Геометрическая волновая инженерия

Закон идеальной геометрической лучевой динамики в псевдоэллипсоидах второго порядка

Точная структура фокального возврата, периодические семейства лучей и топологическое разделение горизонтального и вертикального типов

Хаустов Владимир Игоревич

ORCID: 0009-0007-3657-2309

Лаборатория геометрической волновой инженерии https://vihrihaosa.ru/

Лицензия: CC BY 4.0

Дата публикации: 17 сентября 2026 года

DOI: 10.5281/zenodo.22737467

Научно-технический перевод с английского языка.

Редакция, адаптированная для русскоязычного инженера-исследователя.

Оригинал: Khaustov. V. Law of Ideal Geometric Ray Dynamics in Second-Order Pseudoellipsoids: Exact Focal Structure and Topological Transitions, with Numerically Identified Periodic Ray Classes and Path-Density Concentration Zones. https://doi.org/10.5281/zenodo.22737467

Аннотация

Геометрическая волновая инженерия (ГВИ) — исследовательская программа, в которой целенаправленно сконструированная геометрия рассматривается как пассивное средство организации лучевого, а на последующих этапах — волнового распространения. В настоящем препринте впервые в рамках этой программы формулируется единый лучево-геометрический закон для псевдоэллипсоида второго порядка (PEB-2), опирающийся на ранее введённую в ГВИ конструктивную геометрию псевдоэллипсоидов [9]. PEB-2 не является классическим эллипсоидом. Его меридиональная граница составляется из двух выбранных четверть-эллиптических родительских ветвей, после чего вращается вокруг общей оси тела. Каждая гладкая родительская ветвь локально сохраняет известное фокально-отражательное свойство эллипса, однако составная поверхность создаёт иную математическую задачу: необходимо выбрать физически достигнутый родительский сегмент, согласовать две пары родительских фокусов в единой геометрии, а плоские точечные фокусы после вращения преобразуются в соосные фокальные кольца.

Сформулированный здесь закон утверждает, что в каждой гладкой физически активной точке родительского эллипса меридиональный луч, линия падения которого принадлежит одной фокальной линии этого родителя, при зеркальном отражении отображается в сопряжённую фокальную линию того же родителя. В составном псевдоэллипсоиде это локальное сопряжение становится физическим событием только после того, как правило первого допустимого пересечения выбирает первую достигнутую границу. Отношение полуосей $K=b/a$ организует фокальную топологию поверхности. При $0<K<1$ регулярный горизонтальный тип имеет аксиально ориентированные родительские пары фокусов; при $K=1$ каждая родительская пара фокусов сливается в центре своего эллипса и задаёт режим кругового перехода; при $K>1$ регулярный вертикальный тип имеет радиально ориентированные родительские пары фокусов. Внутри горизонтального семейства точное условие $h=-f$ порождает горизонтальный трёхфокусный тип, в котором два внутренних родительских фокальных кольца совпадают, тогда как два внешних остаются различными.

Вращение меридиональной конструкции преобразует родительские фокальные точки в круговые фокальные множества и переносит точный закон фокального сопряжения в каждую инвариантную меридиональную плоскость трёхмерного тела. Осевая симметрия дополнительно даёт точный инвариант осевого углового момента для общих трёхмерных зеркальных лучей; при этом в работе намеренно не распространяется меридиональное сопряжение фокальных колец на произвольные косые траектории без доказательства. Негладкие швы также исключаются из теоремы о зеркальном отражении в гладкой точке, если для них не задан отдельный локальный закон границы. Такая формулировка отделяет точный геометрический закон от численной верификации, долговременной биллиардной динамики, конечноволнового поведения, характеристик резонатора и эксперимента. Цель работы — установить псевдоэллипсоид как математически определённую поверхность управления лучами и как базовую геометрию для последующих исследований в рамках Геометрической волновой инженерии.

Ключевые слова: псевдоэллипсоид; геометрическая оптика; фокальное сопряжение; фокальные кольца; трёхфокусное слияние; зеркальный биллиард; поверхность вращения; отрицательная гауссова кривизна; Геометрическая волновая инженерия

Содержание

Аннотация....2
1. Введение, научные границы и новизна....5
2. Каноническая конструкция, обозначения и научная номенклатура....5
2.1 Параметры сборки и обозначения....5
2.2 Родительская геометрия и активный профиль....6
2.3 Точное физическое отображение ветвей: пересечение луча с эллипсом и правило первого столкновения....7
2.4 Фокальная видимость и её касательные границы....8
2.5 Типы псевдоэллипсоидов....8
3. Горизонтальный тип псевдоэллипсоида, 0<K<1....9
3.1 Точная двумерная конструкция....9
3.2 Трёхмерная конструкция и действие закона....9
3.3 Численная верификация горизонтального типа....10
4. Псевдоэллипсоид кругового перехода, K=1....10
4.1 Точный локальный закон в точке кругового перехода....11
4.2 Общая многоотражательная динамика внутри составной полости K=1....11
4.3 Расчёты плотности, сходимости и чувствительности при K=1....11
4.4 Сравнение индивидуальных траекторий и фазовых карт для именованных типов K....12
5. Вертикальный тип псевдоэллипсоида, K>1....13
5.1 Точная двумерная конструкция....13
5.2 Точная трёхмерная конструкция и инвариант радиальных фокальных колец....13
5.3 K>1, произвольное h_a: коллапс кольца....14
5.4 Численная верификация вертикального типа....15
5.5 Диагностика немеридиональных трёхмерных лучей....17
6. Горизонтальный трёхфокусный тип псевдоэллипсоида, 0<K<1 и h=−f....18
6.1 Точное условие слияния....18
6.2 Точная маршрутизация через объединённое кольцо....19
6.3 Режимы по обе стороны от h=−f....20
6.4 Физическое горло и негладкий критический шов....21
6.5 Проверка трёхфокусного режима и атлас индивидуальных лучевых течений....22
7. Формальное доказательство единой теоремы родительского фокального сопряжения....23
7.1 Теорема 1 — обобщённое сопряжение родительских фокальных прямых....23
7.2 Доказательство....23
7.3 Негладкие швы и область применимости теоремы....24
7.4 Следствие 1 — кольцевое сопряжение при 0<K<1....24
7.5 Следствие 2 — совпадающие кольца родительских центров при K=1....24
7.6 Следствие 3 — пара радиальных колец при K>1....25
7.7 Осесимметричный 3D-инвариант и общая лемма о соосной апертуре....25
8. Формальное доказательство условия трёхфокусного слияния....26
8.1 Теорема 2 — точное трёхфокусное условие....26
8.2 Доказательство....26
8.3 Следствие 4 — левая/правая маршрутизация F_{23}....26
9. Точная структура h-режимов и независимое радиальное смещение оси....27
10. Предельные и топологические законы по K....29
10.1 Тонкий горизонтальный предел $K\to 0^+$....29
10.2 Корневой коллапс при $K\to 1^-$....29
10.3 Корневое радиальное раскрытие при $K\to 1^+$....29
11. Следствия подобия и смещения оси....30
11.1 Масштабная инвариантность подобия....30

11.2 Независимость локального сопряжения от h_a 30
11.3 Диагностика немеридиональных 3D-лучей 30
12. Численная верификация и матрица «утверждение — доказательство» 31
13. Локальность фокального закона и отсутствие обнаруженных поздних строгих фокальных возвратов 33
14. Вторичные структуры лучевой динамики 33
14.1 Чередование ветвей одного родителя: кандидат на численный закон 33
14.2 Замкнутые классы периодических лучей 33
14.3 Научная интерпретация периодического скелета 36
14.4 Расширенный аудит периодических орбит: зависимость от h и h_1 36
15. Глобальная фазовая динамика в зависимости от K 38
15.1 Динамическая асимптотика малых K 41
15.2 Динамика на точной трёхфокусной линии 41
15.3 Определение и вычислительная основа диагностики плотности лучевых путей 42
15.4 Внутренние зоны концентрации плотности лучевых путей и их зависимость от геометрии 43
15.4.1 Как правильно читать знаковую меридиональную визуализацию 43
15.4.2 Канонический режим $h_1=0$: экваториально центрированная радиально внеосевая тороидальная зона 44
15.4.3 Отрицательное h_1: управляемое горлом смещение внутрь 45
15.4.4 Положительное h_1: перестройка, обусловленная апертурой 46
15.4.5 Связь с фокальным законом, динамическая интерпретация и ограничения 47
15.4.6 Потенциальное техническое значение 48
16. Итоговая математическая формулировка закона 49
17. Протокол численной воспроизводимости 50
18. Перспективные научные и технологические направления 51
19. Инженерная интерпретация в каноническом семействе 51
20. Ограничения, критерии фальсификации и будущая работа 51
21. Выводы 51
Приложение А. Номенклатура 52
Литература 53

1. Введение, научные границы и новизна

Геометрическая волновая инженерия (ГВИ) используется здесь как более широкая исследовательская программа, в которой целенаправленно сконструированная геометрия границы и аналитически заданные фокальные структуры изучаются как пассивные механизмы организации лучевого распространения и, в последующих конечноволновых работах, волновых полей. Настоящий препринт ограничен геометрической лучевой динамикой. Его задача — дать первую специальную и единую формулировку лучевого закона для псевдоэллипсоида второго порядка (PEB-2), конструктивная геометрия которого была ранее установлена в программе ГВИ по псевдоэллипсоидам [9]. Для понимания конструкции начнём с обычного эллипса. Линия, направленная из одного фокуса к гладкой точке эллипса, после отражения переходит в линию, связанную со вторым фокусом. Это одноотражательное тождество и общий аппарат зеркальных биллиардов являются классическими [1–3,6,7] и здесь не заявляются как новые результаты. Новая лучево-динамическая задача возникает, когда две выбранные четверть-эллиптические родительские ветви собираются в единую осесимметричную составную границу, а их наследуемые фокальные структуры должны быть физически согласованы.

Получающееся тело называется псевдоэллипсоидом второго порядка. Это не обычный эллипсоид: его меридиональная стенка кусочно наследуется от двух различных родительских эллипсов. Поэтому фокальная линия физически значима только в том случае, если соответствующий родитель действительно является первой стенкой, достигнутой лучом. Кроме того, две родительские пары фокусов могут менять взаимный порядок, сливаться или переходить от аксиальной к радиальной ориентации при изменении безразмерного параметра формы $K=b/a$. После вращения каждый ненулевой меридиональный фокальный радиус порождает фокальное кольцо. Эти обстоятельства превращают знакомое локальное тождество эллипса в нетривиальный составной лучевой закон.

Поэтому центральное утверждение работы ограничено по объёму, но является точным. Работа не заявляет новый закон отражения и не утверждает, что произвольные лучи многократно переходят от одного фокуса к другому. Устанавливается, как классическое фокальное сопряжение родительского эллипса встраивается в составную геометрию PEB-2; как выбирается физически активный родитель; как при прохождении K через единицу фокальная топология непрерывно переходит от аксиальной ориентации через круговой переход к радиальной; как точно при $h=-f$ возникает горизонтальное трёхфокусное состояние; как плоский результат превращается в трёхмерный кольцевой закон для меридиональных лучей; и какие утверждения о длинных многоотражательных траекториях остаются численными, а не теоремными.

В рукописи используется строгая иерархия доказательств. Аналитические тождества и теоремы формулируются как точные. Прямые вычисления с плавающей точкой приводятся как численная верификация. Долговременные диагностики заполняемости фазового пространства, поиск периодических орбит, чередование ветвей и аберрация косых лучей явно сохраняются в статусе численных результатов конечного корпуса, если для них не дано аналитическое доказательство. Утверждения о конечноволновых задачах Максвелла и Гельмгольца, характеристиках резонатора и эксперименте не входят в настоящую лучевую теорему.

2. Каноническая конструкция, обозначения и научная номенклатура

2.1 Параметры сборки и обозначения

Пусть $a>0$ — осевая полуось каждого родительского эллипса, $b>0$ — его поперечная полуось, а $K=b/a>0$. В более ранней конструктивной формулировке [9] использовались

нецентрированная осевая координата $\tilde{x}$, параметр взаимной сборки четвертей h_1 и отдельное смещение уровня оси вращения, обозначенное там символом h. Чтобы исключить конфликт обозначений в настоящем лучевом законе, центрированное симметричное полусмещение обозначается h, а независимое радиальное смещение уровня оси — h_a. Эти соглашения точно связаны соотношениями $h_1=2h$ и $x=\tilde{x}-h_1/2=\tilde{x}-h$. Таким образом, используемый здесь h равен половине прежнего взаимного осевого смещения и не является прежним смещением оси вращения.

$h_1 = 2h,\ x = \tilde{x} - h_1/2 = \tilde{x} - h.$ (1)

Таким образом, используемый здесь h равен половине прежнего взаимного осевого смещения и не является прежним смещением оси вращения. Центры левого и правого родительских эллипсов равны

$x_0L = -(a + h),\ x_0R = +(a + h).$ (2)

Следовательно, расстояние между центрами равно $2(a+h)=2a+h_1$, а изменение h на Δh изменяет это расстояние на $2\Delta h$. В центрированной координате h действует на два родительских эллипса симметрично и противоположно. Это соглашение точно эквивалентно прежней односторонней конструкции с h_1 после жёсткого осевого переноса и приводит условие горизонтального трёхфокусного состояния к прямому виду $h=-f$. В прежних конструктивных обозначениях то же условие имеет вид $h_1\text{^}(3f)=-2f$.

Независимое знаковое радиальное смещение уровня оси h_a сохраняется, поскольку оно изменяет расстояние от центров родительских эллипсов до оси вращения, не меняя a, b, K и осевой параметр сборки h. Это тот же геометрический канал, который в более ранней конструктивной формулировке [9] обозначался параметром уровня оси h. Допустимый радиальный уровень должен удовлетворять $R=b+h_a>0$.

$R = b + h_a,\ K = b/a,\ \xi = h/a,\ \eta = h_a/a.$ (3)

2.2 Родительская геометрия и активный профиль

Для $K>0$, меридионального знака $s=\pm1$ и родителя $P\in\{L,R\}$ полный родительский эллипс в знаковой меридиональной плоскости задаётся как

$E_{P,s}: (x - x_0P)^2/a^2 + (R - s\cdot y)^2/b^2 = 1.$ (4)

В нецентрированной конструктивной координате $\tilde{x}$ две родительские четверть-эллиптические дуги явно задаются формулами

$y_L(\tilde{x}) = b\cdot\sqrt{(1 - ((\tilde{x} + a)/a)^2)},\ -a \le \tilde{x} \le 0,$ (5)

$y_R(\tilde{x}) = b\cdot\sqrt{(1 - ((\tilde{x} - a - h_1)/a)^2)},\ h_1 \le \tilde{x} \le a + h_1.$ (6)

При $h_1<0$, когда существуют обе дуги, активная высота конструкции определяется верхней огибающей $y(\tilde{x})=\max[y_L(\tilde{x}),y_R(\tilde{x})]$; точка переключения находится в $\tilde{x}=h_1/2$, что в центрированной координате соответствует $x=0$. При $h_1>0$ в интервале $0<\tilde{x}<h_1$ (эквивалентно $|x|<h$) отсутствует какой-либо эллиптический родитель; поэтому физический статус этой центральной области должен задаваться явно как отверстие либо посредством выбранной модели замыкания, а не неявным продолжением эллипса.

$y_{act}(\tilde{x}) = \min[\bar{y}(\tilde{x}), R],\ d(\tilde{x}) = \max[R - y_{act}(\tilde{x}), 0],\ I_2(\tilde{x}) = [0, d(\tilde{x})],\ h_1 = 2h.$ (7)

Область второго порядка представляет собой тело, получаемое вращением I_2 вокруг оси x. Эквивалентно, в центрированной знаковой меридиональной координате её регулярная эллиптическая стенка является сохраняемой частью (4) с $y=\pm d$ и с выбором первого пересечения там, где опоры родительских сегментов перекрываются. Точки с $d=0$ являются осевыми вырождениями, а не гладкими эллиптическими точками отражения. Такое

определение поверхности не зависит от рисунков и точно воспроизводит более раннюю конструктивную геометрию с точностью до указанного жёсткого осевого переноса [9].

