Геометрическая волновая инженерия

Теория псевдопараболоидов высших порядков

Том 1

Конструктивная геометрия и рекурсивные построения

Хаустов Владимир Игоревич

ORCID: 0009-0007-3657-2309

Лаборатория геометрической волновой инженерии https://vihrihaosa.ru/

Лицензия: CC BY 4.0

Дата публикации: 4 мая 2026 года

DOI: 10.5281/zenodo.20022183

Научно-технический перевод с английского языка.

Редакция, адаптированная для русскоязычного инженера-исследователя.

Оригинал: Khaustov, V. Geometric Wave Engineering. Theory of Higher-Order Pseudoparaboloids. Volume 1. https://doi.org/10.5281/zenodo.20022183

Аннотация

В работе вводится и формализуется семейство осесимметричных областей — псевдопараболоидов высших порядков Ω_n и их рядных укладок Ω_{n,m}, — порождаемых рекурсивной интервальной конструкцией по вертикальным и горизонтальным параболическим образующим с фокальным параметром f и предельным радиусом R. Конструкция реализуется как итерации оператора C_R, действующего в пространстве $\mathcal{I}([0,\infty))$ непустых конечных объединений замкнутых интервалов, с последующей канонической операцией слияния (Merge), гарантирующей корректность функционалов площади и объёма поперечных сечений. Устанавливаются базовые геометрические свойства: неотрицательность радиусов и явная верхняя оценка $M_n \le M_0 + \Sigma_{k=1}^{n-2} R_k$, где $M_0 = \max d$, а в стандартном вертикальном базовом случае $M_0 = R$; замкнутость и компактность Ω_n и Ω_{n,m} при любом конечном порядке n и конечном числе рядов m; кусочная гладкость образующей с конечным числом точек излома и конечная площадь поперечного сечения вблизи осевой вершины; критерий связности, выраженный через граф пересечений порождаемых интервалов. Получены замкнутые выражения для фокусов порождаемых параболических дуг произвольного конечного порядка, проверенные численно на эталонном примере (f = 2, R = 8, R_1 = 7, R_2 = 14, n = 4). Вычислительная реализация рассматривается как воспроизводимый программный эталон на Python для данной геометрии. Физические гипотезы (модальное удержание, спектральные признаки, добротность) явно отнесены к последующей программе волновой верификации и в настоящем томе не заявляются.

Ключевые слова: геометрическая волновая инженерия; конструктивная геометрия; псевдопараболоид; интервальная рекурсия; операция слияния (Merge); осесимметричная рядная укладка; гауссова и средняя кривизна; компактность; воспроизводимая реализация.

Оглавление

Аннотация 2
1. Предмет, объект и научный статус теории 4
1.1. Основной объект 4
1.2. От образующей к объёму 5
1.3. Методологическое разделение теории и визуализации 5
2. Базовая параболическая геометрия 5
2.1. Вертикальный и горизонтальный типы 6
2.2. Второй порядок как внутренний объём 6
2.3. Связь с классическими параболическими объектами 6
3. Интервальная алгебра и оператор слияния 7
3.1. Пространство состояний 7
3.2. Лемма о корректности операции Merge 7
3.3. Лемма об 1-липшицевых отображениях 8
4. Теоремы о свойствах Ω_n и Ω_{n,m} 9
4.1. Неотрицательность и ограниченность 9
4.2. Компактность 9
4.3. Связность для одного рекурсивного шага и достаточные условия 10
5. Ядро ветвления и интерпретация в терминах IFS 10
5.1. Формальное дерево ветвления 11
5.2. Почему это не классическое сжимающее IFS 11
5.3. Конкретные пути обобщения до IFS 11
6. Псевдопараболоиды 2-го, 3-го и 4-го порядков 12
6.1. Второй порядок 12
6.2. Третий порядок 12
6.3. Четвёртый и более высокие порядки 13
7. Гауссова кривизна поверхностей вращения 13
7.1. Общая формула 13
7.2. Вертикальный тип 14
7.3. Горизонтальный тип 14
7.4. Отражённые ветви 14
8. Особенности, гладкость и площадь поверхности 14
8.1. Класс гладкости 15
8.2. Площадь поверхности вблизи особенности 15
9. Аналитические фокусы порождающих дуг 16
9.1. Вывод для вертикального типа 16
9.2. Вывод для горизонтального типа 16
10. Площадь, объём и количественные функционалы 16
10.1. Площадь сечения 17
10.2. Объём 17
11. Численный эталонный пример 17
11.1. Параметры примера 18
11.2. Численные значения 18
12. Рядные системы и параметр h 19
12.1. Шаг между рядами 19
12.2. Режимы h > 0, h = 0, h < 0 19
13. Программа дальнейшей волновой верификации 20
13.1. Минимальный набор физических тестов 20
13.2. Научная позиция 20
Заключение 20
Приложение A. Обозначения и параметры 21
Приложение B. Литература 21

1. Предмет, объект и научный статус теории

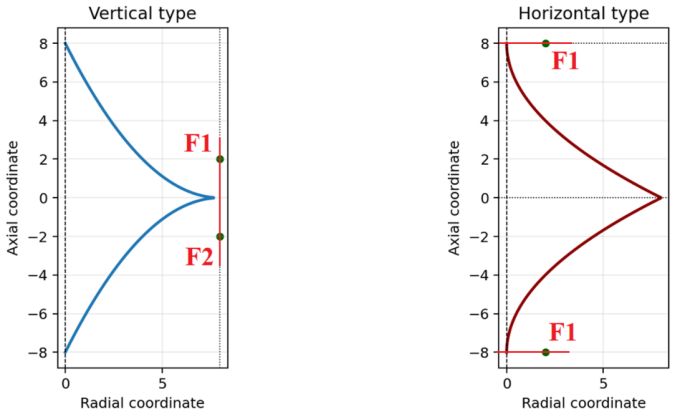

Рис. 1. Базовые параболические образующие вертикального и горизонтального типов.

1.1. Основной объект

Настоящий том вводит конструктивную геометрию псевдопараболоидов высших порядков как самостоятельный математический и вычислительный аппарат геометрической волновой инженерии. Основной объект теории — не отдельная линия, не иллюстрация и не набор поверхностей, а единый внутренний объём Ω_{n,m}, порождаемый параболической образующей, интервальной рекурсией, операцией слияния (Merge) и рядной осевой сборкой.

Теория в этом томе готовит геометрию к последующей физической валидации. Она не объявляет локализацию, удержание поля, направленный вывод излучения или универсальное управление волнами заранее доказанными. Эти эффекты рассматриваются как проверяемые гипотезы, подлежащие верификации методами лучевой динамики, уравнением Гельмгольца, акустикой, электромагнитными моделями FEM/FDTD и, в дальнейшем, экспериментом.

