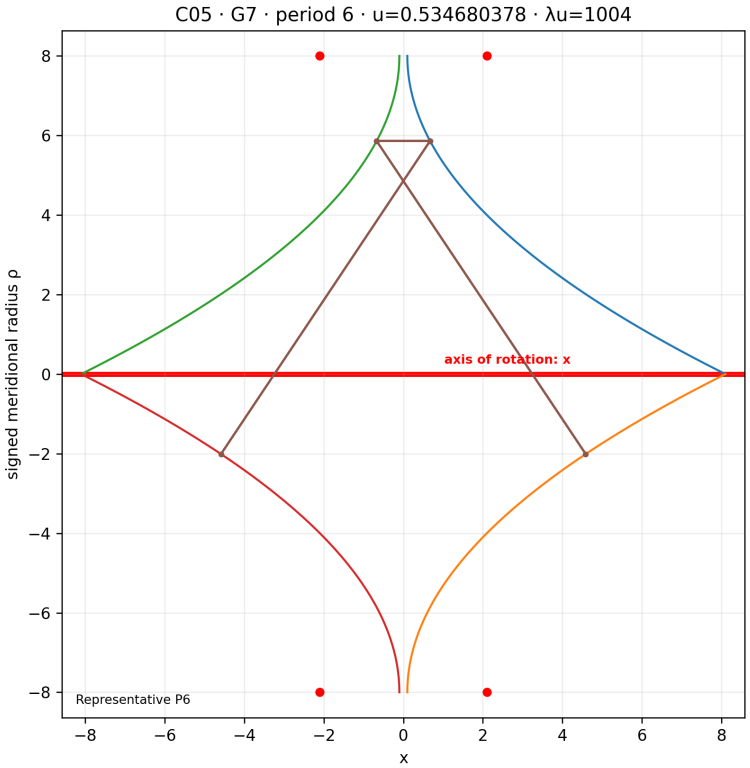

Рисунок 25. Физический класс C05 (G7), период 6, u = 0.534680378, λ_u = 1004.189677. Ход луча: R+ старт -> L+ -> R- -> L+ -> R+ -> L- -> R+. Представительное семейство P6.

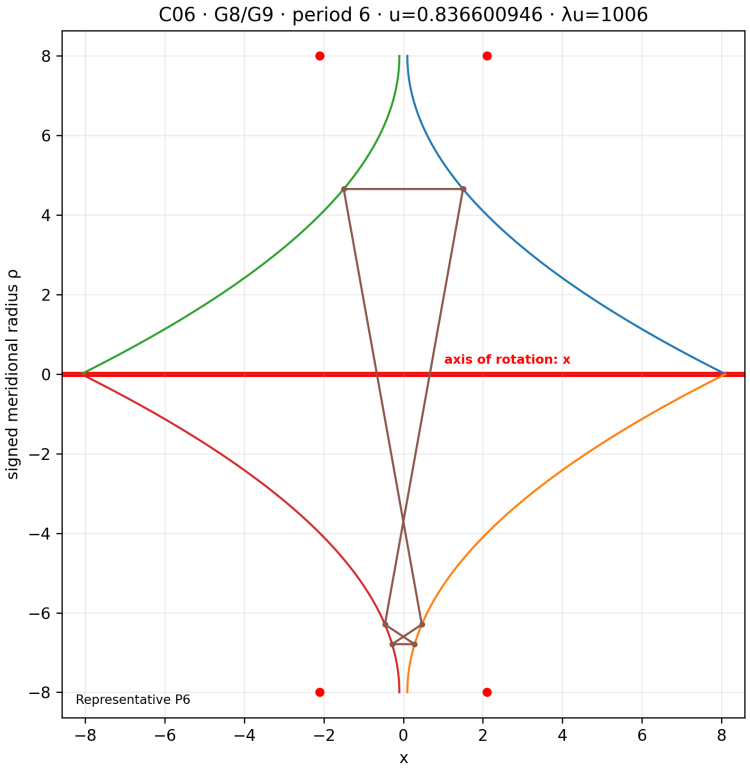

Рисунок 26. Физический класс C06 (G8/G9), период 6, u = 0.836600946, λ_u = 1006.485803. Ход луча: R+ старт -> L+ -> R- -> L- -> R- -> L- -> R+. Численно разрешённый класс P6; G9 эквивалентен по имметрии/обращению времени и не учитывается как отдельный физический класс.