На каждом регулярном C^2-эллиптическом фрагменте при $d>0$ гауссова кривизна поверхности вращения равна

$$K_G = -d''(x) / [\, d(x)\cdot(1 + d'(x)^2)^2 \,]. \quad (8)$$

Для четверти эллипса $y''<0$ и $d''=-y''>0$, следовательно, на этих регулярных фрагментах $K_G<0$. В точках соединения, на швах переключения огибающей, кромках апертур, точках отсечения и осевых вырождениях гладкая кривизна не назначается [8, 9].

В центрированной координате опоры левого и правого родительских сегментов равны $[-a-h,-h]$ и $[h,a+h]$ соответственно. При $h\geq 0$ они оканчиваются в $x=-h$ и $x=+h$, а центральный интервал имеет ширину $2h$ и не содержит активного эллиптического родителя. При $-a<h<0$ опоры перекрываются; физическая стенка следует правилу верхней огибающей в исходном представлении высоты, что эквивалентно выбору ближайшей допустимой радиальной эллиптической ветви после перехода к d, с швом переключения ветвей в $x=0$. Значение $h\leq -a$ соответствует вырожденному пределу этой двухчетвертной сборки. Трёхмерная граница получается вращением неотрицательной радиальной функции $d(x)$.

2.3 Точное физическое отображение ветвей: пересечение луча с эллипсом и правило первого столкновения

Составной лучевой закон не допускает произвольного назначения фокального родителя: для заданного состояния луча физически действующие родитель и ветвь должны определяться однозначно, и именно это задаёт реализуемое фокальное сопряжение. Для меридионального луча $p+t\cdot d$, $t\geq 0$, с началом $p=(p_x,p_y)$ и направлением $d=(d_x,d_y)$ подстановка в активный знаковый родительский эллипс $E_{P,s}$ из (4) даёт точное квадратное уравнение относительно времени пролёта t:

$$A\cdot t^2 + B\cdot t + C = 0, \quad (9)$$

где при $x_c=x_0P$,

$$A = d_x^2/a^2 + d_y^2/b^2, \quad (10)$$

$$B = 2(p_x - x_c)\cdot d_x/a^2 - 2s\cdot(R - s\cdot p_y)\cdot d_y/b^2, \quad (11)$$

$$C = (p_x - x_c)^2/a^2 + (R - s\cdot p_y)^2/b^2 - 1. \quad (12)$$

Физическое следующее столкновение луча определяется допустимым корнем: вещественным неотрицательным корнем t с положительным временем пролёта, который (i) проходит фильтр области определения активной ветви и (ii) имеет минимальное время пролёта среди всех корней-кандидатов по всем активным родительским ветвям и всем явно заданным элементам замыкания или открытия. Это правило первого столкновения является определяющим правилом выбора составного закона: из всех геометрически возможных пересечений физически реализуется только пересечение с минимальным допустимым временем пролёта. Именно это правило превращает локальное эллиптическое тождество в корректно определённое составное лучевое отображение; от него зависит каждое фокальное сопряжение разделов 3–6.

Точное физическое отображение ветвей было численно проверено на корпусе из 6 996 событий отображения, из которых 6 649 являлись гладкими эллиптическими отражениями. Максимальный остаток положения точки на родительской поверхности составил 1.998×10^{-15}; разность с независимо вычисленным высокоточным корнем при 80-разрядной арифметике — 4.44×10^{-16}; максимальная ошибка зеркального отражения — 4.44×10^{-16}; максимальная ошибка

обратимости прямой — 8.62×10^{-16}. Эти величины являются численными проверками согласованности точного отображения; они не задают нового закона и не заменяют аналитические определения (9)–(12).

2.4 Фокальная видимость и её касательные границы

Прямая, несущая луч и направленная через фокус, не является автоматически физическим событием «родитель–фокус» в составной полости: раньше может быть пересечена конкурирующая ветвь другого родителя или того же родителя. Поэтому закон строго различает два утверждения: (i) линия луча направлена через фокус F и (ii) первое столкновение луча действительно происходит на родительской ветви, которой принадлежит F. Только утверждение (ii) активирует фокальное сопряжение Теоремы 1.

Точная граница между этими двумя классами представляет собой касательную, проведённую из фокуса F к конкурирующему активному эллипсу. В нормированном параметре родителя u условие касания имеет вид

$$A_f\cdot u + B_f\cdot\sqrt{(1-u^2)} = 1, \quad (13)$$

где

$$A_f = (F_x - x_0P)/a,\ B_f = -s\cdot(F_y - sR)/b. \quad (14)$$

Уравнения (13)–(14) задают точную границу фокальной видимости: именно на этой касательной изменяется идентичность родителя первого столкновения, а вместе с ней — физически реализуемое сопряжение.

Численная проверка построила 72 такие касательные и выполнила 452 физически значимых стресс-теста с возмущением. Каждый релевантный тест изменял класс первого столкновения точно при пересечении касательной границы. Это непосредственно подтверждает, что правило первого столкновения является необходимой частью составного лучевого закона: назначение прямой «фокус–фокус» физически корректно только тогда, когда родитель, которому принадлежит фокус, действительно достигается первым.

2.5 Типы псевдоэллипсоидов

Таблица 1. Типы псевдоэллипсоидов

Типы	**Условие**	**Ориентация родительских фокусов**	**Научный статус**
Горизонтальный тип псевдоэллипсоида	0<K<1	осевая, параллельно оси тела	регулярное семейство PEB-2
Псевдоэллипсоид кругового перехода	K=1	каждая родительская пара сливается в своём центре	регулярная переходная граница между двумя K-типами
Вертикальный тип псевдоэллипсоида	K>1	радиальная в каждой меридиональной плоскости	регулярное семейство PEB-2
Горизонтальный трёхфокусный тип псевдоэллипсоида	0<K<1 и h=−f	осевая; F_2 и F_3 совпадают	точный критический подтип горизонтального семейства

Именованные геометрические режимы, используемые в законе: горизонтальный тип псевдоэллипсоида (0<K<1), псевдоэллипсоид кругового перехода (K=1), вертикальный тип

псевдоэллипсоида (K>1) и горизонтальный трёхфокусный подтип, определённый внутри горизонтального семейства условием h=−f.

3. Горизонтальный тип псевдоэллипсоида, 0<K<1

3.1 Точная двумерная конструкция

При 0<K<1 осевая полуось a является большой полуосью каждого родительского эллипса. Определим $c_x=a\sqrt{(1-K^2)}$. В каждой знаковой меридиональной полуплоскости левый и правый родители имеют аксиальные пары фокусов. При соглашении для h из (1) четыре родительские фокальные координаты равны

$$x_F1 = -(a+h)-c_x,\ x_F2 = -(a+h)+c_x, \quad (15)$$

$$x_F3 = +(a+h)-c_x,\ x_F4 = +(a+h)+c_x. \quad (16)$$

Все четыре фокуса имеют один и тот же ненулевой меридиональный радиус R при R>0. Левый родитель сопрягает $F_1 \leftrightarrow F_2$, а правый — $F_3 \leftrightarrow F_4$ при условии, что соответствующий родитель является первым гладким пересечением. Физический отражённый луч может идти к сопряжённому фокусу либо иметь его на обратном продолжении; точным объектом теоремы является сопряжённая прямая.

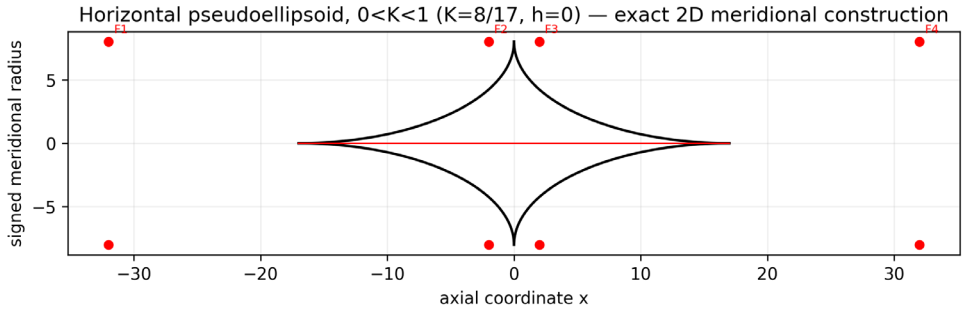

Рисунок 1. Горизонтальный тип псевдоэллипсоида, 0<K<1: точная двумерная меридиональная конструкция. Красная ось вращения намеренно показана тонкой и только в пределах осевой протяжённости псевдоэллипсоида. Показаны все четыре родительские фокальные точки.

3.2 Трёхмерная конструкция и действие закона

Вращение вокруг оси x переводит каждый меридиональный фокус (x_Fi,±R) в одно соосное фокальное кольцо радиуса R в плоскости x=x_Fi. Поэтому регулярный горизонтальный псевдоэллипсоид имеет четыре родительских фокальных кольца. Любая плоскость, проходящая через ось вращения, является инвариантной меридиональной плоскостью для меридионального луча, поскольку нормаль поверхности остаётся в этой плоскости. Следовательно, двумерная теорема о сопряжении прямых точно переносится на любой азимут: $F_1 \leftrightarrow F_2$ на левом родителе и $F_3 \leftrightarrow F_4$ на правом.

Параметр h изменяет относительное осевое положение двух родительских четвертей, но не изменяет локальную эллиптическую теорему. При h>0 родители разделены центральным интервалом ширины 2h; при h<0 они перекрываются и активная огибающая переключается в x=0. Это глобальное изменение может менять видимость родителя и, следовательно, то, какое локальное сопряжение физически реализуется.

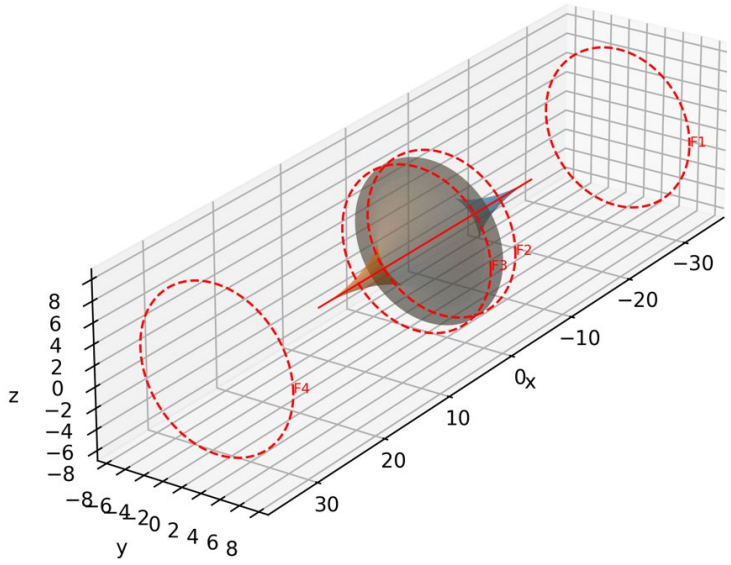

Рисунок 2. Горизонтальный тип псевдоэллипсоида: точная трёхмерная поверхность вращения со всеми четырьмя родительскими фокальными кольцами, показанными красными штриховыми окружностями. Ось вращения тонкая, красная и не выходит за пределы тела псевдоэллипсоида.

3.3 Численная верификация горизонтального типа

Горизонтальное семейство проверялось независимыми расчётами с разрешением ветвей и прямыми родительскими тестами. Набор с разрешением ветвей содержал 3 206/3 206 принятых фокальных событий. Отдельный расчёт подтвердил 24 352/24 352 прямых родительских событий и 5 396/5 396 внутренних событий с согласованием ветви, а меридиональное трёхмерное кольцевое продолжение прошло 29 376/29 376 испытанных событий при случайных азимутах. Эти численные проверки подтверждают реализацию точной локальной теоремы, но не заменяют её аналитического доказательства.

Плотный расчёт по положительным K просканировал регулярное горизонтальное семейство вплоть до K=0.001. При h=0 использовалась сетка Биркгофа 48×48, две независимые траектории по 30 000 отражений для каждого K, 40 коротких масочных лучей по 350 отражений, пары для оценки конечновременной чувствительности и ансамбли плотности траекторий. В пределе малых K средняя длина свободного пробега масштабировалась почти линейно с K, тогда как глобальное заполнение фазового пространства становилось всё медленнее. Это конечновременные динамические свойства составного биллиарда, а не дополнительные точные фокальные законы.

4. Псевдоэллипсоид кругового перехода, K=1

При K=1 обе полуоси равны. Каждый родительский эллипс в меридиональной плоскости становится окружностью, а два его фокуса сливаются в центре родителя. Поэтому четыре родительские фокальные метки попарно сводятся к двум физическим кольцам родительских центров в 3D: $F_1=F_2$ слева и $F_3=F_4$ справа. Луч, направленный из родительского центра, достигает круговой родительской ветви по нормали и отражается обратно вдоль той же меридиональной прямой. Это точное ретроотражение только для данного семейства, направленного из центра, а не для произвольного падения.

Составная граница PEB по-прежнему является кусочной и в общем случае не представляет собой полную окружность или сферу. Поэтому K=1 — это переход фокальной топологии, а не переход полного биллиарда к обычному интегрируемому круговому биллиарду.

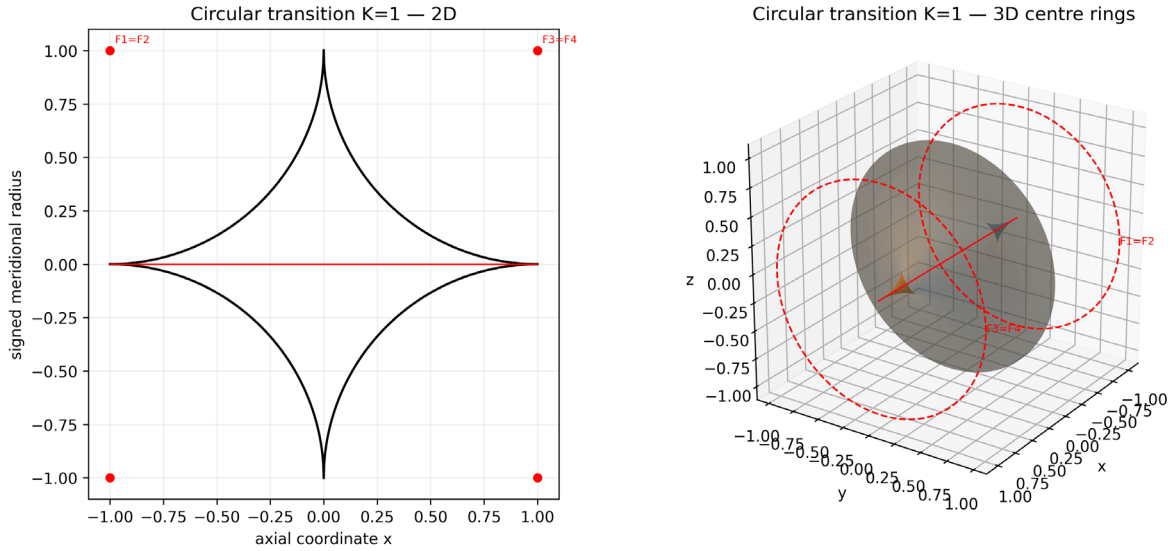

Рисунок 3. Состояние кругового перехода K=1 в 2D и 3D. Каждая родительская пара фокусов совпадает; метки $F_1=F_2$ и $F_3=F_4$ после вращения соответствуют двум физическим кольцам центров.

4.1 Точный локальный закон в точке кругового перехода

При K=1 фокальное полурасстояние точно равно нулю. На каждой гладкой родительской круговой ветви внутренняя или внешняя нормаль совпадает с радиусом, проходящим через центр родителя. Поэтому луч на фокальной прямой, направленной из центра, отражается в ту же неориентированную прямую с обратным направлением. Прямые численные тесты этого семейства воспроизвели точное ретроотражение с точностью вычислений с плавающей точкой.