В отличие от чисто визуального описания, том формально определяет пространство состояний интервальной геометрии, оператор рекурсии, Merge, ограниченность, компактность, связность, кривизну, особенности и аналитические фокусы порождающих параболических дуг. Иллюстрации используются исключительно как контрольные визуализации формул.

Определение 1.1. Псевдопараболоид конечного порядка.

Псевдопараболоидом порядка n с параметрами (f, R, R_1, …, R_{n−2}) называется осесимметричная область Ω_n ⊂ $\mathbb{R}^3$, получаемая вращением вокруг оси e_ξ плоского множества {(ξ, ρ): ρ ∈ I_n(ξ)}, где I_2(ξ) = [0, d(ξ)], а I_n определяется рекурсивной интервальной конструкцией с последующей операцией Merge. Приставка «псевдо-» указывает на то, что Ω_n не является стандартным параболоидом вращения, а представляет собой рекурсивно порождённую осесимметричную область, граница которой собирается из параболических дуг, отражённых или смещённых параболических копий и видимых компонент, отобранных операцией Merge.

1.2. От образующей к объёму

Базовая параболическая образующая задаёт расстояние d(ξ) от оси вращения до границы второго порядка. На втором порядке внутренний радиальный интервал имеет вид I_2(ξ) = {[0, d(ξ)]}. На последующих уровнях каждый интервал преобразуется оператором C_R, после чего пересекающиеся или соприкасающиеся интервалы объединяются оператором Merge. Вращение вокруг оси даёт пространственную область Ω_n; рядная сборка даёт Ω_{n,m}.

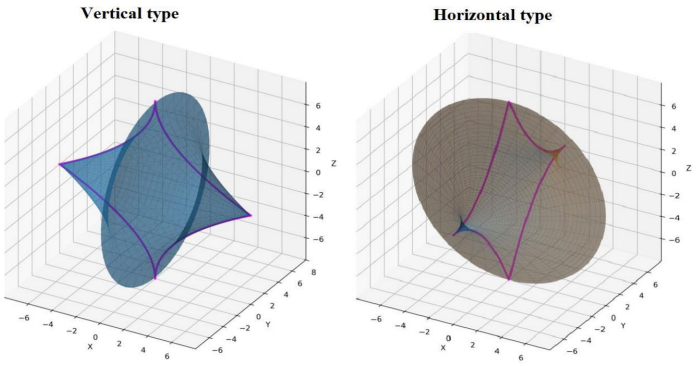

Рис. 2. Построение трёхмерных поверхностей второго порядка.

1.2. Методологическое разделение теории и визуализации

Геометрическое утверждение принадлежит теории только тогда, когда оно выражено формулой, леммой, теоремой, определением или вычислимым функционалом. Визуализация не заменяет доказательство: она лишь показывает форму, уже определённую аналитически или алгоритмически.

Поэтому таблицы параметров и режимов вводятся один раз и далее используются без повторений. Иллюстрации не дублируют друг друга: каждая отвечает на отдельный теоретический вопрос — базовая образующая, рекурсия, порядок, трёхмерная граница, кривизна, особенность, рядная сборка или численный пример.

Ω_{n,m} = ⋃_{j=0}^{m−1} (Ω_n + Δ_j e_ξ)

Таблица 1. Основные уровни описания

Уровень	Объект	Назначение
Образующая	d_v, d_h	определяет второй порядок
Интервалы	I_n(ξ)	определяют радиальные зоны
Объём	Ω_n, Ω_{n,m}	вычислительная область
Скрипт	Python	воспроизводит конструкции

2. Базовая параболическая геометрия

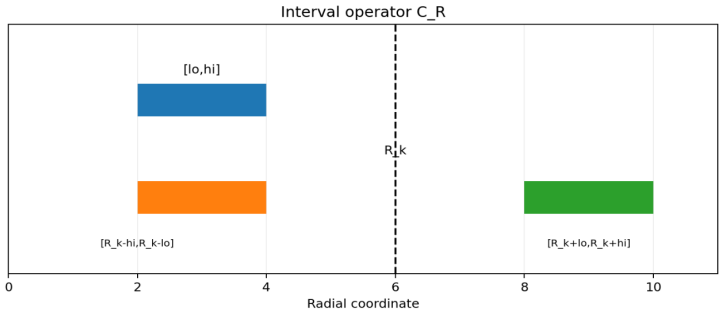

Рис. 3. Действие интервального оператора C_R.

2.1. Вертикальный и горизонтальный типы

Вертикальный тип строится из двух зеркальных параболических ветвей, соединённых в общей вершине на фокальной линии. Для фокального параметра $f > 0$ и расстояния $R > 0$ до оси вращения базовая полудлина составляет $a = R^2/(4f)$. Радиальное расстояние до образующей: $d_v(s) = R - 2\sqrt{(f|s|)}$, $0 \le |s| \le a$.

Горизонтальный тип представляет собой повёрнутую реализацию того же параболического принципа и определяется как $d_h(u) = (R - |u|)^2/(4f)$, $|u| \le R$. Формально рекурсивный аппарат для обоих типов идентичен; различаются базовая функция, ось вращения, положение фокусов и особенности.

2.2. Второй порядок как внутренний объём

Второй порядок — это не только поверхность вращения. В каждой допустимой осевой координате существует полный радиальный интервал $0 \le \rho \le d(\xi)$. Именно этот интервал, а не только граничная кривая, передаётся в рекурсию. Если рассматривать только граничную кривую $\rho = d(\xi)$, вычислительная область, необходимая для последующих волновых задач, теряется.

$a = R^2/(4f)$

$d_v(s) = R - 2\sqrt{(f|s|)}, \quad 0 \le |s| \le a$

$d_h(u) = (R - |u|)^2/(4f), \quad |u| \le R$

$I_2(\xi) = \{[0, d(\xi)]\}$

2.3. Связь с классическими параболическими объектами

Рассматриваемая конструкция родственна стандартному параболоиду вращения, но не тождественна ему. При $n = 2$, до применения каких-либо рекурсивных смещений, граница порождается непосредственно выбранной параболической образующей, а внутренний объём представляется интервалом $I_2(\xi) = [0, d(\xi)]$. Таким образом, второй порядок является классической параболической базовой областью в смысле выбранной вертикальной или горизонтальной образующей.

Для $n \ge 3$ семейство $\{\Omega_n\}$ обобщает параболическую базу за счёт введения рекурсивных радиальных смещений R_k, отсечения по допустимым радиусам и операции Merge. В вырожденном случае $R_1 = 0$ первый рекурсивный шаг не создаёт действительно нового радиального смещения; в невырожденном случае $R_1 > 0$ третий и последующие порядки образуют смещённые или отражённые параболические

копии границы. Следовательно, конструкцию следует читать как рекурсивное расширение параболических областей, а не как переопределение самого классического параболоида.