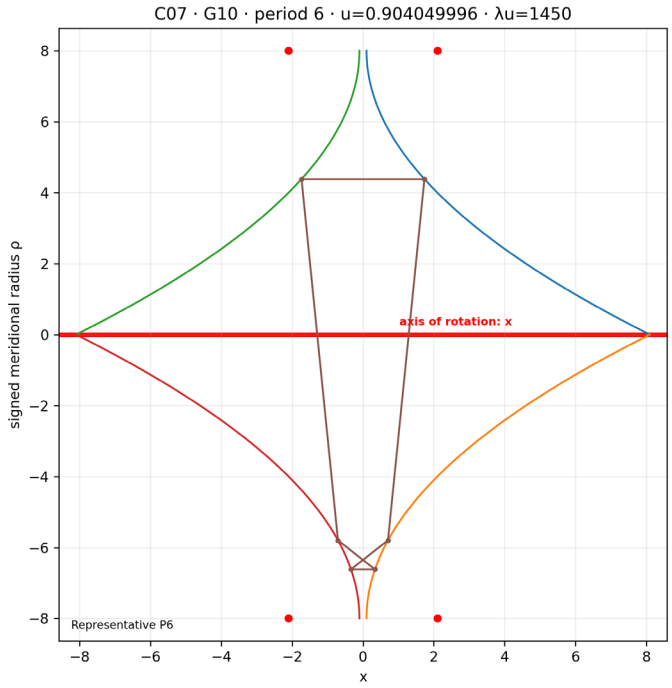

Рисунок 27. Физический класс C07 (G10), период 6, u = 0.904049996, λ_u = 1449.928183. Ход луча: R+ старт -> L+ -> L- -> R- -> L- -> R- -> R+. Представительное семейство P6.

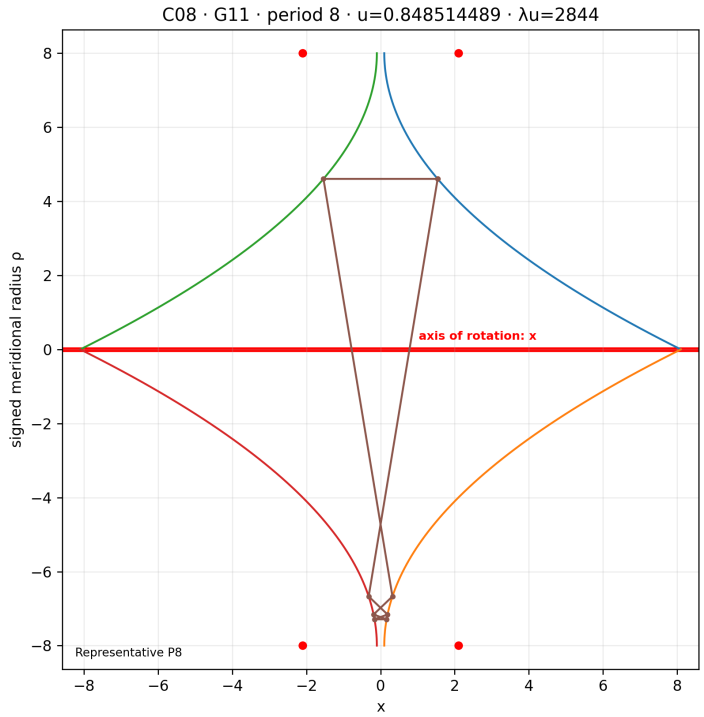

Рисунок 28. Физический класс C08 (G11), период 8, u = 0.848514489, λ_u = 2844.277689. Ход луча: R+ старт -> L+ -> R- -> L- -> R- -> L- -> R- -> L- -> R+. Представительное семейство P8.