4.2 Общая многоотражательная динамика внутри составной полости K=1

Глобальная динамика при K=1 качественно отличается от локальной теоремы для лучей из центра. После общего первого отражения луч не обязан проходить через какой-либо из родительских центров. Следующее столкновение выбирается тем же правилом первого пересечения, что и при K≠1, поэтому траектория может менять родителя и знаковую ветвь и исследовать составную четырёхдуговую границу. Таким образом, слияние пары фокусов не превращает полный псевдоэллипсоид в обычный круговой биллиард.

Сопоставленное сравнение фазового пространства использовало одну и ту же сетку Биркгофа 48×48 для составного РЕВ и обычной окружности. Для составного РЕВ использовались две независимые траектории по 30 000 отражений, а также отдельный контрольный прогон обычной окружности на 30 000 отражений. При N=30 000 составной РЕВ с K=1 достиг сырой заполняемости 1.000 и нормированной фазовой энтропии 0.995, тогда как обычная окружность заняла 0.020833 сетки при энтропии 0.500. Следовательно, слияние родительских фокусов при K=1 не делает полный составной биллиард динамически эквивалентным полной окружности.

4.3 Расчёты плотности, сходимости и чувствительности при K=1

K=1 также явно включался в набор расчётов плотности траекторий {0.001, 0.01, 0.10, 0.50, 0.90, 0.9999, 1.0, 1.0001}. Расчёт плотности использовал 24 независимых луча до 220 отражений на луч и три внутренних отсчёта на каждый прослеженный сегмент на нормированной пространственной гистограмме 120×120. Для заполнения фазового пространства фиксировались контрольные точки на 1 000, 3 000, 10 000, 20 000 и 30 000

отражениях и определялись N90/N95/N99 относительно собственной конечной карты каждой траектории. Шесть пар возмущённых состояний распространялись 120 отражений с начальным фазовым возмущением 10^{-9}, формируя конечновременной показатель чувствительности. Эти диагностики характеризуют переходное состояние, но не объявляются инвариантами.

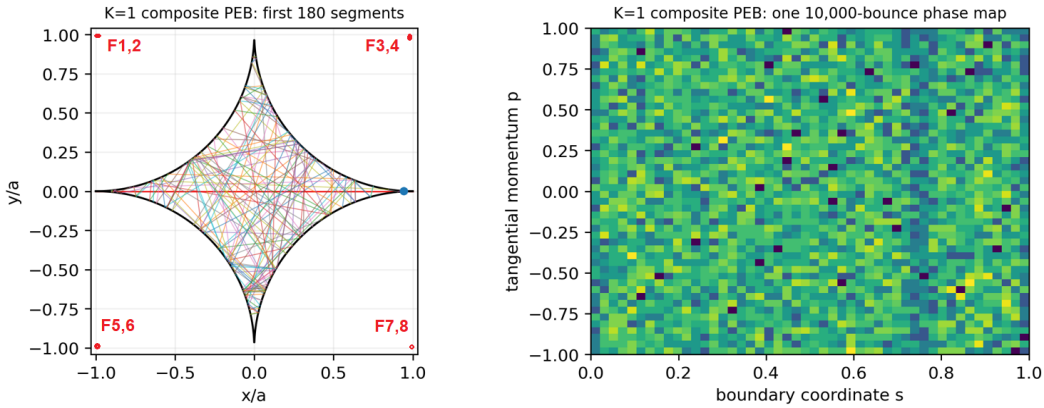

Рисунок 4. Индивидуальное распространение луча и сравнение фазового пространства при K=1. Слева: первые 180 сегментов одной траектории составного PEB. Справа: её карта Биркгофа после 10 000 отражений. Обозначения F5=F6 и F7=F8, видимые в нижней знаковой половине меридиональной плоскости, являются зеркальными представителями тех же двух физических колец родительских центров; после вращения они не образуют дополнительных физических колец.

4.4 Сравнение индивидуальных траекторий и фазовых карт для именованных типов K

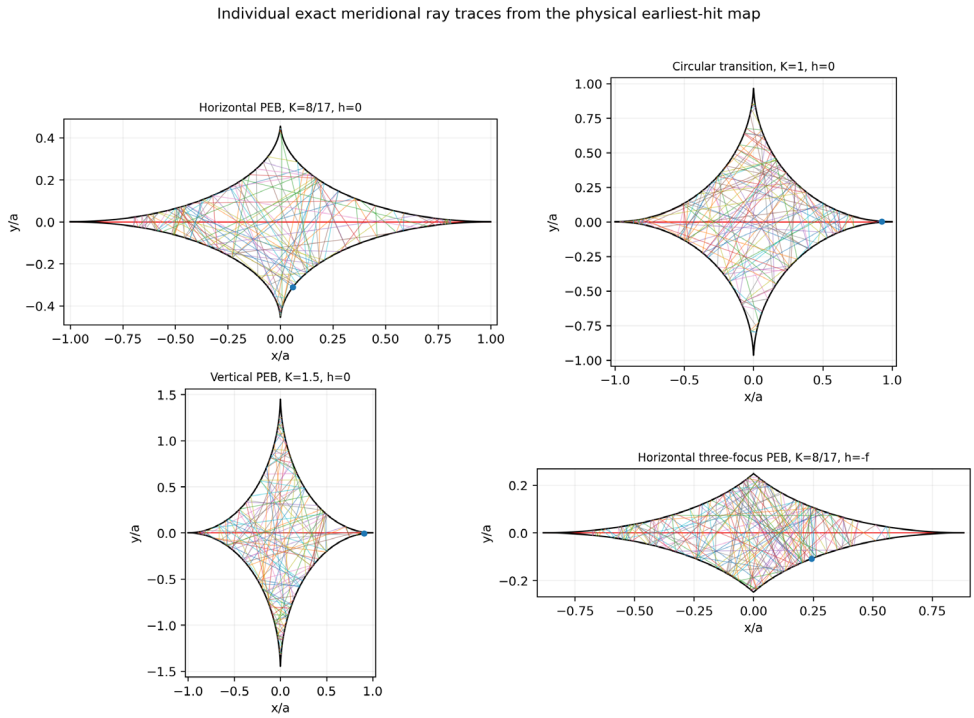

Рисунок 5. Индивидуальные точные меридиональные лучевые траектории для горизонтального типа, кругового перехода K=1, вертикального типа и горизонтального трёхфокусного типа. Все сегменты построены аналитическим отображением пересечение/первое столкновение; тонкая красная ось вращения ограничена телом псевдоэллипсоида.

5. Вертикальный тип псевдоэллипсоида, K>1

5.1 Точная двумерная конструкция

При K>1 поперечная полуось b=aK является большой полуосью каждого родительского эллипса. Определим $c_r=a\sqrt{(K^2-1)}$. Родительские фокусы лежат в радиальном направлении меридиональной плоскости при одной и той же осевой координате x_0P. Центры левого и правого родителей задаются канонической сборкой (2).

$$F_P,\pm = (x_0P, sR) \pm (0,c_r),\ c_r=a\sqrt{(K^2-1)}. \quad (17)$$

На каждом гладком родителе фокальная прямая, проходящая через один радиальный фокус, отражается в прямую через сопряжённый радиальный фокус, опять же с учётом выбора первого пересечения. Параметр h перемещает осевые положения двух родителей, но не изменяет c_r и локальное радиальное расстояние между фокусами.

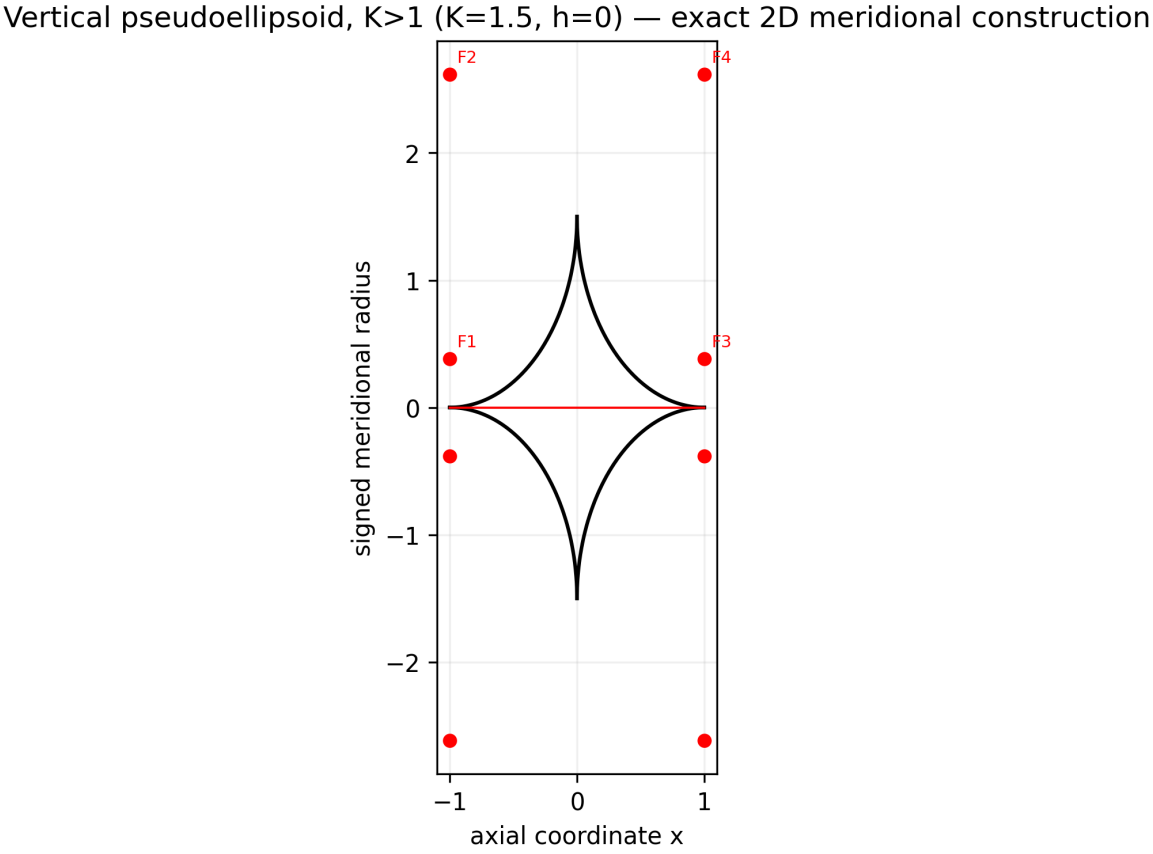

Рисунок 6. Вертикальный тип псевдоэллипсоида, K>1: точная двумерная знаковая меридиональная конструкция со всеми четырьмя родительскими фокальными метками. Тонкая красная ось вращения показана только в пределах тела.

5.2 Точная трёхмерная конструкция и инвариант радиальных фокальных колец

После вращения каждый родитель даёт два соосных кольца в своей осевой координате. Их физические радиусы равны $r_-=|R-c_r|$ и $r_+=R+c_r$. В каноническом семействе $h_a=0$ имеем $R=b=aK>c_r$, поэтому оба знаковых радиуса положительны и

$$r_-/a = K-\sqrt{(K^2-1)},\ r_+/a = K+\sqrt{(K^2-1)}, \quad (18)$$

$$r_-r_+ = a^2. \quad (19)$$

Таким образом, регулярный вертикальный РЕВ в сумме содержит четыре родительских фокальных кольца: внутреннее и внешнее радиальные кольца при $x=x_0L$ и внутреннее и внешнее радиальные кольца при $x=x_0R$. Закон произведения (19) масштабно-инвариантен. При $K=\cosh\mu$ имеем $r_-/a=e^{-\mu}$ и $r_+/a=e^{\mu}$. Если h_a ненулевой, точное знаковое произведение принимает вид $(R-c_r)(R+c_r)=a^2+2bh_a+h_a^2$.

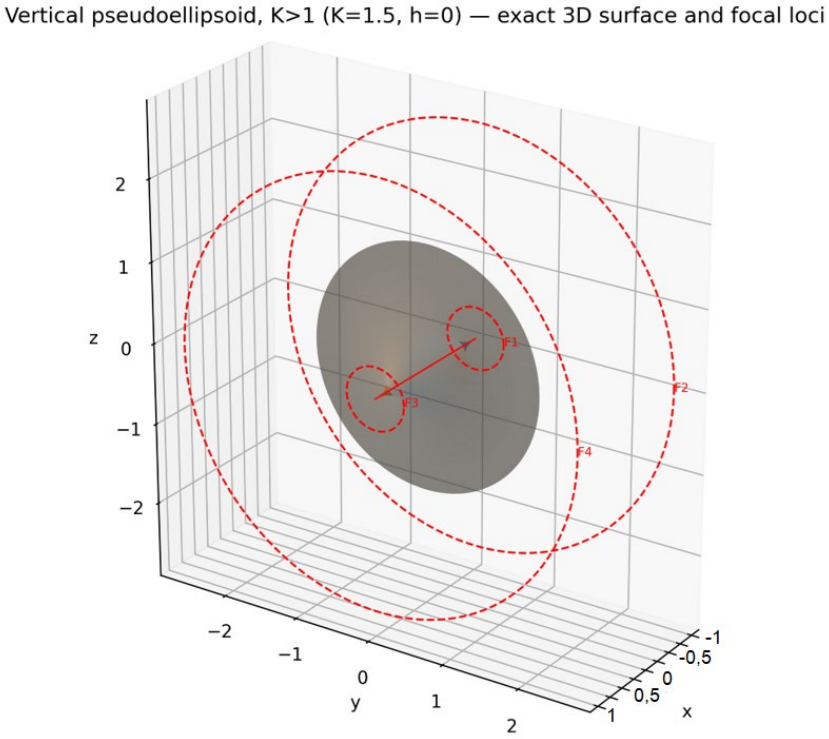

Рисунок 7. Вертикальный тип псевдоэллипсоида: точная трёхмерная поверхность со всеми четырьмя внешними фокальными кольцами. В каждом из двух осевых положений родителя присутствуют два радиуса колец. Пределы графика выбраны по аналитическим фокальным радиусам, поэтому ни одно фокальное кольцо не обрезано.

5.3 K>1, произвольное h_a: коллапс кольца

Для K>1 определим $c_r=a\sqrt{(K^2-1)}$ и $R=b+h_a$. Знаковые фокальные радиусы родителя равны $\rho_-=R-c_r$ и $\rho_+=R+c_r$; физические радиусы колец — $r_-=|R-c_r|$ и $r_+=R+c_r$. Эта вспомогательная топология h_a независима от осевого параметра сборки h.

$$\eta_c(K) = \sqrt{(K^2-1)} - K. \quad (20)$$

При η_c, определённом формулой (20), для $\eta>\eta_c$ оба знаковых фокуса лежат на одной радиальной стороне; при $\eta=\eta_c$ внутреннее кольцо превращается в осевую точку; при $-K<\eta<\eta_c$ знаковый внутренний фокус пересекает ось, и физическое внутреннее кольцо вновь раскрывается на противоположной знаковой стороне. Точное знаковое произведение остаётся равным

$$(R-c_r)(R+c_r) = R^2-c_r^2 = a^2 + 2b\,h_a + h_a^2. \quad (21)$$

При $h_a=0$ уравнение (21) сводится к $r_-r_+=a^2$ — каноническому инварианту K>1. Дополнительные состояния h_a изменяют фокальную топологию, не разрушая локальный закон родительского сопряжения.