Таблица 2. Параметры базовой геометрии

Символ	Смысл
f	фокусное расстояние параболической ветви
R	расстояние от оси вращения до фокальной линии / масштаб
a	полудлина вертикального типа, характерный размер
d(ξ)	радиальное расстояние до образующей

3. Интервальная алгебра и оператор слияния

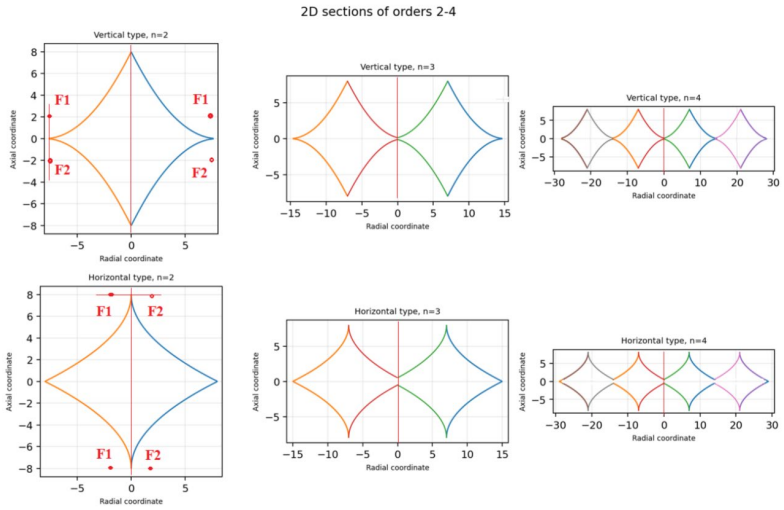

Рис. 4. Двумерные сечения порядков 2, 3 и 4 после операции Merge.

3.1. Пространство состояний

Пусть $\mathcal{I}([0,\infty))$ — множество всех конечных объединений замкнутых ограниченных интервалов на полупрямой $[0,\infty)$. Элемент этого пространства записывается как конечное семейство непересекающихся интервалов $[\alpha_j, \beta_j]$ с $0 \le \alpha_j \le \beta_j$. В каждой осевой точке ξ объект-псевдопараболоид описывается именно таким элементом пространства $\mathcal{I}$.

Для одного интервала [lo, hi] оператор порядка с параметром R порождает два интервала: интервал разности и интервал суммы. Затем применяется Merge — переход к каноническому представлению объединения без дублирующихся частей.

3.2. Лемма о корректности операции Merge

Лемма 3.1.

Пусть S — конечное семейство замкнутых ограниченных интервалов на [0,∞). Тогда Merge(S), получаемое сортировкой интервалов и объединением пересекающихся или соприкасающихся пар, представляет собой конечное семейство попарно непересекающихся замкнутых ограниченных интервалов и задаёт то же точечное множество, что и исходное объединение.

Доказательство.

Конечное объединение компактных интервалов компактно. Сортировка по левому концу позволяет объединять только те интервалы, левые концы которых не превосходят текущего правого конца. После завершения алгоритма между соседними интервалами существует положительный зазор, то есть они не пересекаются. Ни одна точка не теряется и не добавляется, поскольку каждая операция заменяет A ∪ B минимальным интервалом, равным этому объединению, когда A и B пересекаются или соприкасаются.

3.3. Лемма об 1-липшицевых отображениях

Лемма 3.2.

Для любого R ≥ 0 отображения g_R(r) = max(R − r, 0) и h_R(r) = R + r являются 1-липшицевыми на [0,∞), причём h_R — изометрический сдвиг с той же константой. Для g_R выполнено |g_R(r_1) − g_R(r_2)| ≤ |r_1 − r_2|.

Доказательство.

Функция q(r) = R − r является изометрией, меняющей ориентацию, а p(x) = max(x, 0) — метрическая проекция на [0,∞), следовательно, не увеличивает расстояний. Поэтому композиция p∘q также не увеличивает расстояний. Для h_R равенство |(R + r_1) − (R + r_2)| = |r_1 − r_2| получается непосредственно.

C_R([lo, hi]) = [max(R − hi, 0), max(R − lo, 0)] ∪ [R + lo, R + hi]

I_{k+1}(ξ) = Merge(⋃_{[α,β] ∈ I_k(ξ)} C_{R_k}([α, β]))

Таблица 3. Статус интервальных операций

Операция	Математический статус
C_R	отображение $\mathcal{I} \to \mathcal{I}$
Merge	канонизация конечного объединения
max(·, 0)	проекция на допустимые радиусы

Дополнительные замечания

Из леммы 3.2 следует непрерывность C_R в метрике Хаусдорфа на отдельных интервалах. Для конечных объединений интервалов эта непрерывность сохраняется покомпонентно с точностью до событий касания и переиндексации при Merge. Именно поэтому при численной визуализации число отображаемых компонент может меняться, не меняя самого единого множества.

Стабилизация последовательности I_k при k → ∞ не гарантируется для произвольных положительных смещений. Достаточным условием ограниченного предельного множества является суммируемость смещений ΣR_k < ∞ вместе с замкнутостью в метрике Хаусдорфа после Merge. Для постоянных R_k радиальный радиус, как правило, растёт линейно, поэтому без дополнительной нормировки компактное предельное множество не возникает. Это утверждение относится только к предельному процессу k → ∞.

При каждом конечном порядке n построенная область остаётся ограниченной и компактной в силу теоремы 4.2.

4. Теоремы о свойствах Ω_n и Ω_{n,m}

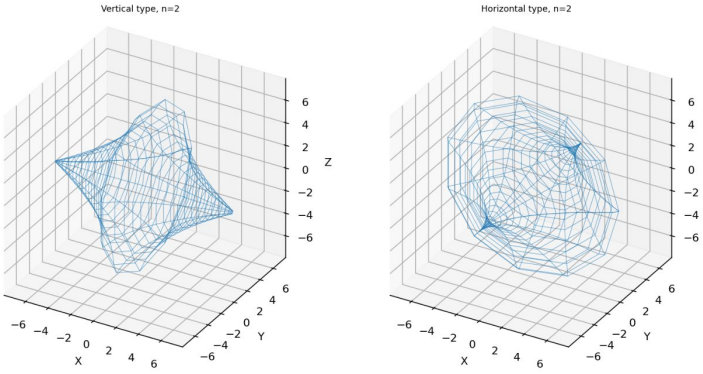

Рис. 5. Трёхмерные поверхности второго порядка.