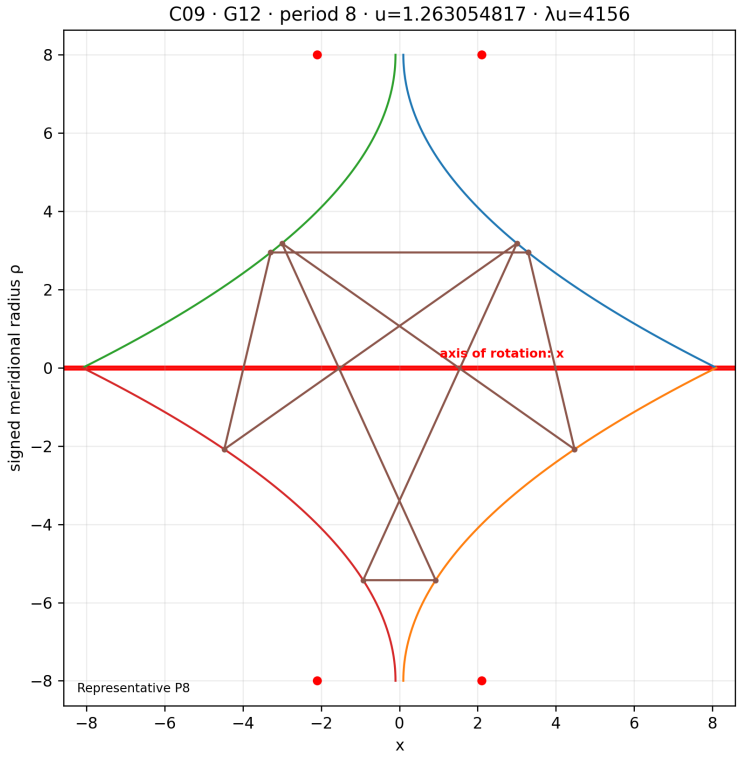

Рисунок 29. Физический класс C09 (G12), период 8, u = 1.263054817, λ_u = 4156.198828. Ход луча: R+ старт -> L+ -> L- -> R+ -> L- -> R- -> L+ -> R- -> R+. Представительное семейство P8.

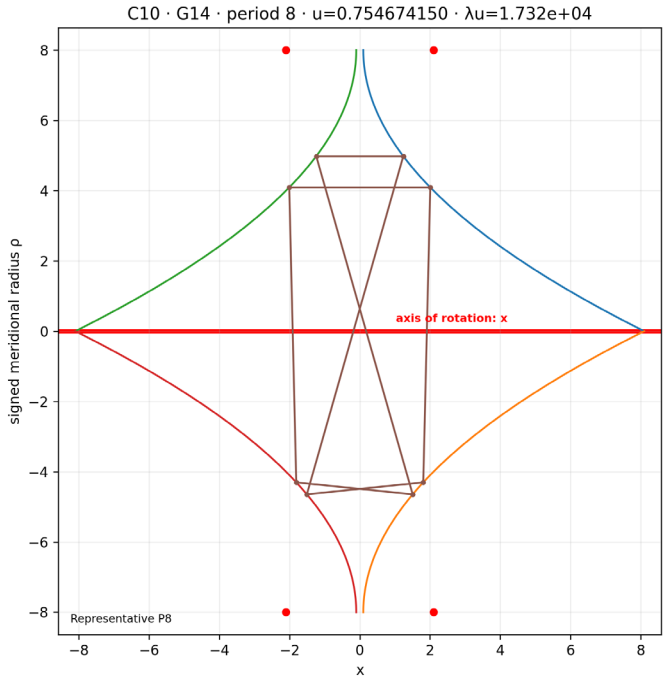

Рисунок 30. Физический класс C10 (G14), период 8, u = 0.754674150, λ_u = 17320.490078. Ход луча: R+ старт -> L+ -> R- -> L- -> L+ -> R+ -> R- -> L- -> R+. Представительное семейство P8.