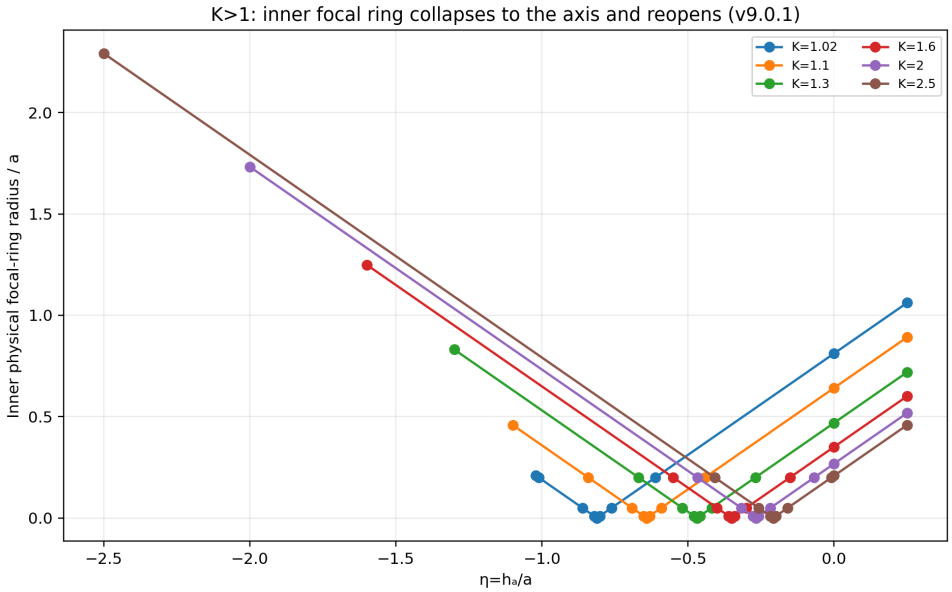

Рисунок 8. Топология коллапса кольца при K>1 и η=h_a/a по v9. Физическое внутреннее фокальное кольцо сжимается в осевую точку при η=η_c, а затем снова раскрывается после перехода знакового внутреннего фокуса через ось. Численная карта поддерживает точное знаковое описание фокусов в формулах (20)–(21).

5.4 Численная верификация вертикального типа

Специализированный канонический расчёт для K>1 включал 39 вертикальных наборов параметров, 3 003 луча и 297 124 прослеженных события в составе более широкого расчёта по K. При h=0 центры родителей подчиняются канонической сборке $x_0L=-a$ и $x_0R=+a$. Максимальная относительная ошибка меридионального фокального попадания составила 1.964×10^{-15}, максимальная относительная ошибка произведения $r_-r_+=a^2$ — 1.574×10^{-15}, а максимальный нормированный остаток осевого углового момента — 2.006×10^{-14}. Эти значения являются численными проверками согласованности аналитических тождеств.

Таблица 2. Численные величины верификации для канонического вертикального псевдоэллипсоида K>1.

Величина	Результат	Научная интерпретация
Всего наборов параметров	73	Все регулярные режимы, определяемые K
Специализированные наборы параметров K>1	39	Каноническое вертикальное семейство
Лучи K>1	3,003	Вертикальное подмножество
События K>1	297,124	Прослеженные 3D-события
Макс. относительная ошибка меридионального фокального попадания K>1	1.964×10^{-15}	Проверка локальной фокальной теоремы с машинной точностью
Макс. относительная ошибка произведения радиальных колец	1.574×10^{-15}	Проверка $r_-r_+=a^2$
Макс. нормированный остаток осевого L	2.006×10^{-14}	Полная 3D-проверка сохранения

Сканирование смещения при K=1.5 в наборе V_H_SCAN характеризует конечновыборочный глобальный транспорт, не изменяя локальную радиальную фокальную теорему. В этом наборе использованы a=17 и K=1.5. Координата скрипта, обозначенная h в численном выводе, задаёт полное взаимное осевое смещение двух родительских четвертей; в обозначениях настоящего закона это h_data=h_1=2h. Поэтому табличные значения −12, −4, −0.5, 0.5 и 4 соответствуют центрированным значениям закона h=−6, −2, −0.25, 0.25 и 2. При положительном h_data численная модель трактует центральный интервал без родительского эллипса как ОТКРЫТУЮ (OPEN) экваториальную апертуру без добавленной замыкающей поверхности BELT или HALFTORUS. Поэтому приведённые доли выхода являются зависимыми от ансамбля диагностиками именно этой OPEN-модели и не используются для определения или доказательства точного фокального закона.

Таблица 3. Представительные данные V_H_SCAN при a=17 и K=1.5. Первый столбец — координата набора h_data=h_1=2h (полное взаимное осевое смещение); при положительных значениях используется открытая центральная экваториальная апертура OPEN. Доли выхода являются конечновыборочными диагностиками и не используются в точной фокальной теореме.

h_data (=h_1=2h)	доля выхода изотропного ансамбля	доля выхода смешанного ансамбля	среднее число событий	испытанное состояние
-12	0.000	0.000	174.13	замкнутое перекрытие
-4	0.000	0.000	174.16	замкнутое перекрытие
-0.5	0.000	0.000	174.13	замкнутое перекрытие
0.5	1.000	0.870	1.73	открытое экваториальное окно
4	1.000	0.870	1.70	открытое экваториальное окно

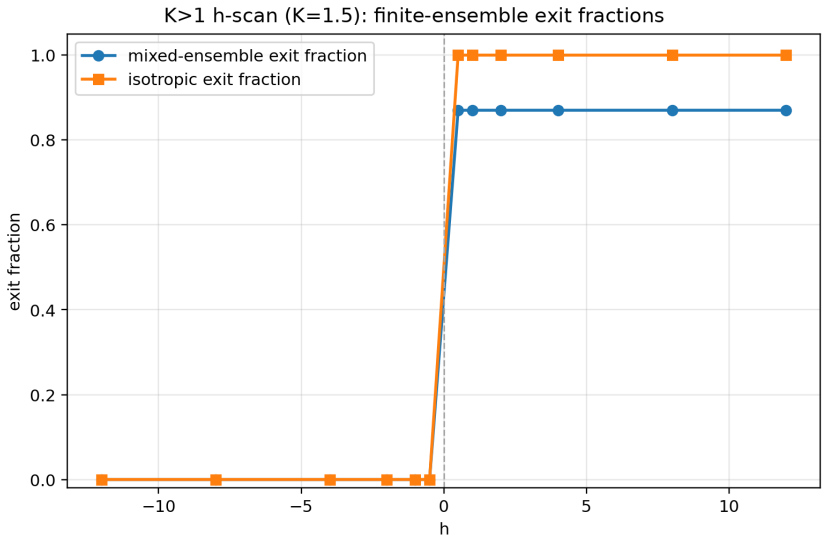

Рисунок 9. Конечные ансамблевые доли выхода из набора V_H_SCAN при K=1.5. Подпись оси h внутри расчётного рисунка обозначает полное взаимное смещение h_data=h_1=2h, а не центрированное полусмещение h из уравнения (1). В расчёте использовано a=17 и открытая центральная экваториальная апертура OPEN при положительном смещении; резкое изменение вблизи нуля является обусловленной ансамблем транспортной диагностикой, а не независимой от замыкания теоремой.

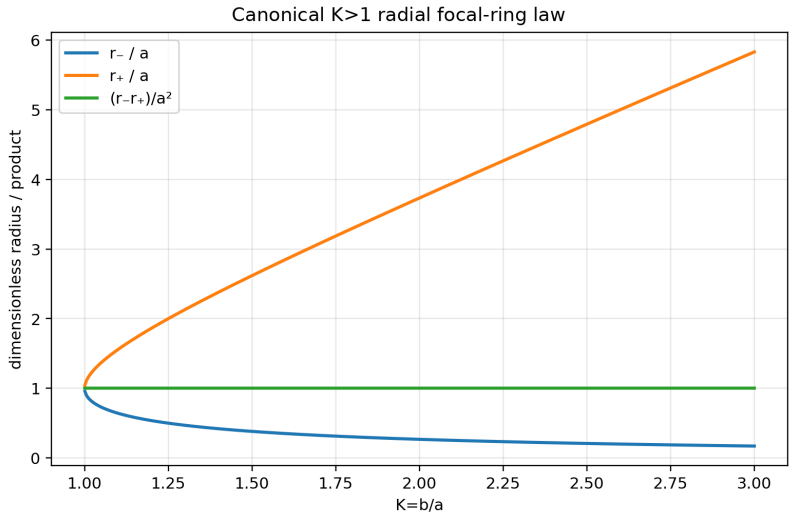

Рисунок 10. Закон радиальных фокальных колец при K>1. Аналитические ветви $r_-/a=K-\sqrt{(K^2-1)}$ и $r_+/a=K+\sqrt{(K^2-1)}$ удовлетворяют точному произведению $r_-r_+=a^2$; численные точки следуют аналитическим кривым.

5.5 Диагностика немеридиональных трёхмерных лучей

Точное сопряжение фокальных колец является меридиональной теоремой, поэтому истинно косые лучи рассматриваются как отдельная численная диагностика. В каноническом аудите v15 при h=0 азимут исходного кольца смещался относительно азимута точки попадания, после чего измерялось расстояние от отражённой 3D-прямой до сопряжённого фокального кольца. Таблица 4 содержит конечновыборочные статистики для семейств K<1 и K>1. Меридиональный предел остаётся точным. При $\Delta\varphi\leq10°$ медианная ошибка показывает приблизительно квадратичное малоугловое масштабирование с показателями 1.996 для K<1, 1.996 для K=1 и 1.995 для K>1. Этот результат относится к проверенным геометриям и не повышается до универсальной теоремы о косых лучах.

Таблица 4. Каноническая при h=0 немеридиональная ошибка попадания в фокальное кольцо в зависимости от азимутального рассогласования по v15. Значения являются конечновыборочными относительными ошибками; универсальная теорема для косых лучей не заявляется.

Δφ, град	K<1 медиана	K>1 медиана	K<1 p95	K>1 p95
2	2.9515×10⁻4	5.5930×10⁻4	5.277×10⁻3	1.257×10⁻3
5	1.8419×10⁻3	3.4904×10⁻3	3.2048×10⁻2	7.833×10⁻3
10	7.3284×10⁻3	1.3873×10⁻2	1.17503×10⁻1	3.0987×10⁻2
20	2.8715×10⁻2	5.3407×10⁻2	3.85674×10⁻1	1.11695×10⁻1
35	7.6684×10⁻2	1.27610×10⁻1	8.32200×10⁻1	2.90949×10⁻1
50	1.33595×10⁻1	2.03394×10⁻1	1.188282	4.44197×10⁻1
70	2.15556×10⁻1	2.69773×10⁻1	1.470141	6.53753×10⁻1

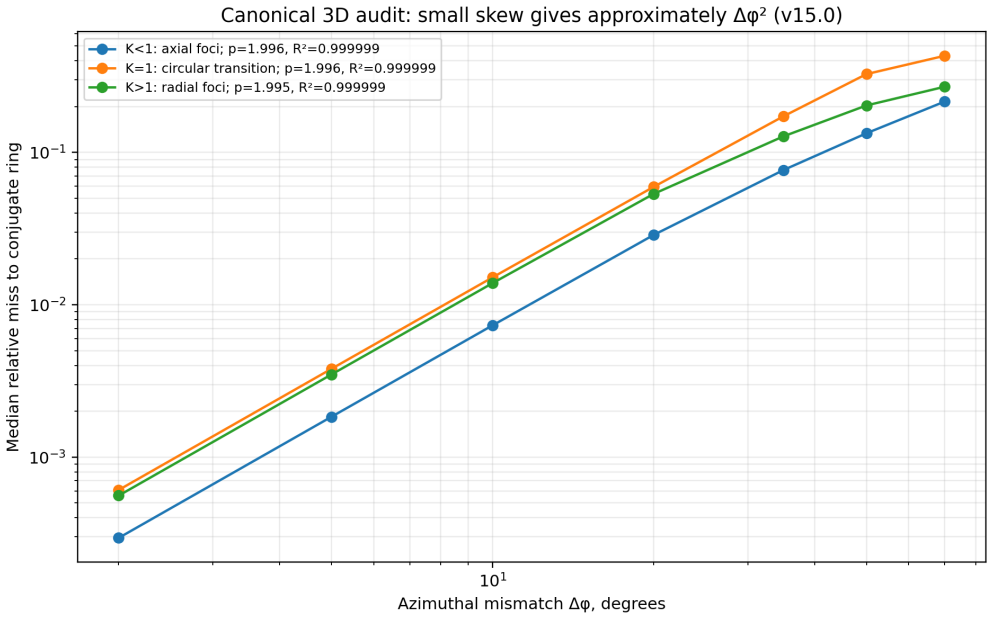

Рисунок 11. Каноническая зависимость немеридиональной ошибки попадания в фокальное кольцо от азимутального рассогласования при h=0 по v15. Меридиональный предел остаётся точным. При Δφ≤10° медианная относительная ошибка подчиняется приблизительно квадратичному закону с показателями 1.996 (K<1), 1.996 (K=1) и 1.995 (K>1). Это численная асимптотическая диагностика, а не универсальная теорема для косых лучей.

6. Горизонтальный трёхфокусный тип псевдоэллипсоида, 0<K<1 и h=−f

6.1 Точное условие слияния

Для горизонтального семейства определим положительный осевой фокальный отступ $f=a-c_x=a[1-\sqrt{(1-K^2)}]$. Две внутренние фокальные координаты из (15)–(16) равны $x_F2=-(h+f)$ и $x_F3=+(h+f)$. Их физическое расстояние задаётся формулой (22). В более ранних конструктивных обозначениях [9] $h_1=2h$, поэтому то же слияние внутренних фокусов записывается как $h_1\text{^}(3f)=2a[\sqrt{(1-K^2)}-1]=-2f$; множитель два связан исключительно с различием между односторонним параметром сборки h_1 и используемым здесь центрированным полусмещением h.

$$\Delta_{23} = x_F3 - x_F2 = 2(a - c_x + h). \quad (22)$$

Внутренние кольца совпадают тогда и только тогда, когда

$$h = h^*(K) = c_x - a = a[\sqrt{(1-K^2)}-1] = -f. \quad (23)$$

При h=−f имеем x_F2=x_F3=0, и четыре родительские метки сводятся к трём физическим кольцам:

$$x_F1=-2c_x,\ x_F23=0,\ x_F4=+2c_x,\ \text{радиус}=R. \quad (24)$$

Именно поэтому состояние называется горизонтальным трёхфокусным типом псевдоэллипсоида. Термин «трёхфокусный» означает три физические кольцевые локации, а не утрату одной родительской фокальной идентичности: центральное кольцо одновременно несёт метки F_2 и F_3.

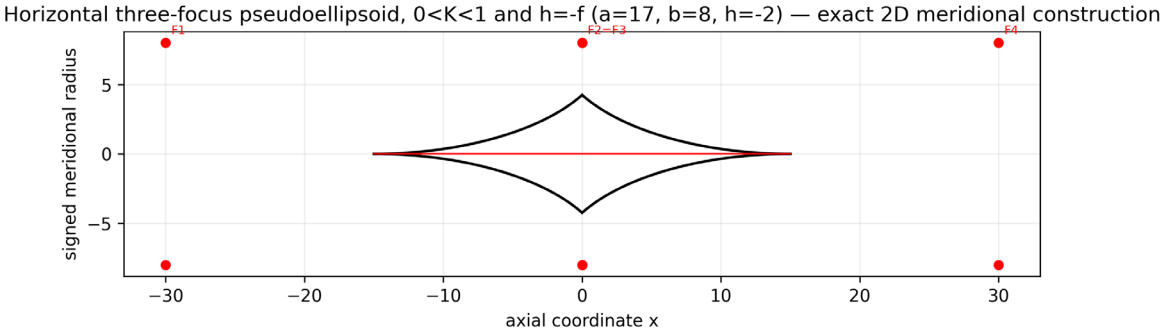

Рисунок 12. Горизонтальный трёхфокусный тип псевдоэллипсоида: точная двумерная конструкция при h=−f. Сохраняются четыре родительские фокальные метки, однако F_2 и F_3 занимают одно и то же физическое положение F_{23}.