4.1. Неотрицательность и ограниченность

Теорема 4.1.

Для любых f > 0, R > 0 и любых неотрицательных рекурсивных смещений R_k все интервалы, появляющиеся в рекурсии, имеют неотрицательные концы. Более того, если M_0 = max d, то верхний радиус любого интервала порядка n не превосходит M_0 + Σ_{k=1}^{n−2} R_k.

Доказательство.

На втором порядке интервалы имеют вид [0, d], где d ≥ 0. Если [lo, hi] ⊂ [0, M], то отсечённый интервал разности имеет неотрицательные концы, а интервал суммы лежит в [R_k, R_k + M]. Следовательно, новый максимальный радиус не превосходит R_k + M. Индукция по k даёт указанную оценку.

4.2. Компактность

Теорема 4.2.

Для любого конечного n, конечного m и конечных параметров f, R, R_k, h область Ω_{n,m} является ограниченной замкнутой областью в $\mathbb{R}^3$, с той лишь оговоркой, что её граница может быть только кусочно гладкой. Это утверждение имеет конечный порядок и не утверждает компактность предела бесконечного порядка без дополнительной нормировки.

Доказательство.

Осевая область каждого экземпляра ограничена. Радиусы ограничены теоремой 4.1. При фиксированной осевой координате Merge даёт конечное объединение замкнутых интервалов. Вращение замкнутого радиального множества вокруг оси сохраняет замкнутость, а конечное объединение рядов также замкнуто. Ограниченность следует из конечности осевых сдвигов и радиальной оценки.

4.3. Связность для одного рекурсивного шага и достаточные условия

Теорема 4.3.

Если при фиксированном ξ текущее сечение является единственным интервалом [0, M(ξ)] и R_k ≤ M(ξ), то после применения C_{R_k} и Merge новое сечение снова является единственным интервалом [0, R_k + M(ξ)]. Если R_k > M(ξ), новое сечение формально становится [R_k − M(ξ), R_k] ∪ [R_k, R_k + M(ξ)], которое касается в точке R_k и потому после Merge снова даёт единственный интервал [R_k − M(ξ), R_k + M(ξ)]. Однако для исходного интервала [α, β] с α > 0 два раздельных кольца возникают именно тогда, когда правый конец отсечённого интервала разности лежит ниже левого конца интервала суммы, то есть когда R_k − β > α, что эквивалентно R_k > α + β. Если R_k − β ≤ α, два порождённых интервала пересекаются или соприкасаются, и Merge даёт один интервал.

Следствие.

Глобальная связность Ω_n не определяется одним неравенством R_k ≤ M_{k−1}; она зависит от осевой области, от наличия интервалов с положительными нижними концами и от Merge между соседними компонентами. Поэтому в общем случае корректным результатом является не простая эквивалентность, а локально-сеченческая классификация связности.

$M_n \le M_0 + \Sigma R_k$

$A_n(\xi) = \pi \Sigma_j (\beta_j^2 - \alpha_j^2)$

Таблица 4. Установленные свойства Ω

Свойство	Статус
Неотрицательность радиусов	теорема
Ограниченность	теорема
Замкнутость после Merge	теорема
Глобальная связность	локальная классификация, не универсальная эквивалентность

Связность и граф компонент

Для полной глобальной классификации связности строится граф компонент: вершины соответствуют интервалам Merge на осевых отрезках, а рёбра — продолжению этих компонент при изменении ξ. Такая графовая формулировка естественно приводит к классификациям C1–C8 в последующих работах.

5. Ядро ветвления и интерпретация в терминах IFS

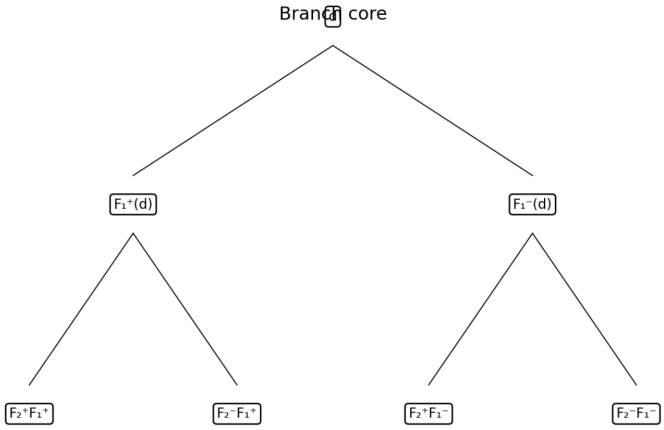

Рис. 6. Ядро ветвления как конечная орбита аффинных отображений.

5.1. Формальное дерево ветвления

Ядро ветвления порождается отображениями F_k^+(r) = R_k + r и F_k^−(r) = R_k − r. Мощность ядра ветвления B_n до отсечения и до Merge равна 2^{n−2}. Это число не является числом физических компонент после Merge: пересечения, касания и вложения могут уменьшать видимую сложность сечения. После Merge число различных интервалов в I_n(ξ), как правило, строго меньше 2^{n−2} и зависит от ξ.

5.2. Почему это не классическое сжимающее IFS

Отображения F_k^± имеют коэффициент с модулем 1. Поэтому при фиксированных ненулевых смещениях это аффинная система изометрий, а не сжимающее IFS в смысле теоремы Хатчинсона. Следовательно, автоматически говорить о фрактальном аттракторе или о размерности подобия нельзя. Корректная формулировка: конечный порядок n — это конечная орбита исходной функции d под действием полугруппы аффинных изометрий с последующим отсечением и Merge.

5.3. Конкретные пути обобщения до IFS

Сжимающий вариант возникает, если ввести нормированные операторы F_{k,λ}^±(r) = λ_k R_k ± λ_k r с 0 < λ_k < 1. Тогда каждое отображение имеет константу Липшица λ_k, и при sup λ_k < 1 применимы стандартные результаты для сжимающих IFS. Второй путь — убывающие смещения R_k = R_0 λ^k: сумма смещений ограничена величиной R_0/(1 − λ), что даёт естественную оценку предельного радиуса. Третий путь — проекция на [0, M_max], превращающая динамику в ограниченную итерацию на компактном множестве.

$B_2 = \{d\}, \quad B_{k+1} = \{R_k + r, R_k - r : r \in B_k\}$

$N_n = 2^{n-2}$

$F_{k,\lambda}^{\pm}(r) = \lambda_k R_k \pm \lambda_k r, \quad 0 < \lambda_k < 1$

$\Sigma_{k=0}^{\infty} R_0 \lambda^k = R_0/(1 - \lambda)$

Программа нормированного IFS

Введение нормировки $F_{k,\lambda}^{\pm}(r) = \lambda_k R_k \pm \lambda_k r$ при $\lambda_k < 1$ создаёт сжимающую систему, к которой применимы классические теоремы об инвариантном компактном множестве. Это не заменяет конструкцию конечного порядка, а задаёт отдельную предельную программу.