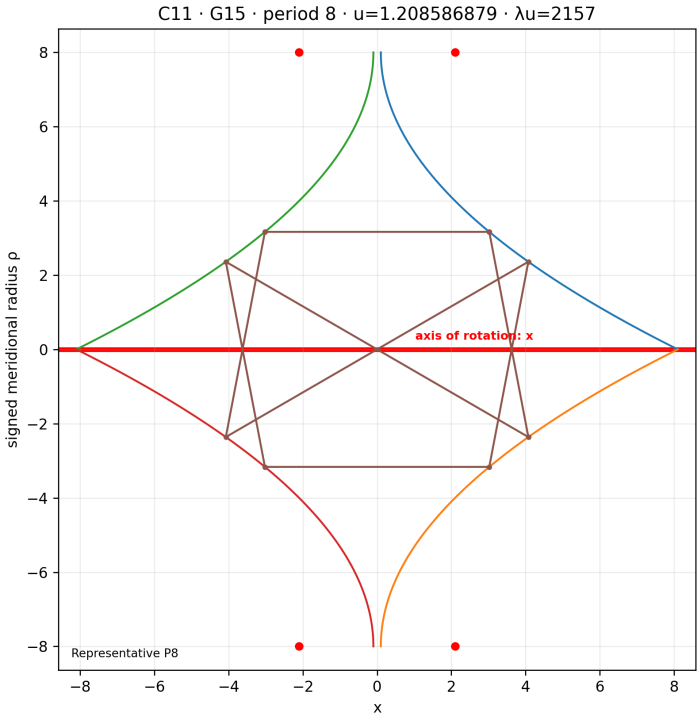

Рисунок 31. Физический класс C11 (G15), период 8, u = 1.208586879, λ_u = 2157.175121. Ход луча: R+ старт -> L+ -> L- -> R+ -> R- -> L- -> L+ -> R- -> R+. Представительное семейство P8.

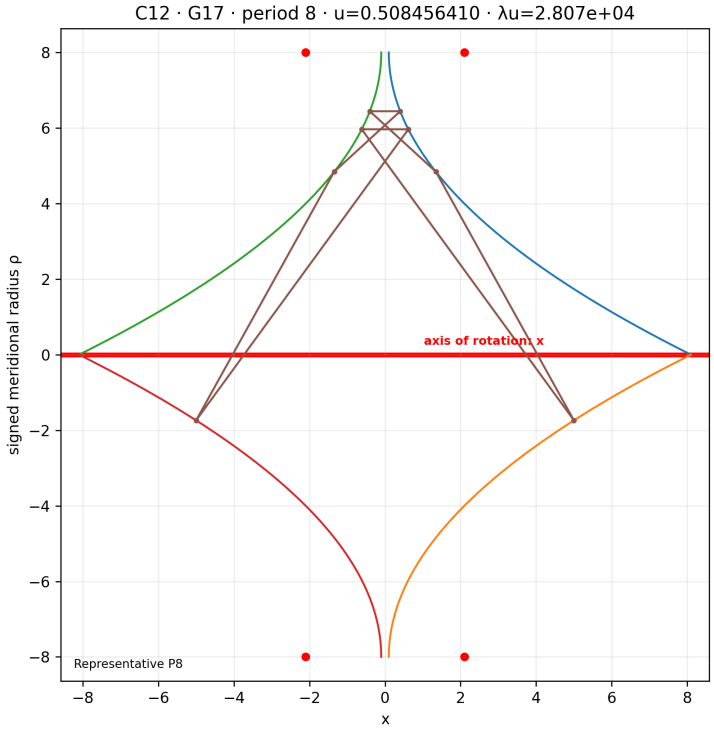

Рисунок 32. Физический класс C12 (G17), период 8, u = 0.508456410, λ_u = 28073.821796. Ход луча: R+ старт -> L+ -> R- -> R+ -> L+ -> R+ -> L+ -> L- -> R+. Представительное семейство P8.