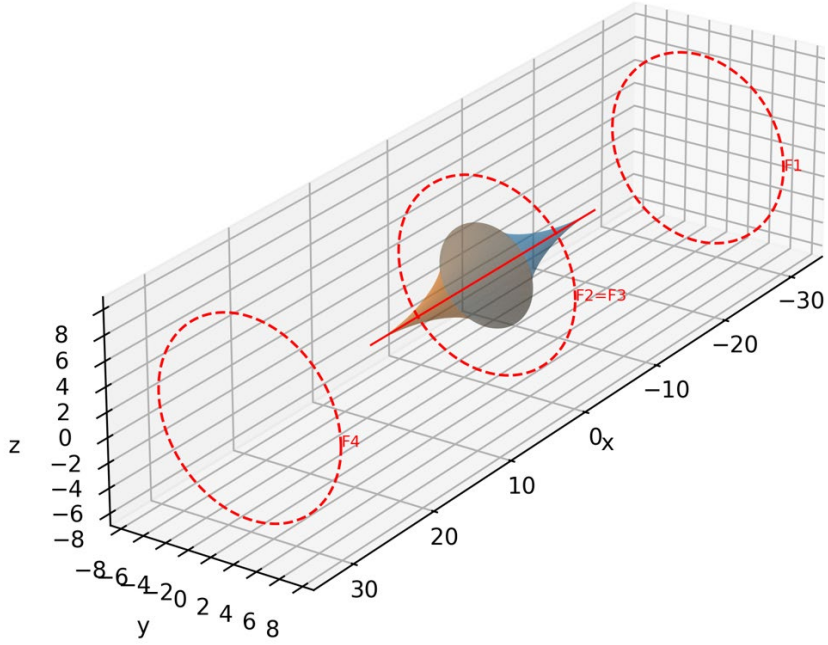

Рисунок 13. Горизонтальный трёхфокусный тип псевдоэллипсоида в 3D. Четыре родительские фокальные метки образуют три физических штриховых кольца, поскольку F_2 и F_3 точно совпадают; поэтому центральное кольцо обозначено F_2=F_3. Ось тонкая и ограничена телом.

6.2 Точная маршрутизация через объединённое кольцо

Объединённое кольцо F_{23} одновременно является внутренним фокусом левого и правого родителей. Если фокальная прямая через F_{23} сначала достигает гладкого левого родителя, отражение сопрягает её с F_1. Если первым достигается гладкий правый родитель, сопряжённой является прямая F_4. Таким образом,

$$\text{левый гладкий родитель: } F_{23} \leftrightarrow F_1;\ \text{правый гладкий родитель: } F_{23} \leftrightarrow F_4. \quad (25)$$

Эта маршрутизация не является независимым эмпирическим правилом. Она точно следует из родительской теоремы вместе с равенством F_2=F_3. Численные тесты маршрутизации полезны, поскольку проверяют реализацию выбора родителя/ветви и различение гладких попаданий и попаданий в шов.

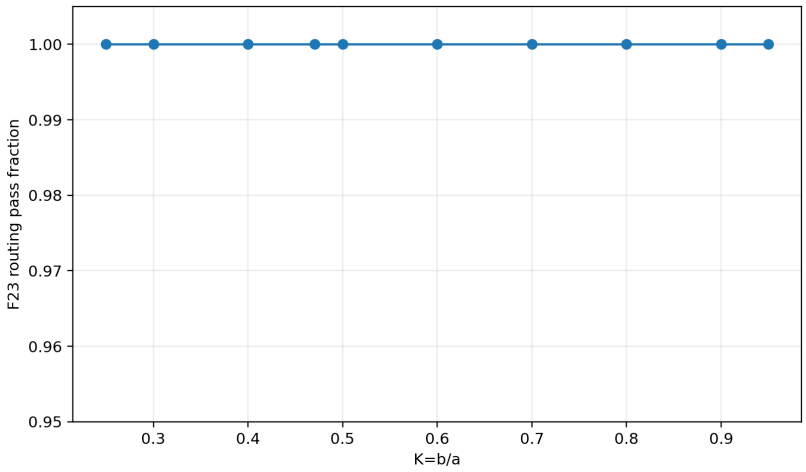

Рисунок 14. Численная проверка маршрутизации вдоль трёхфокусного семейства. Доля успешных физически допустимых событий маршрутизации F_{23} равна единице для всех испытанных значений K.

6.3 Режимы по обе стороны от h=−f

$$h>-f:\ F_2<F_3;\ h=-f:\ F_2=F_3=F_{23};\ h<-f:\ F_3<F_2. \quad (26)$$

Пересечение меняет физическую идентичность и осевой порядок внутренних колец, но не меняет локальное отражательное тождество эллипса. Поэтому критическая точка является переходом фокальной топологии внутри горизонтального семейства, а не сингулярностью гладкой родительской теоремы вдали от центрального шва.

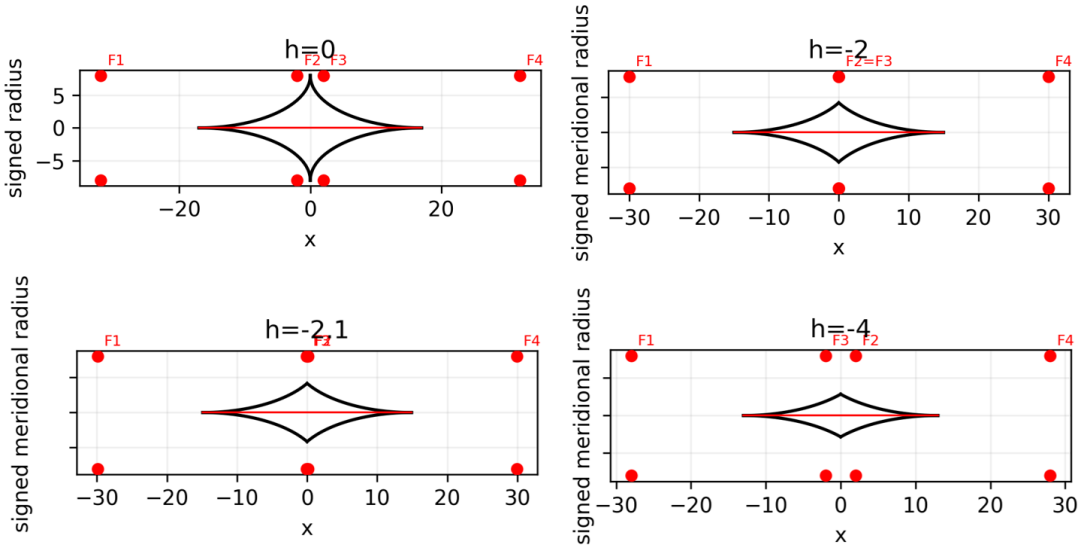

Рисунок 15. Точная последовательность h>−f, h≈−f, h=−f, h<−f для a=17, b=8. Центральная пара сближается, сливается в F_{23} и вновь появляется с обратным порядком.

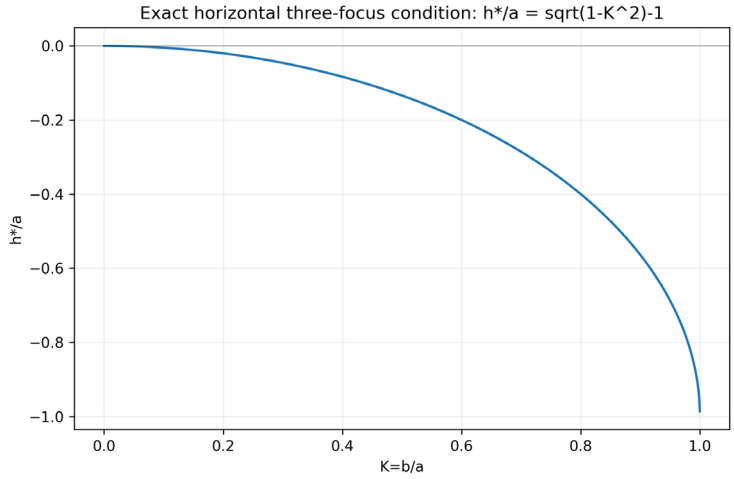

Рисунок 16. Точная трёхфокусная линия $h^*/a=\sqrt{(1-K^2)}-1$ для $0<K<1$ в принятом здесь соглашении для h. При $K\to 0^+$ линия подходит к нулю снизу, а при $K\to 1^-$ — к вырожденной опоре $h/a=-1$.

6.4 Физическое горло и негладкий критический шов

Само совпадение фокусов не гарантирует существования связного горла конечного радиуса: конечное внутреннее горло существует только при положительном радиальном размере. На трёхфокусной линии h=−f радиус центрального горла равен

$r_throat = aK + h_a - aK^2$, $r_throat/a = K + \eta - K^2$, $\eta=h_a/a$. (27)

Следовательно, точная граница горла равна $\eta_crit=K^2-K$. Связное открытое горло имеет $\eta>\eta_crit$; пережатие — $\eta=\eta_crit$; а $-K<\eta<\eta_crit$ задаёт отсечённую/несвязную центральную область. Состояния с $\eta\le -K$ имеют $R\le 0$ и лежат вне обычной интерпретации положительного радиуса.

Численно сетка из 17 820 состояний (K,η) была классифицирована по этому точному критерию, а прямое вычисление d(0) на околограничных состояниях аудита согласовалось с (27) с максимальным расхождением 5.55×10^{-17}. Все 147 физически реализованных гладких околограничных событий маршрутизации прошли проверку; для нескольких значений K выбранный протокол запусков вблизи пережатия не дал допустимого гладкого события, поэтому для этих состояний равномерная выборка не заявляется.

На шве перекрытия положим $m=1+h/a$ и $q=\sqrt{(1-m^2)}$. Модуль одностороннего наклона равен

$|d'(0\pm)| = K\cdot m/q$; on $h = -f$, $m = \sqrt{(1 - K^2)}$, $q = K$, and $|d'(0\pm)| = \sqrt{(1 - K^2)}$. (28)

Две односторонние нормали различны, поэтому идеальное отражение точно в шве не определено однозначно без модели скругления; шов является реальным геометрическим ограничением идеальной негладкой модели, а не численным артефактом.

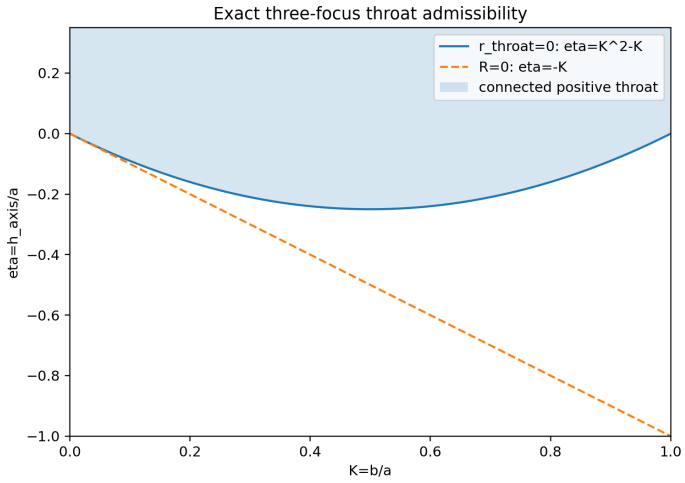

Рисунок 17. Точная карта допустимости горла. Аналитическая граница разделяет состояния открытого горла, пережатия и отсечённой/несвязной области.

6.5 Проверка трёхфокусного режима и атлас индивидуальных лучевых течений

Точное слияние h=−f проверялось тремя независимыми численными уровнями. Было принято 252/252 физически допустимых гладких события F_{23}, 4 160/4 160 независимых событий маршрутизации F_{23} и 800/800 дополнительных трёхфокусных событий для 20 значений K. Эти расчёты проверяют физическую реализацию маршрутизации в широком диапазоне параметров, тогда как само условие h=−f аналитически следует из фокальных координат.

Глобальная динамика на точной линии слияния неоднородна по K. Траектория длиной 12 000 отражений имела сырую фазовую заполняемость 0.115 при K=0.001, увеличившуюся до 0.977 при K=0.05 и примерно до 0.995 в промежуточном диапазоне, после чего снизившуюся до 0.230 при K=0.9999 по мере коллапса осевой опоры. Это замедление у предельных точек относится к глобальной многоотражательной динамике и не изменяет точный закон маршрутизации F_{23}.

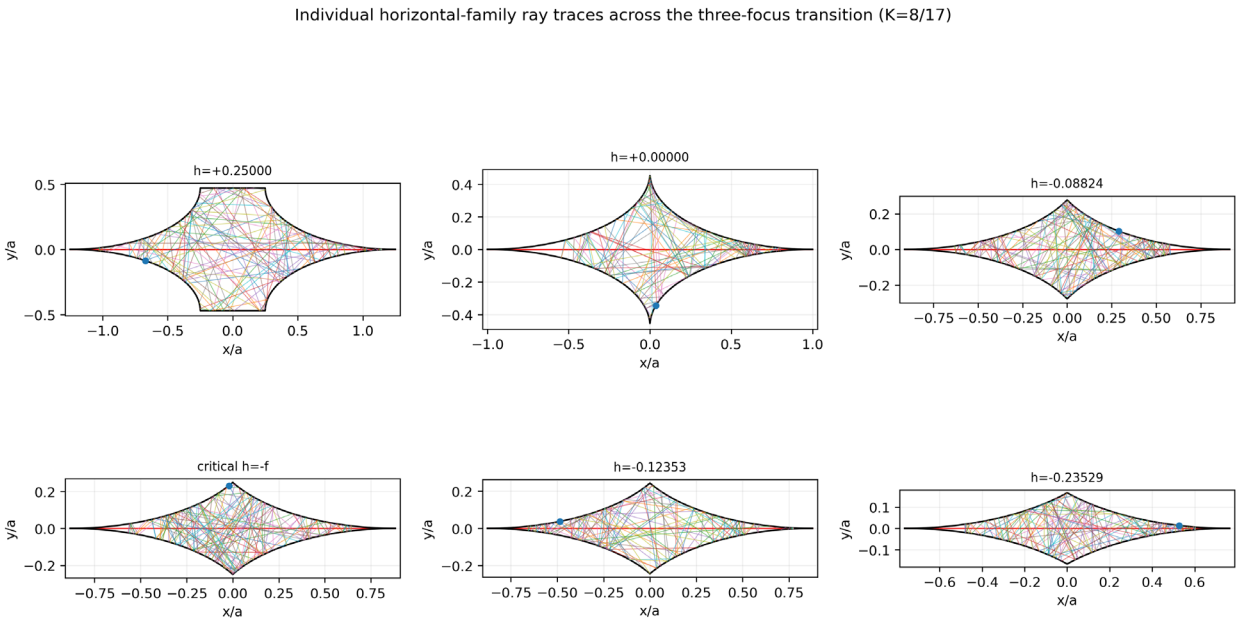

Рисунок 18. Индивидуальные лучевые траектории горизонтального семейства по обе стороны точного трёхфокусного смещения для K=8/17. Критическая панель соответствует

h=−f. Все траектории построены отображением первого пересечения; тонкая красная ось ограничена физической протяжённостью тела.

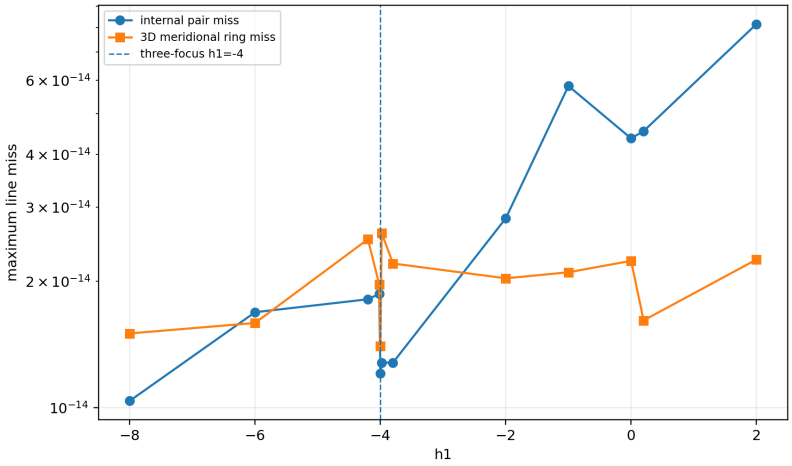

Рисунок 19. Максимальная ошибка фокальной прямой в зависимости от смещения. В точке точного слияния внутренних фокусов численного ухудшения не наблюдается, что подтверждает: h=−f является геометрическим топологическим переходом, а не сингулярным нарушением локального закона отражения. Переменная h1 на горизонтальной оси рисунка — полная координата взаимного смещения четвертей $h_1=2h$. Поэтому при a=17 и b=8 значение $h_1=-4$ соответствует используемому в настоящем законе центрированному значению h=−2=−f.