При $R_k = R_0 \lambda^k$ сумма смещений ограничена, поэтому предельный радиус можно оценить геометрической прогрессией. При постоянных R_k такой компактный предел, как правило, без дополнительной нормировки не существует.

6. Псевдопараболоиды 2-го, 3-го и 4-го порядков

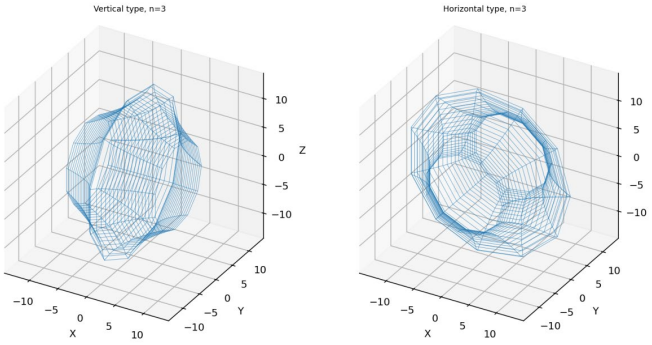

Рис. 7. Трёхмерные поверхности третьего порядка.

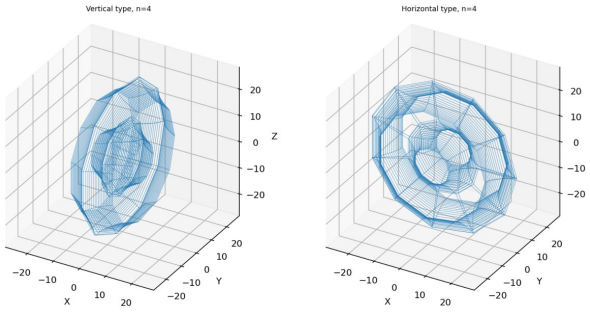

Рис. 8. Трёхмерные поверхности четвёртого порядка.

6.1. Второй порядок

Второй порядок представляет собой базовый внутренний объём. Он содержит один радиальный интервал $[0, d(\xi)]$ и после вращения образует область, доходящую до оси вращения. На этом уровне рекурсивных смещений $R_1, R_2, \ldots$ нет.

6.2. Третий порядок

Третий порядок порождается первым рекурсивным смещением R_1. Для базового интервала $[0, d]$ до Merge возникают интервалы $[\max(R_1 - d, 0), R_1]$ и $[R_1, R_1 + d]$. Они касаются в точке R_1 и для единственного

базового интервала сливаются в один интервал. На последующих уровнях интервалы с положительными нижними концами могут образовывать кольцевые зоны.

6.3. Четвёртый и более высокие порядки

Четвёртый порядок вводит вложенную структуру R_2 ± (R_1 ± d). Формально появляются четыре параболические границы; после Merge видимая структура может оказаться проще. Для n > 4 правило не меняется: каждый новый параметр действует на весь результат предыдущего порядка, а не снова на исходную образующую.

I_3(ξ) = Merge([max(R_1 − d, 0), R_1] ∪ [R_1, R_1 + d])

B_4 = {R_2 ± (R_1 ± d)}

Таблица 5. Порядки и формальные ветви

Порядок	Смещения	Формальные ветви
2	нет	1
3	R_1	2
4	R_1, R_2	4
n	R_1, …, R_{n−2}	2^{n−2}

Порядки выше четвёртого

Для n ≥ 5 правило не меняется: каждый новый рекурсивный параметр действует на все интервалы предыдущего уровня. Поэтому более высокие порядки не требуют новых формул образующей, но требуют аккуратного контроля формальных ветвей и Merge-компонент.

7. Гауссова кривизна поверхностей вращения

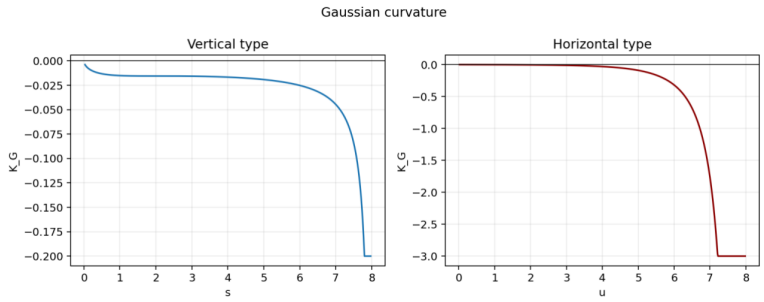

Рис. 9. Гауссова кривизна неотражённых базовых ветвей.

7.1. Общая формула

Для поверхности вращения с радиусом $\psi(\xi) > 0$ гауссова кривизна боковой части равна $K_G = -\psi'' / [\psi(1 + \psi'^2)^2]$. Средняя кривизна: $H = (1 + \psi'^2 - \psi\psi'') / (2\psi(1 + \psi'^2)^{3/2})$. Эти формулы применимы только на гладких участках, где функция ψ дважды дифференцируема и радиус положителен.

7.2. Вертикальный тип

Для $s > 0$: $\psi(s) = R - 2\sqrt{fs}$, $\psi'(s) = -\sqrt{f/s}$, $\psi''(s) = 0{,}5\sqrt{f} / s^{3/2}$. Поэтому на неотражённой ветви при $\psi > 0$ имеем $K_G < 0$. При $s \to 0+$: $\psi \to R$, $\psi'^2 \sim f/s$, $\psi'' \sim 0{,}5\sqrt{f} / s^{3/2}$; следовательно, $K_G \sim -(0{,}5\sqrt{f} / s^{3/2}) / [R(f/s)^2] = -(1/(2R\, f^{3/2}))\sqrt{s} \to 0-$. Таким образом, кривизна стремится к нулю со стороны отрицательных значений, хотя производная образующей неограничена.

7.3. Горизонтальный тип

Для $u > 0$: $\psi(u) = (R - u)^2/(4f)$, $\psi'(u) = -(R - u)/(2f)$, $\psi''(u) = 1/(2f) > 0$. Поэтому на неотражённой ветви $K_G < 0$ при $0 < u < R$. При $u \to R-$ радиус $\psi \to 0$ и K_G стремится к $-\infty$, что является осевой особенностью поверхности вращения. В точке $u = 0$ из-за множителя $|u|$ производная имеет излом; анализ выполняется по частям слева и справа.