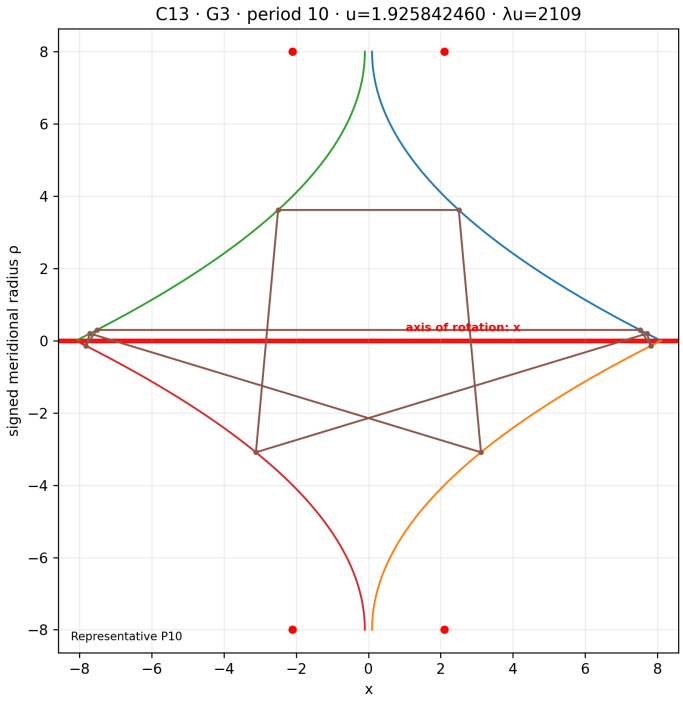

Рисунок 33. Физический класс C13 (G3), период 10, u = 1.925842460, λ_u = 2109.457320. Ход луча: R+ старт -> L+ -> L- -> L+ -> R- -> R+ -> L+ -> L- -> R+ -> R- -> R+. Представительное семейство P10.

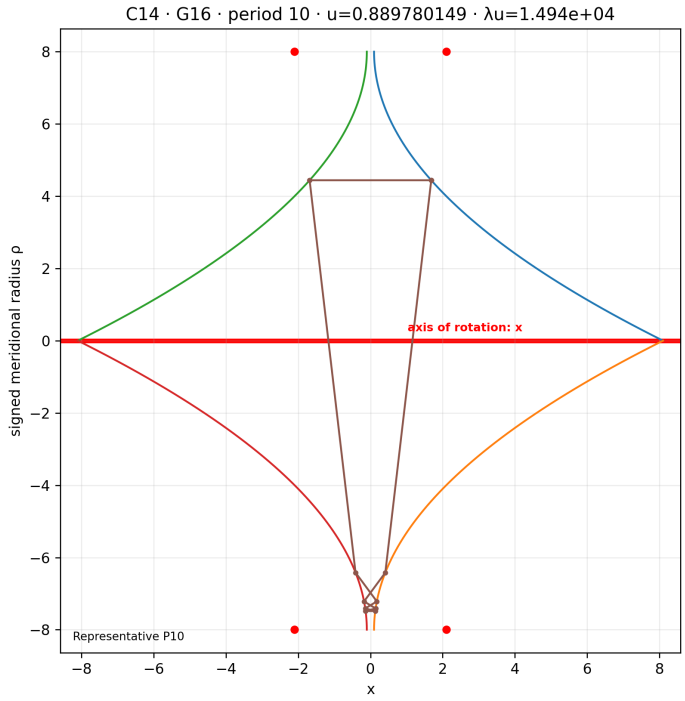

Рисунок 34. Физический класс C14 (G16), период 10, u = 0.889780149, λ_u = 14944.906301. Ход луча: R+ старт -> L+ -> L- -> R- -> L- -> R- -> L- -> R- -> L- -> R- -> R+. Представительное семейство P10.