7. Формальное доказательство единой теоремы родительского фокального сопряжения

Фокальная топология одного родительского эллипса изменяется при K=1. Пусть C_P,s=(x_0P,sR) обозначает его центр в меридиональной плоскости. Тогда родительское фокальное множество имеет вид

$$0<K<1:\ F_P,\pm = C_P,s \pm (c_x,0),\ c_x=a\sqrt{(1-K^2)}. \quad (29)$$

$$K=1:\ F_P,+ = F_P,- = C_P,s. \quad (29)$$

$$K>1:\ F_P,\pm = C_P,s \pm (0,c_r),\ c_r=a\sqrt{(K^2-1)}. \quad (30)$$

7.1 Теорема 1 — обобщённое сопряжение родительских фокальных прямых

В любой гладкой активной точке Q родительского эллипса зеркальное отражение отображает неориентированную прямую QF_P,− в неориентированную прямую QF_P,+ и наоборот. При K=1 два фокуса совпадают, и луч, испущенный из центра родительской окружности, отражается точно обратно вдоль той же меридиональной прямой. При K≠1 физическое направление на сопряжённый фокус может быть прямым либо фокус может лежать на обратном продолжении отражённого луча; точная теорема относится к сопряжению прямых, тогда как ориентация определяется геометрией запуска.

7.2 Доказательство

При K<1 эллипс является множеством уровня S(Q)=|Q−F_-|+|Q−F_+|=2a. Поэтому ∇S нормален к эллипсу и равен сумме двух единичных векторов, направленных от фокусов к Q. Следовательно, нормаль делит пополам угол между фокальными лучами. Оператор зеркального отражения меняет знак нормальной компоненты и сохраняет касательную компоненту, переводя одно фокальное направление в другое. При K>1 применяется то же доказательство после перестановки большой и малой полуосей: постоянная сумма расстояний равна 2b, а фокусы лежат на радиальной большой оси. При K=1 множество уровня является

окружностью; её нормаль — радиус CQ, поэтому падение из C является нормальным, и луч точно ретроотражается. Что и требовалось доказать.

Сама теорема является классическим отражательным тождеством эллипса, применённым локально. Новый псевдоэллипсоидальный закон возникает из способа сборки двух родительских копий и из того, как их фокальные множества идентифицируются, сливаются и вращаются в кольца.

7.3 Негладкие швы и область применимости теоремы

При $h<0$ активный профиль является верхней огибающей двух родительских четвертей. В центрированной точке переключения $x=0$ положим $m=1+h/a$ и $q=\sqrt{(1-m^2)}$. Модуль одностороннего наклона равен $|d'(0\pm)|=Km/q$. На точной трёхфокусной линии $m=\sqrt{(1-K^2)}$, $q=K$, поэтому $|d'|=\sqrt{(1-K^2)}$. Левая и правая односторонние нормали различны, поэтому идеальный закон зеркального отражения точно на шве не определён однозначно. Теорема применяется к гладким активным родительским точкам; физически скруглённый шов требует собственной модели границы.

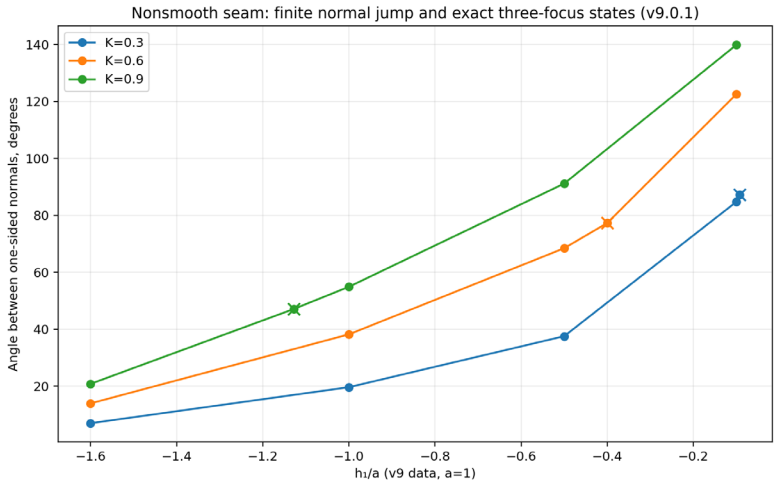

Рисунок 20. Разрыв односторонних нормалей на центральном шве-огибающей в v9. Угол между левой и правой гладкими нормалями остаётся конечным; крестами отмечены точные трёхфокусные состояния. Конечный скачок объясняет, почему точно на шве нельзя назначить единственную гладкую нормаль зеркального отражения.

7.4 Следствие 1 — кольцевое сопряжение при 0<K<1

При $K<1$ все физические фокальные кольца имеют радиус R и осевые координаты

$$x_F1 = -(a+h)-c_x,\ x_F2 = -(a+h)+c_x, \quad (31)$$

$$x_F3 = +(a+h)-c_x,\ x_F4 = +(a+h)+c_x. \quad (32)$$

Левый родитель сопрягает $F_1 \leftrightarrow F_2$, а правый — $F_3 \leftrightarrow F_4$ в каждой меридиональной плоскости. Независимая численная проверка испытала этот кольцевой перенос при случайных азимутах и дала 29 376/29 376 успешных событий с максимальной абсолютной ошибкой $7.63\times10^{-}14$ в использованных размерных масштабах.

7.5 Следствие 2 — совпадающие кольца родительских центров при K=1

При $K=1$ каждый родительский эллипс является окружностью, и два его фокуса сливаются в центре родителя. При вращении меридиональные центры $(x_0L,\pm R)$ и $(x_0R,\pm R)$ порождают по одному кольцу центра родителя для каждого осевого положения; оба кольца имеют радиус R. Локальный закон становится точным меридиональным ретроотражением относительно этого

кольца. Полный составной РЕВ от этого не становится обычным круговым биллиардом: круговыми являются только его родительские дуги.

7.6 Следствие 3 — пара радиальных колец при K>1

При K>1 два меридиональных фокуса каждого родителя лежат в одной осевой координате x_0P и на радиальных расстояниях $R \pm c_r$ от оси. Если $R > c_r$, вращение даёт два положительных соосных радиуса колец

$$r_- = R - a\sqrt{(K^2-1)},\ r_+ = R + a\sqrt{(K^2-1)}. \quad (33)$$

Для канонического семейства $h_a=0$ имеем $R=b=aK$ и поэтому

$$r_-/a = K - \sqrt{(K^2-1)},\ r_+/a = K + \sqrt{(K^2-1)},\ r_-r_+ = a^2. \quad (34)$$

Уравнение (34) является точным геометрическим инвариантом канонического семейства K>1. При записи K=cosh μ получаем r_/a=e^−μ и r+/a=e^μ, поэтому два радиуса колец взаимно обратны в нормированных единицах. При ненулевом радиальном смещении h_a алгебраическое произведение обобщается до $r_-r_+=R^2-c_r^2=a^2+2bh_a+h_a^2$, пока оба знаковых фокальных радиуса остаются на одной радиальной стороне.

Канонический аудит v15 при K>1, h=0 независимо подтверждает это произведение численно: максимальный относительный остаток в $r_-r_+=a^2$ равен $1.574\times10^{-}15$. Это проверка аналитического тождества на уровне точности вычислений, а не его доказательство.

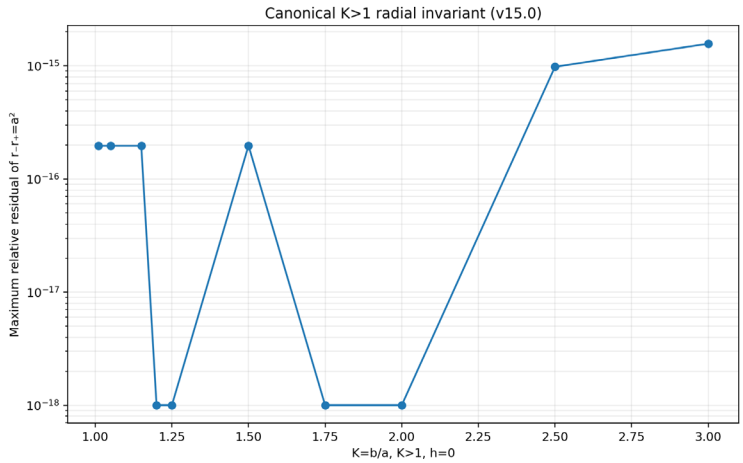

Рисунок 21. Численный остаток канонического радиального инварианта $r_-r_+=a^2$ в аудите v15 при K>1, h=0. Максимальная относительная ошибка равна $1.574\times10^{-}15$, что согласуется с точностью вычислений с плавающей запятой.

7.7 Осесимметричный 3D-инвариант и общая лемма о соосной апертуре

Для идеального луча в любом осесимметричном представителе канонического семейства осевой инвариант углового момента L=(r×v)_x сохраняется при каждом гладком зеркальном отражении:

$$L = y\,v_z - z\,v_y = \rho\,v_\varphi = \text{const}. \quad (35)$$

Нормаль поверхности не имеет азимутальной компоненты, поэтому зеркальное отражение не может изменить L. Для всякого строго меридионального луча $v_\varphi=0$ и, следовательно, L=0. Если явно заданная соосная круговая апертура имеет радиус r_ap, то любая точка её пересечения должна удовлетворять $|L|=\rho|v_\varphi|\le\rho v\le r_{ap} v$. Поэтому $|L|>r_{ap} v$ является достаточным условием невозможности пересечения. Обратное не утверждается: $|L|\le r_{ap} v$ необходимо для доступности, но не гарантирует выход.

Этот точный инвариант логически отличается от фокального сопряжения для косых лучей. В каноническом аудите v15 величина L сохраняется, тогда как ошибка косого фокального попадания при малом азимутальном рассогласовании растёт приблизительно как $(\Delta\varphi)^2$; см. рисунок 11. Следовательно, осевая симметрия даёт точный закон сохранения, не подразумевая точного косого отображения между фокальными кольцами.

8. Формальное доказательство условия трёхфокусного слияния

Составной горизонтальный псевдоэллипсоид содержит два внутренних осевых кольца F_2 и F_3. Их расстояние в принятом здесь соглашении для h равно

$$\Delta_{23} = x_F3 - x_F2 = 2(a - c_x + h). \quad (36)$$

8.1 Теорема 2 — точное трёхфокусное условие

При $0<K<1$ два внутренних кольца физически совпадают тогда и только тогда, когда $h=h^*(K)=c_x-a=a[\sqrt{(1-K^2)}-1]=-f$.

$$h = h^*(K) = c_x - a = a[\sqrt{(1-K^2)}-1] = -f. \quad (37)$$

При этом значении $x_F2=x_F3=0$. Четыре родительские метки сводятся к трём физическим кольцам F_1, F_{23}, F_4 с координатами

$$x_F1 = -2c_x,\ x_F23 = 0,\ x_F4 = +2c_x,\ \text{радиус} = R. \quad (38)$$

8.2 Доказательство

Подстановка (31)–(32) даёт $x_F2=-a-h+c_x$ и $x_F3=a+h-c_x$. Их равенство приводит к $h=c_x-a=-f$, причём обе координаты тогда равны нулю. Внешние координаты следуют непосредственно. Поскольку $0<c_x<a$ при $0<K<1$, критическое h^* строго лежит внутри невырожденного диапазона перекрытия $-a<h^*<0$. Что и требовалось доказать.

Таким образом, в рукописи h непосредственно используется как центрированный симметричный параметр осевой сборки. Более ранний конструктивный параметр равен $h_1=2h$ [9]; следовательно, $h=-f$ здесь и $h_1=-2f$ там — одно и то же геометрическое условие, выраженное в двух координатных соглашениях. Слияние следует исключительно из равенства координат двух внутренних родительских фокусов и не зависит от протокола численной верификации.

8.3 Следствие 4 — левая/правая маршрутизация F_{23}

На точной трёхфокусной линии F_{23} одновременно является внутренним фокусом левого и правого родителей. Поэтому всякая падающая прямая, прямое продолжение которой направлено через F_{23} и которая первой пересекает соответствующую гладкую левую родительскую ветвь, отражается в прямую, сопряжённую с F_1; аналогичное событие на правом родителе сопряжено с F_4. Для внутренних запусков испытанного типа сопряжённое внешнее кольцо лежит на обратном продолжении отражённого луча и поэтому является виртуальным в смысле ориентированного луча.

$$\text{левый гладкий родитель: } F_{23} \leftrightarrow F_1;\ \text{правый гладкий родитель: } F_{23} \leftrightarrow F_4. \quad (39)$$

Эта маршрутизация не является дополнительным эмпирическим правилом, независимым от Теоремы 1; это составное следствие Теоремы 1 и точного тождества $F_2=F_3=F_{23}$. Тем не менее численные испытания полезны, поскольку проверяют выбор родителя/ветви, обработку негладких событий и физическое устранение дублирования объединённого кольца.

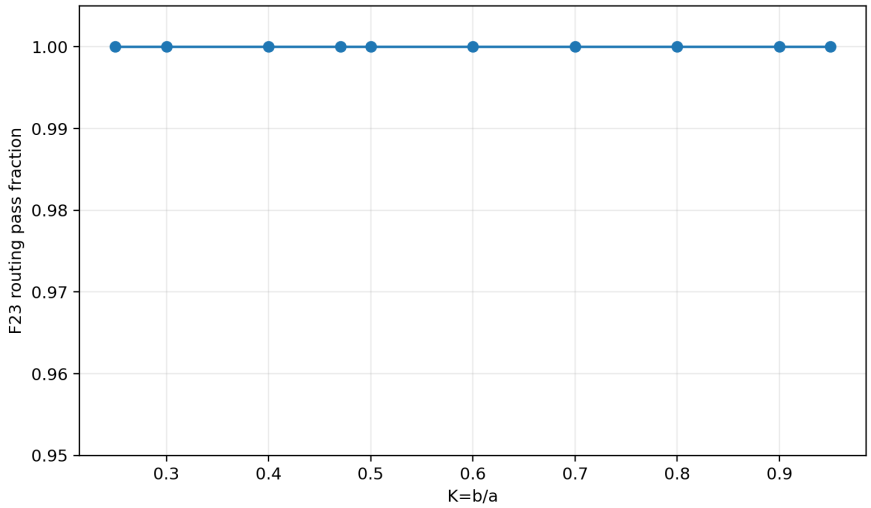

Рисунок 22. Проверка трёхфокусной маршрутизации в зависимости от K. Каждое испытанное физическое событие F_{23} прошло критерий левой/правой маршрутизации.

Более плотное сканирование v8 проверило 20 значений K от 0.001 до 0.9999 на точной трёхфокусной линии по 40 допустимых событий на каждое K. Все 800/800 событий прошли проверку. Максимальный абсолютный промах маршрутизации во всём сканировании составил 1.237×10⁻14 в единицах расчёта; ухудшения при приближении к обоим концам диапазона не обнаружено.