7.4. Отражённые ветви

Для дуг вида $r = C - d$ знак второй производной меняется, и знак K_G изменяется на противоположный. Поэтому полная граница Ω_n представляет собой кусочную композицию областей отрицательной и положительной кривизны. Корректная формулировка: теория строит области-псевдопараболоиды с управляемыми параболическими участками переменной кривизны, среди которых неотражённые боковые ветви имеют отрицательную гауссову кривизну.

$K_G = -\psi'' / [\psi(1 + \psi'^2)^2]$

$\psi_v'(s) = -\sqrt{f/s}$, $\psi_v''(s) = \sqrt{f} / (2s^{3/2})$

$\psi_h'(u) = -(R - u)/(2f)$, $\psi_h''(u) = 1/(2f)$

Дополнительные замечания

Кривизна не является единственным механизмом возможного волнового эффекта. В последующем моделировании одновременно важны граничные условия, открытость области, материал, масштаб относительно длины волны и способ возбуждения. Поэтому знак K_G фиксируется как геометрическая характеристика, а не как достаточное физическое доказательство удержания поля.

При переходе к высшим порядкам дуги вида $C + d$ и $C - d$ необходимо анализировать раздельно. Если видимая граница после Merge меняет активную дугу, кривизна становится кусочной величиной и не обязана иметь единый знак по всему объекту.

8. Особенности, гладкость и площадь поверхности

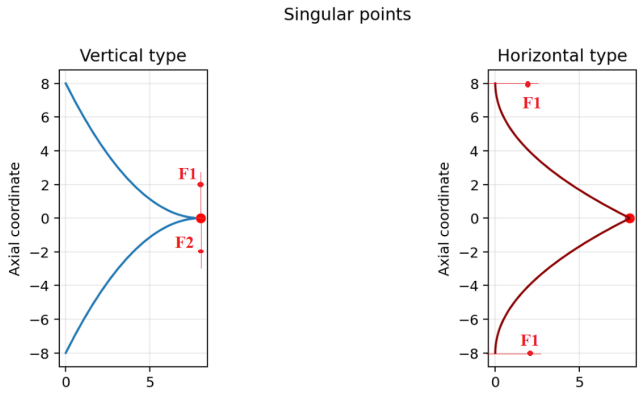

Рис. 10. Особые точки базовых образующих.

8.1. Класс гладкости

Граница Ω_n кусочно гладкая. На гладких параболических дугах она C^∞, однако глобальная гладкость C^1 может нарушаться в вершинах, в точках контакта с осью и на контактных швах. Поэтому Ω_n корректно рассматривать как компактную область с кусочно гладкой стратифицированной границей.

8.2. Площадь поверхности вблизи особенности

Для поверхности вращения площадь боковой поверхности равна S = ∫2πψ√(1 + ψ′²)dξ. Для вертикальной ветви при s → 0+: ψ → R и √(1 + ψ′²) ~ √(f/s). Интеграл ∫_0^ε 2πR√(f/s)ds конечен, поскольку ∫_0^ε s^{−1/2}ds = 2√ε. Таким образом, особенность в точке s = 0 не порождает бесконечной площади поверхности.

В горизонтальном типе при u → R− радиус ψ стремится к нулю, а производная остаётся конечной, поэтому вклад в площадь также конечен. Математически это позволяет использовать такие поверхности как граничные области после надлежащей обработки особенностей при построении расчётной сетки.

S = ∫2πψ√(1 + ψ′²)dξ

∫_0^ε s^{−1/2}ds = 2√ε < ∞

Таблица 6. Особые точки

Тип	Точка	Статус
Вертикальный	s = 0	неограниченная производная, конечная площадь
Вертикальный	|s| = a	контакт с осью
Горизонтальный	u = 0	излом из-за множителя |u|
Горизонтальный	|u| = R	контакт с осью, K_G → −∞ для C + d

9. Аналитические фокусы порождающих дуг

9.1. Вывод для вертикального типа

Рассмотрим правую полуветвь вертикального типа: $r = C + \varepsilon(R - 2\sqrt{(fs)})$, $s \geq 0$. Сдвинем радиальную координату к точке $C + \varepsilon R$: $x_r = r - (C + \varepsilon R) = -2\varepsilon\sqrt{(fs)}$. Возведение в квадрат даёт $x_r^2 = 4fs$. Это каноническая парабола $x^2 = 4fs$ с осью вдоль s и фокусом на расстоянии f от вершины. Две зеркальные половины дают $s = +f$ и $s = -f$. Обратное преобразование даёт $F_v(C, \varepsilon) = (C + \varepsilon R, \pm f)$.

9.2. Вывод для горизонтального типа

Для горизонтального типа $r = C + \varepsilon(R - |u|)^2/(4f)$. На полуоси $u \leq R$ положим $y = R - u$. Тогда $r - C = \varepsilon\, y^2/(4f)$, или $y^2 = 4f\varepsilon(r - C)$. Для $\varepsilon = +1$ фокус в локальных координатах имеет радиальную координату $C + f$; для $\varepsilon = -1$ направление раскрытия обращено, и координата становится $C - f$. Поскольку вершины находятся в точках $u = \pm R$, фокусы равны $F_h(C, \varepsilon) = (C + \varepsilon f, \pm R)$.

$r(\xi) = C_\sigma + \varepsilon_\sigma\, d(\xi)$

$F_v(C, \varepsilon) = \{(C + \varepsilon R, +f), (C + \varepsilon R, -f)\}$

$F_h(C, \varepsilon) = \{(C + \varepsilon f, +R), (C + \varepsilon f, -R)\}$

Таблица 7. Фокусы порождающих дуг

Тип	Дуга	Фокусы
Вертикальный	$C + \varepsilon \cdot d_v(s)$	$(C + \varepsilon R, \pm f)$
Горизонтальный	$C + \varepsilon \cdot d_h(u)$	$(C + \varepsilon f, \pm R)$

9. Площадь, объём и количественные функционалы

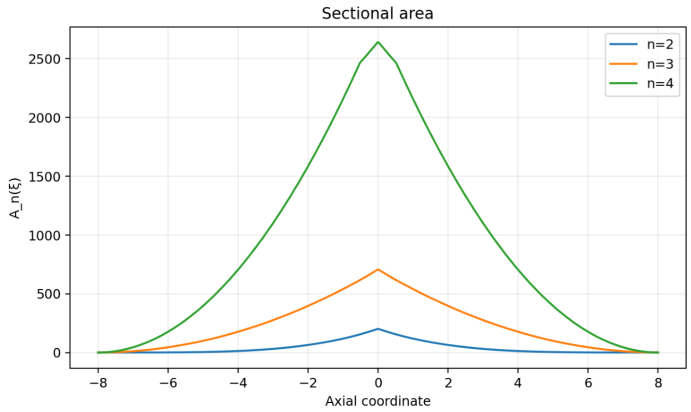

Рис. 11. Площадь поперечного сечения как функция осевой координаты.