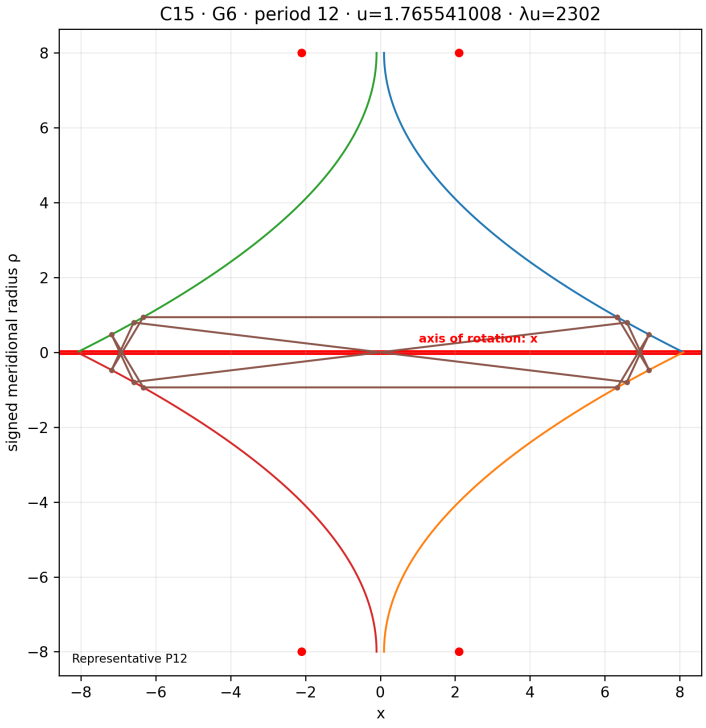

Рисунок 35. Физический класс C15 (G6), период 12, u = 1.765541008, λ_u = 2302.398572. Ход луча: R+ старт -> L+ -> L- -> L+ -> R- -> R+ -> R- -> L- -> L+ -> L- -> R+ -> R- -> R+. Представительное семейство P12.

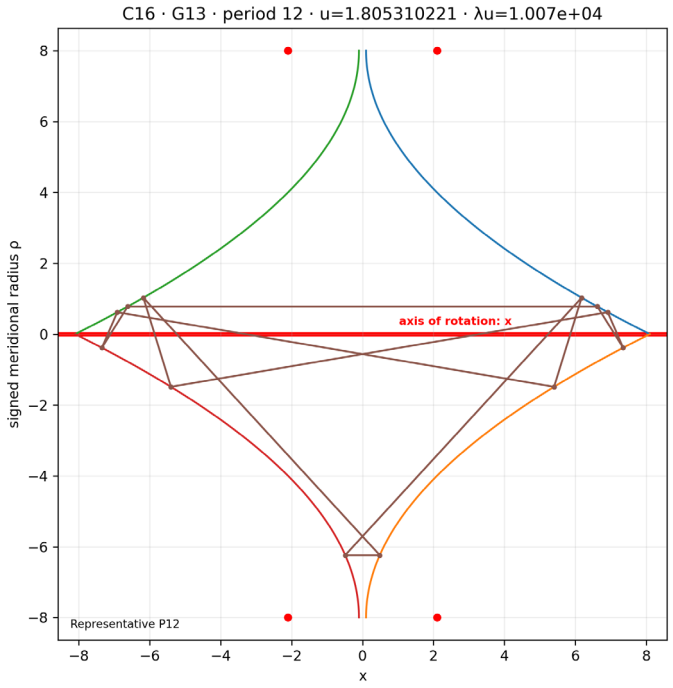

Рисунок 36. Физический класс C16 (G13), период 12, u = 1.805310221, λ_u = 10071.241243. Ход луча: R+ старт -> L+ -> L- -> L+ -> R- -> R+ -> L- -> R- -> L+ -> L- -> R+ -> R- -> R+. Представительное семейство P12.