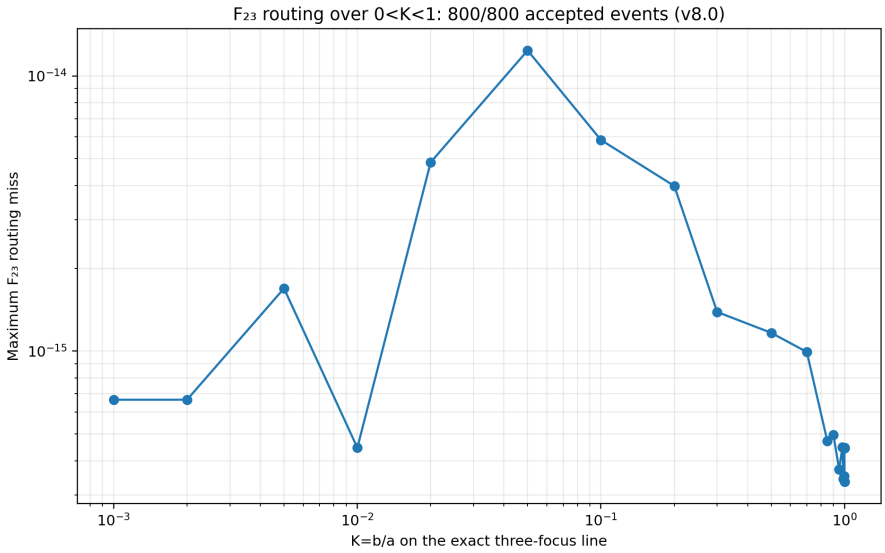

Рисунок 23. Максимальная численная ошибка маршрутизации F_{23} вдоль точной трёхфокусной линии для 20 значений K в v8. Все 800/800 событий прошли критерий маршрутизации; максимальный абсолютный промах составил 1.237×10⁻14 в единицах расчёта.

9. Точная структура h-режимов и независимое радиальное смещение оси

Уравнение (40) даёт точный знаковый классификатор внутренней фокальной топологии. Определим параметр смещения

$$\delta h = h - h^*. \quad (40)$$

Значение $\delta h>0$ даёт $x_{F2}<x_{F3}$; $\delta h=0$ соответствует единственному физическому объединённому кольцу F_{23}; $\delta h<0$ приводит к $x_{F3}<x_{F2}$. Следовательно, осевой порядок внутренних колец изменяется ровно один раз при прохождении h через h*. Хотя локальная

родительская теорема математически неизменна, физическая идентичность и пространственный порядок внутренних фокусов претерпевают топологическую перестановку.

Независимый параметр h_a изменяет базовый радиальный уровень образующей согласно $R=b+h_a$, не меняя собственных полуосей (a,b) родительских эллипсов. Поэтому локальная теорема родительского сопряжения остаётся неизменной на всех сохраняемых гладких эллиптических участках границы. Однако изменение h_a может менять физическую область посредством отсечения, осевого вырождения, открытия концов и радиуса трёхфокусного горла $r_throat=aK+h_a-aK^2$. Такие глобальные транспортные последствия являются численными и зависят от модели замыкания; они не входят в локальную фокальную теорему.

$$r_throat = aK + h_a - aK^2. \quad (41)$$

При $h>0$ две родительские четверти разделены центральным интервалом ширины $2h$ (эквивалентно $|x|<h$), в котором нет активного эллиптического родителя; поэтому физический статус этой области должен быть задан явно как отверстие или посредством выбранной модели замыкания. При одинаковых начальных состояниях сравнивались три интерпретации: BELT (заполненное экваториальное замыкание), HALFTORUS (замыкание полутором) и OPEN (свободная апертура). До первого контакта с элементом замыкания максимальное сохранённое различие траекторий между моделями было нулевым, поэтому до взаимодействия с замыканием локальный гладко-родительский фокальный закон неразличим во всех трёх интерпретациях. После первого контакта с замыканием конечновременная терминальная классификация различалась для 529 из 576 лучей между BELT и OPEN и для 155 из 576 лучей между BELT и HALFTORUS.

Следовательно, локальный фокальный закон на гладкой родительской поверхности не зависит от модели замыкания до первого контакта с ней, тогда как конечновременный глобальный биллиардный транспорт существенно зависит от выбранного замыкания. Эти глобальные транспортные последствия являются численными и зависят от модели замыкания; они не входят в локальную фокальную теорему.

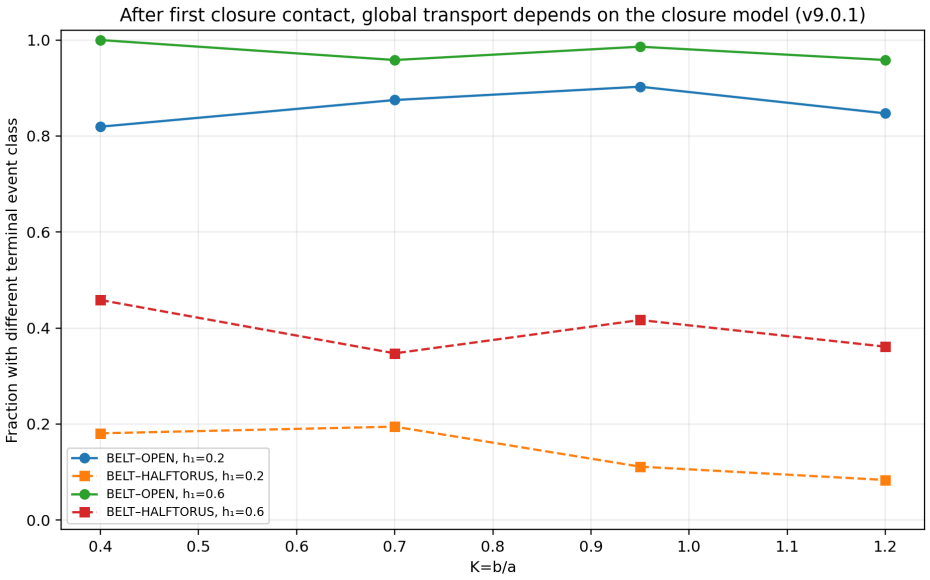

Рисунок 24. Зависимость от модели замыкания в v9 для одинаковых начальных состояний. До первого контакта с замыканием сохранённое различие траекторий равно нулю; после контакта конечновременная классификация терминальных событий существенно зависит от выбора BELT, HALFTORUS или OPEN.

10. Предельные и топологические законы по K

10.1 Тонкий горизонтальный предел $K \to 0^+$

При $h_a=0$ имеем $b=R=aK$. При $K \to 0^+$ радиальный размер стремится к нулю, а регулярная полость становится сколь угодно тонкой; предельная точка лежит вне регулярной области зеркального биллиарда. Разложение $c_x/a=\sqrt{(1-K^2)}$ даёт $c_x/a=1-K^2/2+O(K^4)$, поэтому расстояние между внутренними фокусами при $h=0$ масштабируется как $aK^2+O(K^4)$. Это сингулярная асимптотика тонкого семейства, а не дополнительный регулярный тип псевдоэллипсоида.

$$c_x/a = 1-K^2/2-K^4/8+O(K^6). \quad (42)$$

При $h=0$ зазор между внутренними кольцами и точное трёхфокусное смещение удовлетворяют

$$\Delta_{23}/a = 2[1-\sqrt{(1-K^2)}] = K^2 + K^4/4 + O(K^6), \quad (43)$$

$$h^*/a = \sqrt{(1-K^2)}-1 = -K^2/2 - K^4/8 + O(K^6). \quad (44)$$

Независимая регрессия в предельной области дала показатель малых K для зазора 2.000409 при $R^2=0.999999965$, независимо восстанавливая точный квадратичный асимптотический закон.

10.2 Корневой коллапс при $K \to 1^-$

$$c_x/a = \sqrt{(1-K^2)} \sim \sqrt{[2(1-K)]}. \quad (45)$$

Соответствующая логарифмическая регрессия дала показатель 0.497075 при $R^2=0.9999768$. На трёхфокусной линии полуразнесение центров родительских эллипсов равно c_x и поэтому коллапсирует с тем же показателем 1/2. Трёхфокусное семейство приближается к вырожденной опоре $h=-a$ и физически невырождено только при $0<K<1$.

10.3 Корневое радиальное раскрытие при $K \to 1^+$

$$c_r/a = \sqrt{(K^2-1)} \sim \sqrt{[2(K-1)]}. \quad (46)$$

Полученный показатель равен 0.502808 при $R^2=0.9999798$. Таким образом, K=1 является точкой перехода фокальной топологии: при $K<1$ родительская пара сближается вдоль осевого направления, при $K=1$ сливается, а при $K>1$ вновь раскрывается в радиальном направлении.

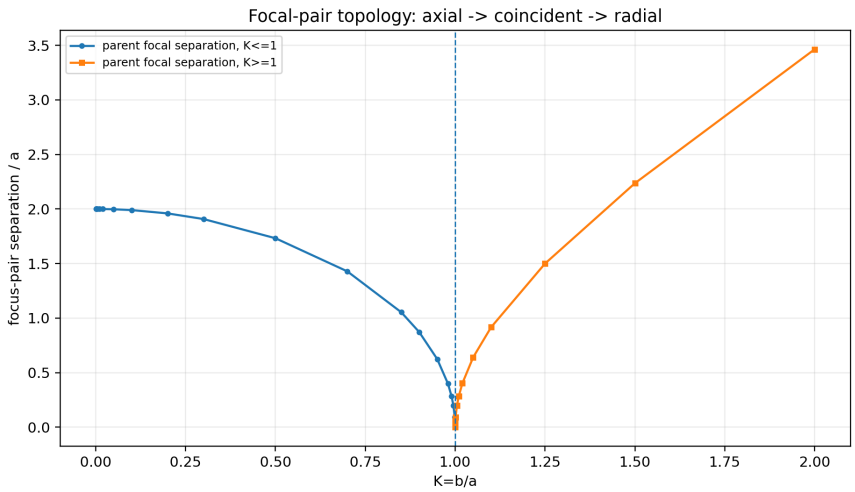

Рисунок 25. Топология фокальной пары при изменении K. Точное расстояние пары стремится к нулю при K=1 с обеих сторон, но ориентация изменяется с осевой на радиальную.

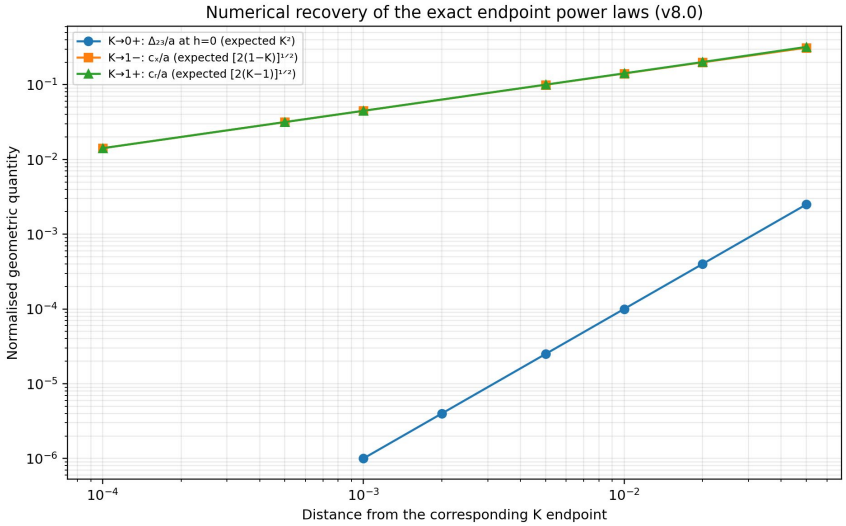

Рисунок 26. Три предельные регрессии v8: квадратичное закрытие внутреннего зазора при $K \to 0^+$ (показатель 2.000409), квадратнокорневой коллапс c_x при $K \to 1^-$ (0.497075) и квадратнокорневое радиальное раскрытие c_r при $K \to 1^+$ (0.502808). Асимптотики выводятся аналитически; регрессии являются численной проверкой.

11. Следствия подобия и смещения оси

11.1 Масштабная инвариантность подобия

Все размерные величины длины, входящие в предшествующие уравнения основного текста (1)–(46), масштабируются линейно при геометрическом подобии. При преобразовании подобия $(a,b,h,h_a) \to \lambda(a,b,h,h_a)$ фокальные координаты и ошибки попадания масштабируются с λ, тогда как все безразмерные законы остаются неизменными. Масштабный тест использовал λ-эквивалентные критические геометрии с a=0.5, 1, 3, 10, 17 и 50. Все прямые, внутренние, F_{23}- и меридионально-3D события прошли проверку. Этот численный масштабный тест согласуется с точной симметрией подобия аналитического закона.

11.2 Независимость локального сопряжения от h_a

Изменение h_a переносит центры родителей в радиальном направлении через $R=b+h_a$, но не меняет собственные полуоси эллипса или фокальное полуразнесение. Поэтому Теорема 1 неизменна на любом сохраняемом гладком родительском сегменте. Глобальная динамика при этом меняется: отсечение или раскрытие изменяют достижимость сегментов и возможность выхода лучей. В независимом сканировании h_a при K=0.6 и h=0 случаи с открытыми концами h_a=0.1, 0.3 и 0.6 дали долю выхода 1.0 для всех 530 лучей при среднем числе отражений до выхода 12.04, 3.80 и 2.29 соответственно. Это инженерное следствие независимого параметра уровня оси, а не модификация фокальной теоремы.

11.3 Диагностика немеридиональных 3D-лучей

Истинно косые 3D-лучи прослеживались в канонической геометрии v15. Значения в таблице 5 являются конечновыборочными ошибками от отражённой прямой до соответствующего фокального кольца и не представляют точный закон косых лучей. Точный меридиональный предел восстанавливается, тогда как при немеридиональном распространении возникает конечная геометрически зависимая ошибка. В K-сканировании v15 медианная ошибка при малых углах масштабируется приблизительно квадратично по $\Delta\varphi$, как показано на рисунке 11; универсальность этой численной асимптотики вне испытанного семейства не заявляется.

Таблица 5. Диагностика немеридиональных трёхмерных лучей

K	Тип	макс. относит. меридиональная ошибка	медиана ошибки косых лучей	p95 ошибки косых лучей
0.20	горизонтальный	1.22e−15	0.00919	0.63589
8/17≈0.470588	горизонтальный	8.11e−16	0.02334	1.09892
0.80	горизонтальный	5.63e−16	0.03914	0.90142
1.00	круговой переход	2.34e−16	0.05760	0.58965
1.01	вертикальный	4.88e−16	0.05293	0.54318
1.15	вертикальный	3.66e−16	0.04715	0.46738
1.50	вертикальный	6.97e−16	0.04011	0.35517
2.00	вертикальный	1.27e−15	0.03247	0.36300
3.00	вертикальный	1.41e−15	0.02075	0.33043

12. Численная верификация и матрица «утверждение — доказательство»

Основные утверждения явно классифицированы, чтобы теоремные высказывания нельзя было смешивать с наблюдениями конечной выборки.

Таблица 6. Численная верификация и матрица «утверждение — доказательство»

Утверждение	Статус	Основание / область применимости
Сопряжение родительских фокальных прямых	Точная теорема	Классическое тождество эллипса; гладкая активная родительская точка
Горизонтальная / K=1 / вертикальная фокальная топология	Точный аналитический результат	K=b/a при канонической сборке
Горизонтальное трёхфокусное условие h=−f	Точный аналитический результат	$0<K<1$; $F_2=F_3$ при x=0
Левая/правая трёхфокусная маршрутизация	Точное следствие	Гладкое событие первого пересечения с родителем
Произведение вертикальных колец $r_- r_+ = a^2$	Точный аналитический инвариант	$K>1$, $h_a=0$
Меридиональный 3D-перенос на кольца	Точное следствие симметрии	Любая меридиональная плоскость; L=0
Осевой угловой момент L	Точный инвариант	Любое гладкое зеркальное попадание на осесимметричную стенку
Ошибка косого попадания в фокальное кольцо	Только численно	Каноническая 3D-геометрия; универсальной аналитической теоремы для косых лучей нет

Заполняемость фазового пространства, периодические кандидаты, чередование ветвей	Численные результаты конечного корпуса	Не входит в точную фокальную теорему

Численная верификация использует независимые семейства запусков, по-ветвевые фокальные тесты, тесты трёхфокусной маршрутизации, трёхмерные меридиональные переносы, длинные многоотражательные траектории, физические отображения первого пересечения, тесты видимости, горла и полные 3D-проверки законов сохранения. Таблица ниже приводит количественные проверки, не подменяя аналитическое доказательство численным совпадением.