10.1. Площадь сечения

При фиксированной осевой координате ξ каноническое Merge-множество интервалов [α_j(ξ), β_j(ξ)] определяет площадь поперечного сечения как сумму площадей дисков или кольцевых областей. Эта величина важна уже в геометрическом томе, поскольку она характеризует распределение внутреннего объёма вдоль оси.

10.2. Объём

Объём отдельного объекта равен V_n = ∫A_n(ξ)dξ по допустимой осевой области. Для рядной системы объём не превосходит суммы объёмов отдельных экземпляров. При h < 0 объёмы перекрываются, и Merge удаляет только дублирование общей части, сохраняя порождающие компоненты как конструктивные элементы.

$$A_n(\xi) = \pi \Sigma_j (\beta_j(\xi)^2 - \alpha_j(\xi)^2)$$

$$V_n = \int_{D_n} A_n(\xi)\, d\xi$$

$$V_{n,m} \le m \cdot V_n$$

10.Численный эталонный пример

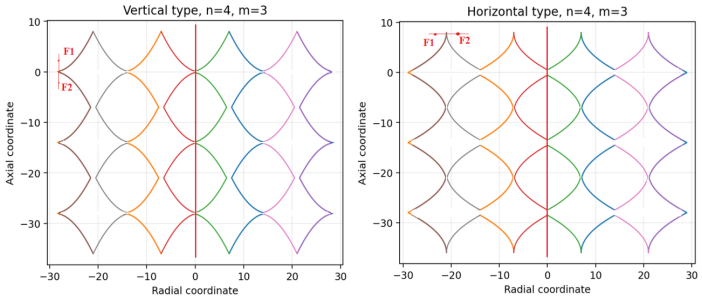

Рис. 12. Рядная система n = 4, m = 3, h = −2 в двумерном представлении.

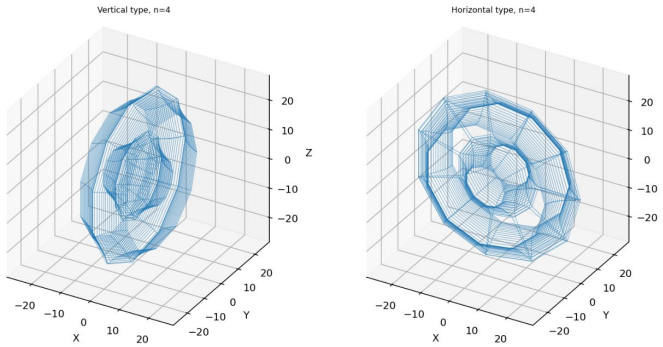

Рис. 13. Рядная система n = 4, m = 3, h = −2 в трёхмерном представлении.

11.1. Параметры примера

В качестве воспроизводимого эталона используется набор параметров f = 2, R = 8, a = R²/(4f) = 8, R_1 = 7, R_2 = 14, n = 4. Этот пример совпадает с параметрами, использованными в итоговом скрипте в качестве базового демонстрационного режима. Он показывает пересечение и вложение уже на первом рекурсивном шаге, поскольку R_1 < M_0 = 8.

11.2. Численные значения

Максимальные радиусы по оценке: M_0 = 8, M_1 = R_1 + M_0 = 15, M_2 = R_2 + M_1 = 29. Формальное число ветвей четвёртого порядка: N_4 = 2^(4−2) = 4. При ξ = 0 интервал после Merge равен [0, 29], а площадь сечения составляет $\pi \cdot 29^2 \approx 2642{,}079$.

Пошаговая проверка Merge в точке s = 2.

Для вертикальной точки s = 2 имеем d = R − 2√(fs) = 8 − 2√4 = 4, откуда I_2(s = 2) = [0, 4].

Применение C_{R_1 = 7} даёт [7 − 4, 7] ∪ [7, 7 + 4] = [3, 7] ∪ [7, 11], и, поскольку интервалы касаются в точке 7, Merge даёт I_3(s = 2) = [3, 11].

Применение C_{R_2 = 14} к [3, 11] даёт интервал разности [14 − 11, 14 − 3] = [3, 11] и интервал суммы [14 + 3, 14 + 11] = [17, 25]. Эти интервалы разделены, поэтому I_4(s = 2) = [3, 11] ∪ [17, 25], что совпадает с данными таблицы 8.

Таблица 8. Численный пример: интервалы и площади

Точка	d	Интервалы после Merge, n = 4	A_n(ξ)
u = 0 или s = 0	8,000	[(0,0; 29,0)]	2642,079
u = 4 (горизонтальный)	2,000	[(5,0; 9,0), (19,0; 23,0)]	703,717
s = 2 (вертикальный)	4,000	[(3,0; 11,0), (17,0; 25,0)]	1407,434

Таблица 9. Фокусы формальных дуг при n = 4

Тип	Координаты фокусов
Вертикальный	[(−1,0; −2), (−1,0; 2), (13,0; −2), (13,0; 2), (15,0; −2), (15,0; 2), (29,0; −2), (29,0; 2)]
Горизонтальный	[(5,0; −8), (5,0; 8), (9,0; −8), (9,0; 8), (19,0; −8), (19,0; 8), (23,0; −8), (23,0; 8)]

Дополнительные замечания

Данный пример представляет собой минимальную проверку всех основных формул: базового размера a, формального числа ветвей N_n, максимального радиуса M_n, интервалов после Merge, площади сечения и аналитических фокусов. Он позволяет независимо проверить согласованность текста, формул и скрипта.

Важно, что при ξ = 0 операция Merge существенно упрощает формальную структуру: четыре формальные ветви четвёртого порядка дают один результирующий интервал [0, 29]. При других ξ появляются раздельные кольцевые зоны, что демонстрирует различие между формальным деревом ветвления и фактической радиальной областью.

Проверочная роль примера

Эталонный пример показывает, что при ξ = 0 сложность формального дерева может схлопнуться в один интервал, тогда как при других ξ возникают раздельные кольцевые зоны. Это прямое численное подтверждение необходимости различать B_n и I_n.

11.Рядные системы и параметр h

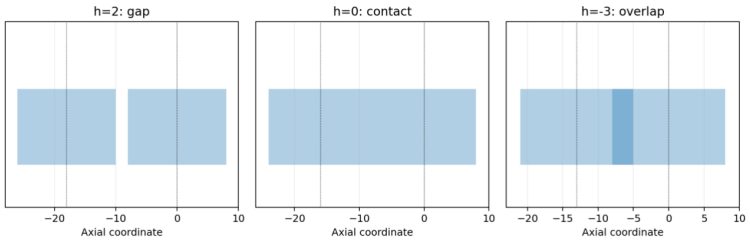

Рис. 14. Режимы рядной сборки в зависимости от параметра h.