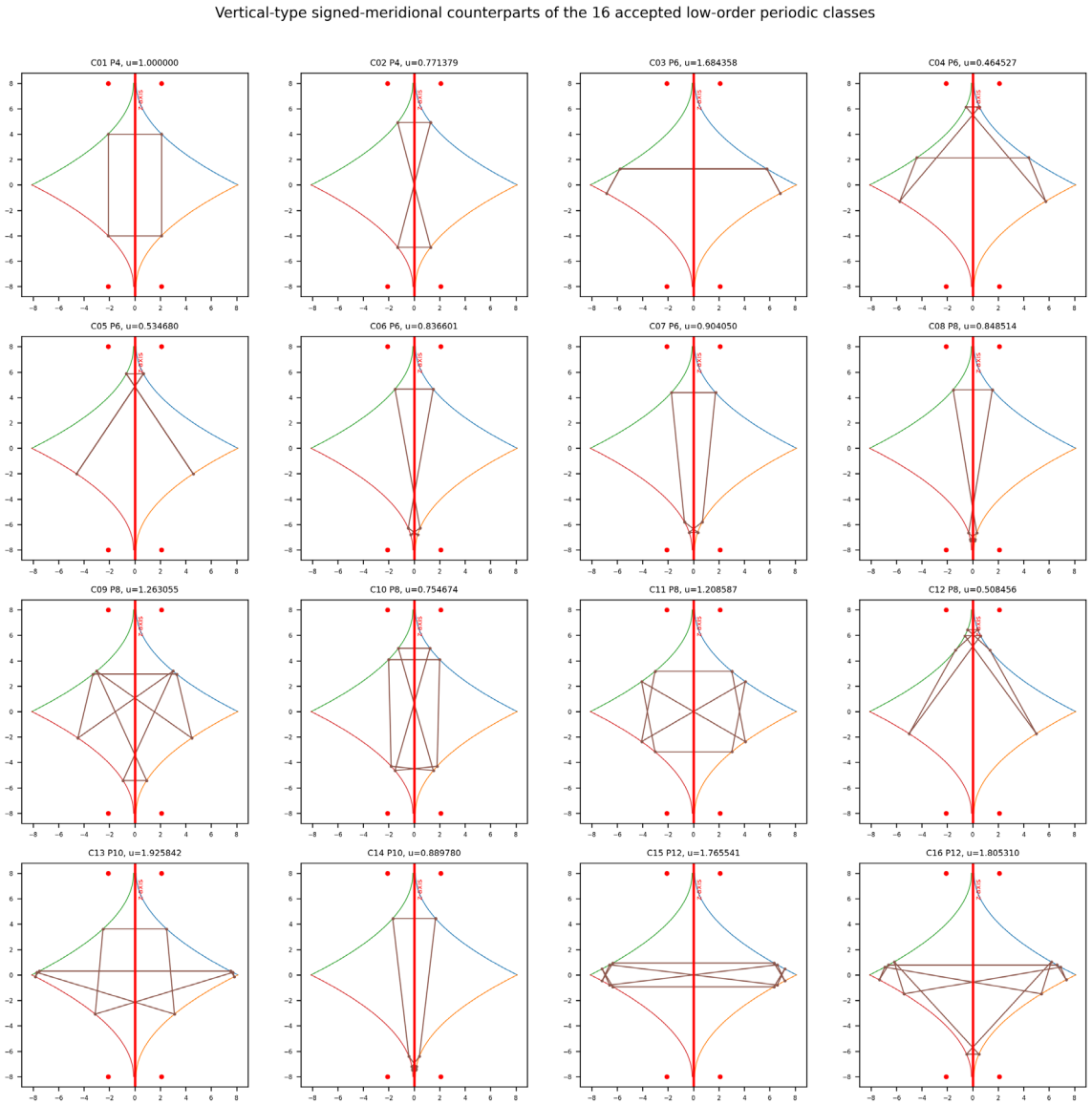

Рисунок 37. Знаково-меридиональные аналоги вертикального типа для тех же шестнадцати физических периодических классов малых порядков, полученные из общих точных ветвевых уравнений РРВ. На каждой панели показана истинная вертикальная ось вращения q=0.

Приложение В. Научная и техническая значимость

Практическая ценность закона РРВ не означает усиления энергии. Его значение состоит в том, что он задаёт аналитически описываемое преобразование «геометрия — состояние». Пассивная полость может преобразовывать направление падения и геометрию запуска в структурированную последовательность взаимодействий со стенками, редуцированные координаты которой не произвольны, а ограничены точными формулами. Такая возможность может быть полезна в задачах, где требуется детерминированная, маломощная, геометрически кодированная предварительная обработка перед цифровой реконструкцией.