12.1. Шаг между рядами

Рядная сборка применяется после построения одного экземпляра Ω_n. Если L — половина осевой длины выбранного типа, то шаг между центрами соседних экземпляров равен step = 2L + h, а сдвиги составляют Δ_j = −j(2L + h), j = 0, …, m − 1. В принятых обозначениях L = a для вертикального типа, где a = R²/(4f), и L = R для горизонтального типа, осевая область которого |u| ≤ R. Параметр h не изменяет внутренний порядок n; он управляет внешней осевой сборкой.

12.2. Режимы h > 0, h = 0, h < 0

При h > 0 между рядами имеется реальный зазор. При h = 0 они соприкасаются в предельных точках осевой области. При h < 0 осевые носители перекрываются, и Merge строит единый объём без искусственных соединительных линий. Этот переход имеет геометрическую природу и должен проверяться отдельно в волновых задачах.

step = 2L + h

Δ_j = −j(2L + h), j = 0, …, m − 1

Таблица 10. Режимы рядов

h	Геометрический смысл
h > 0	отдельные экземпляры
h = 0	касание
h < 0	перекрытие и Merge

13. Программа дальнейшей волновой верификации

13.1. Минимальный набор физических тестов

Переход от геометрии к физике должен выполняться поэтапно. Сначала сравниваются контрольные геометрии: цилиндр, обычный параболоид, псевдопараболоид второго порядка, затем n = 3, n = 4 и рядные системы при h > 0, h = 0, h < 0. Для каждой области необходимо вычислять собственные частоты, модальные объёмы, добротности Q, распределения энергии, времена удержания и потоки через заданные апертуры.

13.2. Научная позиция

Том 1 устанавливает конструктивную геометрию и вычислительный аппарат. Волновое поведение волн различной физической природы в областях Ω_{n,m} является предметом исследовательской программы, рассматриваемой в последующих томах. Сильная сторона теории состоит в том, что она определяет новую параметрическую область Ω_{n,m}, на которой эти гипотезы могут проверяться воспроизводимым образом.

Название работы [1] отражает гипотезу более широкой исследовательской программы, а не результат по управлению волнами, установленный в настоящем томе. Программа волновой верификации будет сопоставлять удержание и спектральное поведение в Ω_n и Ω_{n,m} с традиционными фотонно-кристаллическими резонаторами [13], связанными состояниями в континууме [14], микрорезонаторами с модами шепчущей галереи [15] и связанно-резонаторными оптическими волноводами [16].

Для электромагнитной валидации конечно-элементные и конечно-разностные формулировки следует верифицировать по стандартным источникам, посвящённым решателям уравнений Максвелла [17] и методам FDTD [11]. Для вопросов геометрических предельных переходов рекурсивную конструкцию можно также сопоставить со стандартными источниками по теории меры, топологии и фрактальной геометрии [18].

Таблица 11. Критерии будущей верификации

Критерий	Смысл
τ	время удержания энергии
Q	добротность
Спектр	сдвиги и расщепления частот
Поток	направленный вывод излучения
V_mode	модальный объём

Заключение

Теория псевдопараболоидов высших порядков вводит воспроизводимый геометрический аппарат: базовые параболические образующие, интервальную рекурсию, операцию Merge, рядную сборку и параметры f, R, R_k, n, m, h. В этом аппарате единый внутренний объём Ω_{n,m} становится самостоятельным объектом проектирования.

Геометрическая часть готова к дальнейшей валидации: свойства области, границы применимости, кривизна, особенности, аналитические фокусы и количественные функционалы определены. Следующий этап — не новое геометрическое утверждение, а физическое моделирование на построенных областях.

Приложение A. Обозначения и параметры

Таблица 12. Сводная таблица параметров

Символ	Определение	Назначение
f	$f > 0$	фокальный параметр
R	$R > 0$	масштаб и расстояние до фокальной линии
a	$R^2/(4f)$	базовый размер
R_k	смещения	рекурсивные уровни
n	len(смещений) + 2	порядок
m	целое ≥ 1	число рядов
h	вещественное	осевой зазор / перекрытие
Ω_{n,m}	единый объём	вычислительная область

Приложение B. Литература

[1] V. Khaustov. Geometric Wave Engineering: Pseudo-Surfaces of Variable Negative Gaussian Curvature as a Geometric Basis for Programmable Wave Control. (2026). DOI: 10.5281/ZENODO.19983291.

[2] V. Khaustov. Geometric wave engineering of ring-localized states in open pseudo-hyperbolic cavities. (2026). DOI: 10.5281/ZENODO.19944381.

[3] V. Khaustov. Higher-Order Pseudohyperboloids with the Merge Operation: A Geometric Foundation for Programmable Wave Confinement. (2026). DOI: 10.5281/ZENODO.19926174.

[4] Hutchinson J. E. Fractals and self-similarity. Indiana University Mathematics Journal. 1981;30(5):713–747.

[5] Falconer K. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. Wiley, 2003.

[6] Barnsley M. F. Fractals Everywhere. Academic Press, 1988.

[7] do Carmo M. P. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, 1976.

[8] Kreyszig E. Differential Geometry. Dover Publications, 1991.

[9] Morse P. M., Ingard K. U. Theoretical Acoustics. Princeton University Press, 1968.

[10] Jackson J. D. Classical Electrodynamics. Wiley, 1999.

[11] Taflove A., Hagness S. C. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method. Artech House, 2005.

[12] Jin J. The Finite Element Method in Electromagnetics. Wiley, 2014.

[13] Joannopoulos J. D., Johnson S. G., Winn J. N., Meade R. D. Photonic Crystals: Molding the Flow of Light. Princeton University Press, 2008.

[14] Hsu C. W., Zhen B., Stone A. D., Joannopoulos J. D., Soljačić M. Bound states in the continuum. Nature Reviews Materials. 2016;1:16048.

[15] Vahala K. J. Optical microcavities. Nature. 2003;424:839–846. DOI: 10.1038/nature01939.

[16] Yariv A., Xu Y., Lee R. K., Scherer A. Coupled-resonator optical waveguide: a proposal and analysis. Optics Letters. 1999;24(11):711–713. DOI: 10.1364/OL.24.000711.

[17] Monk P. Finite Element Methods for Maxwell's Equations. Oxford University Press, 2003.

[18] Edgar G. A. Measure, Topology, and Fractal Geometry. 2nd ed. Springer, 2008.

[19] Marcuse D. Light Transmission Optics. Van Nostrand Reinhold, 1972.