- Направленная аналоговая предварительная обработка для акустических, электромагнитных, терагерцовых или оптических измерений. Закон преобразует

семейство входных направлений в различные состояния взаимодействия со стенками до применения какой-либо электронной или цифровой постобработки.

- Размещение кольцевых датчиков и исполнительных элементов. Известные кольцевые локусы F4 и более широкий периодический скелет задают аналитически привязанные кандидатные зоны для микрофонов, датчиков давления, датчиков поля, тонких поглотителей, излучателей или нелинейных покрытий.
- Угловые дискриминаторы и калибровочные полости. Поскольку первое отражение переводит все коллинеарные видимые старты, соответствующие одной линии визирования, в одно и то же u0, полость может служить точно моделируемым пассивным направленным преобразователем для калибровочных экспериментов.
- Проектирование открытых резонаторов и многопроходного взаимодействия. Интервал выхода и ветвевые пороги определяют, когда луч покидает полость и когда остаётся в многопроходном движении, связанном между ветвями, что полезно при проектировании открытых отражающих структур с заданным временем пребывания.
- Контролируемые исследования гиперболической бильярдной динамики на аналитически заданных поверхностях. В отличие от общих хаотических полостей PPB сохраняет высокий уровень точной геометрии и точных ветвевых уравнений, что делает его полезным научным испытательным объектом.
- Механически перестраиваемые устройства. Поскольку h изменяет доступность ветвей и положения порогов при сохранении общего закона, управляемое разделение рогов может обеспечить перестраиваемое аналоговое преобразование без изменения общей псевдоконической концепции.

Наиболее перспективная роль — в устройствах, где одновременно требуются нетривиальное пассивное преобразование «направление — состояние» и аналитическая прямая модель. Полученные лучевые результаты выявляют воспроизводимые транспортные каналы, полосы выхода и рекуррентные скелеты, которые могут направлять конечно-волновое размещение датчиков, проектирование отверстия резонатора, калибровку и эксперименты с возмущениями. Перенос на акустику, электромагнетизм, терагерцовый диапазон или оптику требует отдельных волновых расчётов и экспериментальной проверки.

Приложение C. Обозначения

Таблица C1. Основные обозначения.

Символ	Значение
x	осевая координата
ρ	цилиндрический радиус
f	фокальный параметр родительской параболы
R	радиальное смещение
h	осевое полуразделение / параметр замыкания

u	параболическая меридиональная координата
γ=f/R	безразмерное отношение фокальной формы
η=h/R	безразмерное отношение разделения
u_F	точная координата столкновения F4
$\mathcal{P}$	бильярдное отображение столкновений
Q_F	след матрицы полупериода с двумя столкновениями
λ_s, λ_u	устойчивый и неустойчивый мультипликаторы Флоке
J_x	осевой момент импульса
j=J_x/R	безразмерный осевой момент импульса

Литература

1. Tabachnikov, S. Geometry and Billiards. Student Mathematical Library, Vol. 30. American Mathematical Society, 2005. ISBN 978-0-8218-3919-5.

2. Chernov, N.; Markarian, R. Chaotic Billiards. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 127. American Mathematical Society, 2006. DOI: 10.1090/surv/127.

3. Dragović, V.; Radnović, M. Poncelet Porisms and Beyond: Integrable Billiards, Hyperelliptic Jacobians and Pencils of Quadrics. Birkhäuser, 2011. DOI: 10.1007/978-3-0348-0015-0.

4. Born, M.; Wolf, E. Principles of Optics, 7th ed. Cambridge University Press, 1999.

5. do Carmo, M. P. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, 1976.

6. Kogelnik, H.; Li, T. Laser Beams and Resonators. Applied Optics 5 (1966) 1550–1567. DOI: 10.1364/AO.5.001550.

7. Siegman, A. E. Unstable Optical Resonators. Applied Optics 13 (1974) 353–367. DOI: 10.1364/AO.13.000353.

8. Arnold, V. I. Singularities of Caustics and Wave Fronts. Mathematics and Its Applications, Vol. 62. Kluwer, 1990. DOI: 10.1007/978-94-011-3330-2.