Таблица 7. Количества событий численной верификации.

Блок верификации	**События**	**Пройдено**	**Максимальная указанная ошибка**
Фокальные события с разрешением ветвей	3,206	3,206	7.42×10^{-14} абсолютная макс. ошибка
Физическая гладкая маршрутизация F_{23}	252	252	1.91×10^{-14} абсолютная макс. ошибка
Прямые родительские события	24,352	24,352	6.57×10^{-14} абсолютная макс. ошибка
Внутренние события с согласованной ветвью	5,396	5,396	8.16×10^{-14} абсолютная макс. ошибка
Трёхфокусные события F_{23}	4,160	4,160	5.17×10^{-14} абсолютная макс. ошибка
Меридиональные события 3D-переноса на кольца	29,376	29,376	7.63×10^{-14} абсолютная макс. ошибка
Обобщённые фокальные события K	8,820	8,820	3.64×10^{-15} макс. относительная ошибка
Трёхфокусные события предельных областей	800	800	1.24×10^{-14} абсолютная макс. ошибка
Точное гладкое отображение первого пересечения	6,649	6,649	1.998×10^{-15} макс. остаток на поверхности
Переключение по касательной видимости	452	452	100% переключение физического класса
Радиальное фокальное сопряжение K>1	2,888	2,888	2.293×10^{-15} максимальная относительная ошибка

Независимый корпус v7.1 позволяет оценить не только наихудший случай, но и полное распределение численного остатка. После нормировки на характерный масштаб a медианные ошибки фокальной линии равны 1.78×10^{-16} для событий прямого родителя (direct-parent), 1.75×10^{-16} для внутренних событий, согласованных по ветви (internal branch-matched), 2.96×10^{-16} для маршрутизации F_{23} и 2.09×10^{-16} для меридионального 3D-подъёма к кольцам; значения p95 остаются в диапазоне 10^{-16}–10^{-15}. Распределения согласуются с округлением двойной точности и усиливают численную верификацию точных тождеств, не заменяя аналитического доказательства.

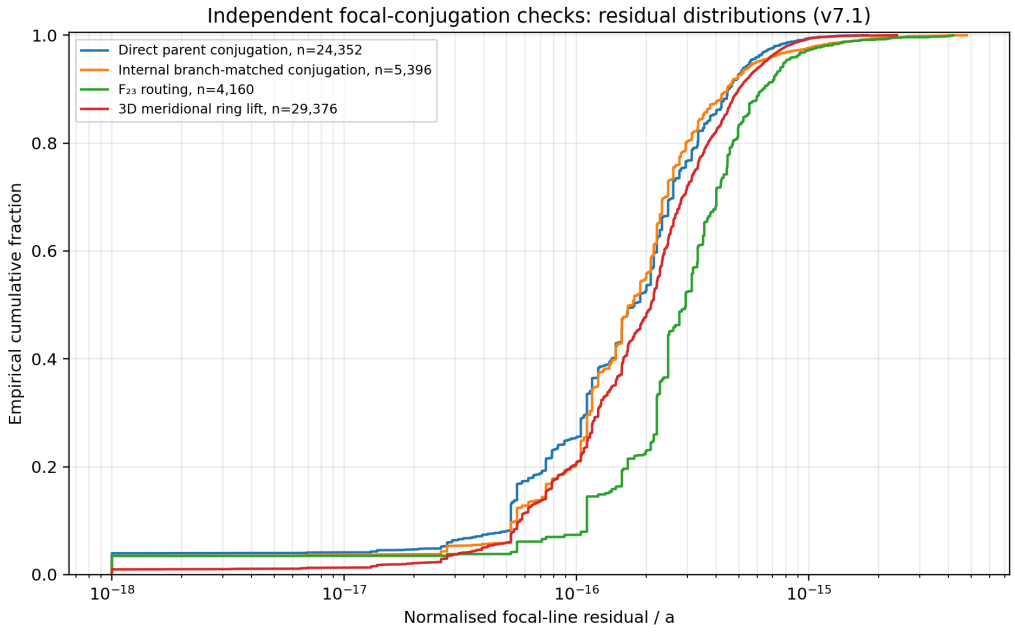

Рисунок 27. Эмпирические функции распределения нормированных ошибок фокальной линии в независимом расчёте v7.1: прямое родительское сопряжение, внутреннее сопряжение, согласованное по ветви (branch-matched), маршрутизация F_{23} и меридиональный 3D-подъём к кольцам. Медианные остатки имеют порядок 10^{-16}, а показанные хвосты остаются на уровне точности вычислений с плавающей точкой. Это верификация, но не доказательство аналитической теоремы.

13. Локальность фокального закона и отсутствие обнаруженных поздних строгих фокальных возвратов

Точный закон является законом сопряжения прямых при одном столкновении. Из него не следует, что общий луч после последующих отражений остаётся на дискретной последовательности фокальных колец. В специализированном расчёте поздних возвратов 3 456 специально подготовленных лучей были продолжены в общей сложности на 829 440 отражений после первого столкновения и дали ноль строгих фокальных событий при номере отражения >1. Поэтому научно корректная формулировка такова: точное фокальное сопряжение гарантировано при гладком родительском отражении, когда входящая прямая фокально сопряжена; последующая общая динамика определяется полным составным биллиардом и не обязана оставаться фокальной.

14. Вторичные структуры лучевой динамики

14.1 Чередование ветвей одного родителя: кандидат на численный закон

Два независимых вычислительных блока дали суммарно 2 834 312 последовательных пары столкновений с одним и тем же родителем и ни одного нарушения чередования верхней/нижней ветви. Один блок дал 2 550 823 пары, независимый блок v7 добавил ещё 283 489. Несмотря на нулевое число нарушений в конечном корпусе, утверждение сохраняет статус численного кандидата в лемму, поскольку полного аналитического доказательства для всех допустимых состояний пока нет.

14.2 Замкнутые классы периодических лучей

Помимо одноотражательного закона фокального сопряжения, составной псевдоэллипсоид поддерживает численно замкнутые многоотражательные траектории. Примитивный класс P_n определяется возвратом как положения на границе, так и выходящего направления после n

отражений, при этом ни один меньший делитель n не удовлетворяет тому же условию замыкания. Целевой поиск по состояниям границы проверил требуемые периоды 2, 4, 6, 8, 10 и 12 и сохранил 192 принятые численные записи замыкания. Принятые примитивные замыкания найдены для P4, P6, P8, P10 и P12. Эти периодические классы являются вторичными структурами полного биллиардного отображения: они не требуются фокальной теоремой и не заявляются как полная классификация периодических орбит.

Для примитивной орбиты P_n идеальное условие замыкания имеет вид r_n=r_0 и d_n=d_0, тогда как для каждого собственного делителя m<n нарушается хотя бы одно из этих равенств. Представленные ниже замыкания имеют остатки по положению и направлению на много порядков меньше численных порогов принятия. Представители в таблице 8 — те же принятые состояния, которые показаны на рисунках 29–33. Их наличие демонстрирует возможность возврата луча в исходное состояние с численной точностью после конечного, зависящего от класса числа переотражений.

P_n: $r_n = r_0$, $d_n = d_0$, и ни один собственный делитель m<n не замыкает одновременно обе переменные состояния. (47)

Таблица 8. Представительные примитивные численные периодические классы.

Класс	Представительное h	Примитивных отражений	замыкание |Δr|	замыкание |Δd|
P4	−2.1	4	1.99×10⁻15	1.67×10⁻16
P6	−3.0	6	9.70×10⁻15	2.12×10⁻15
P8	−3.0	8	1.11×10⁻15	2.48×10⁻16
P10	−1.99	10	9.41×10⁻15	1.88×10⁻15
P12	−2.1	12	1.82×10⁻15	1.20×10⁻15

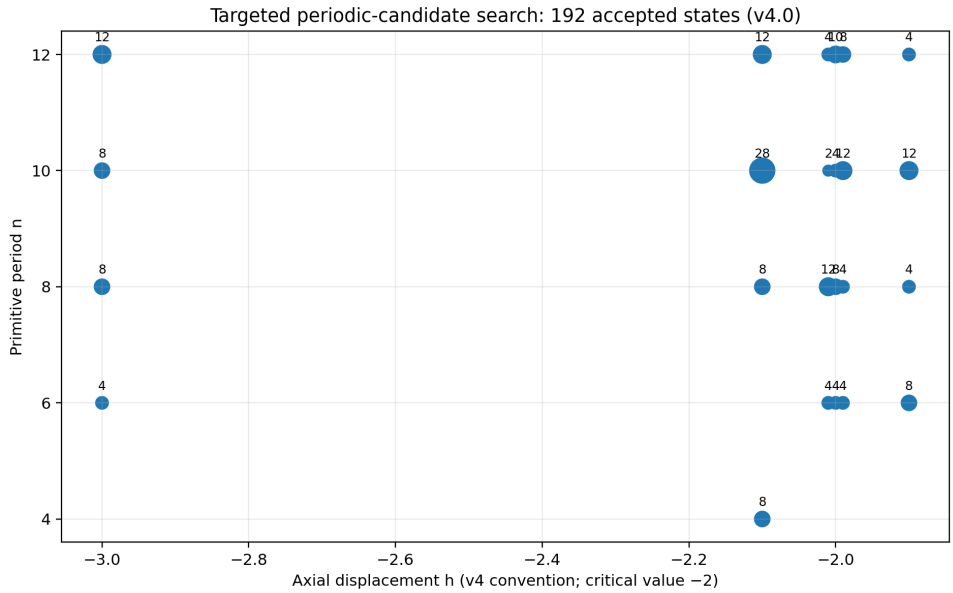

Рисунок 28. Принятые целевые периодические кандидаты v4 в зависимости от смещения и примитивного периода. Найдены кандидаты P4, P6, P8, P10 и P12; принятого кандидата P2 не найдено. График является конечной диагностикой целевого поиска корней и не доказывает полноту периодического спектра.

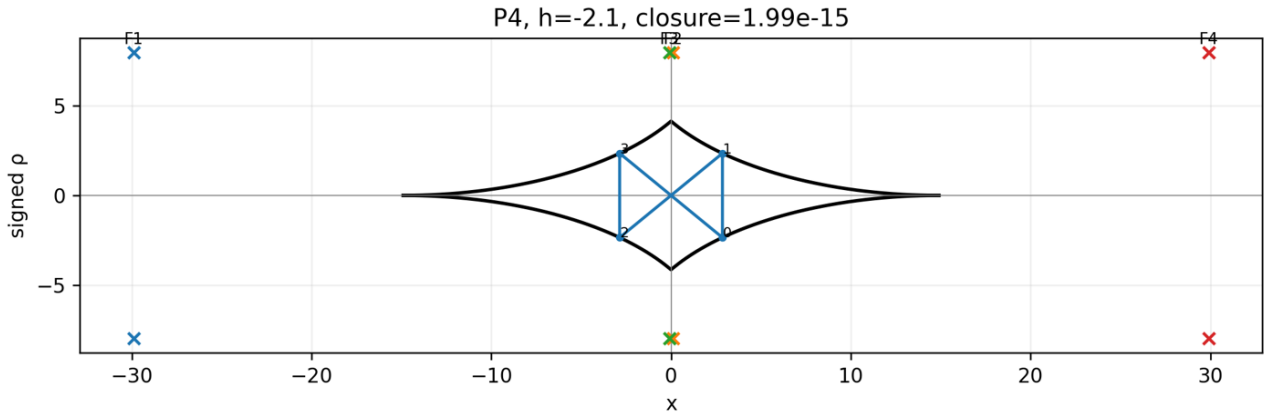

Рисунок 29. Представительная принятая периодическая орбита P4, восстановленная из принятого граничного состояния теми же точными аналитическими уравнениями пересечения/отражения.

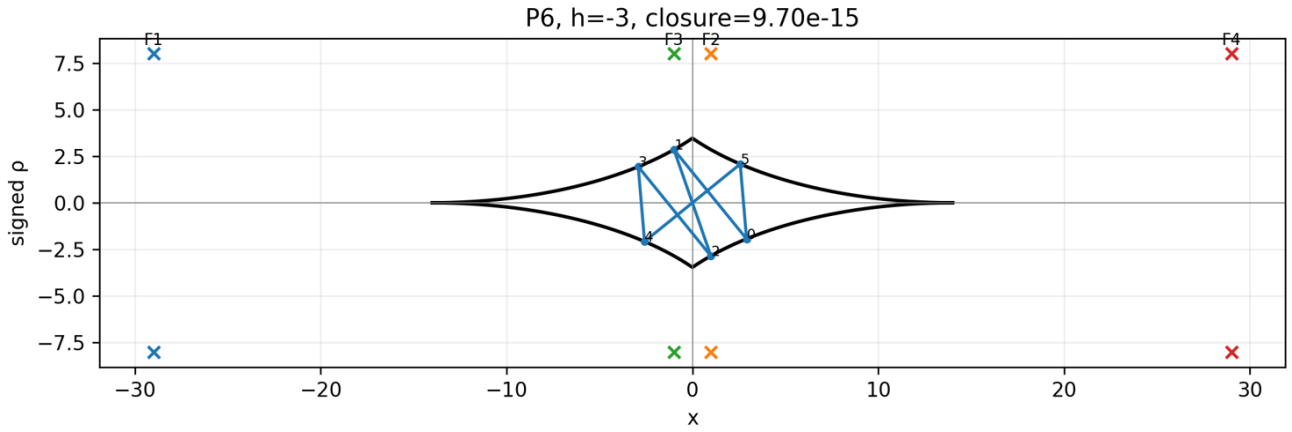

Рисунок 30. Представительная принятая периодическая орбита P6, восстановленная из принятого граничного состояния теми же точными аналитическими уравнениями пересечения/отражения.

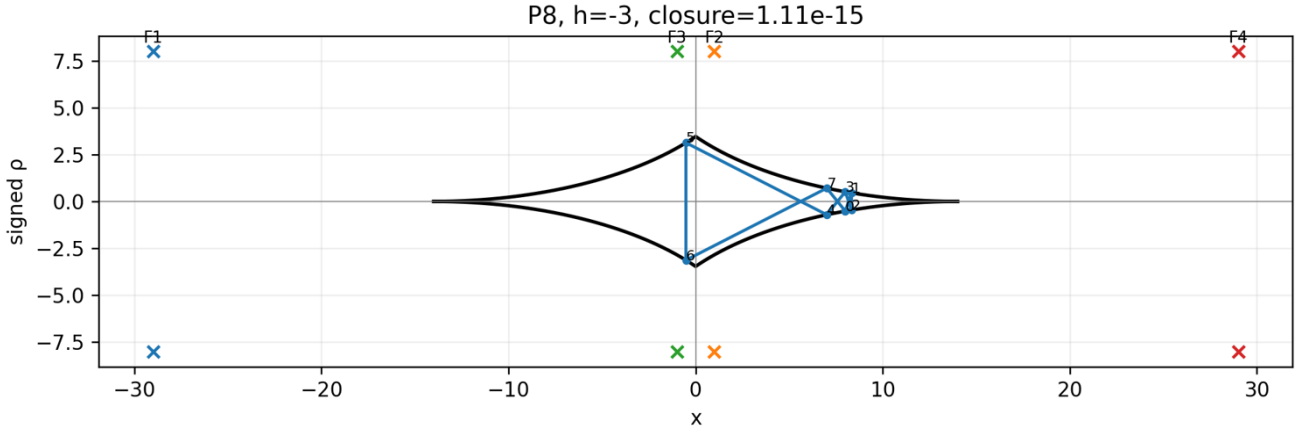

Рисунок 31. Представительная принятая периодическая орбита P8, восстановленная из принятого граничного состояния теми же точными аналитическими уравнениями пересечения/отражения.

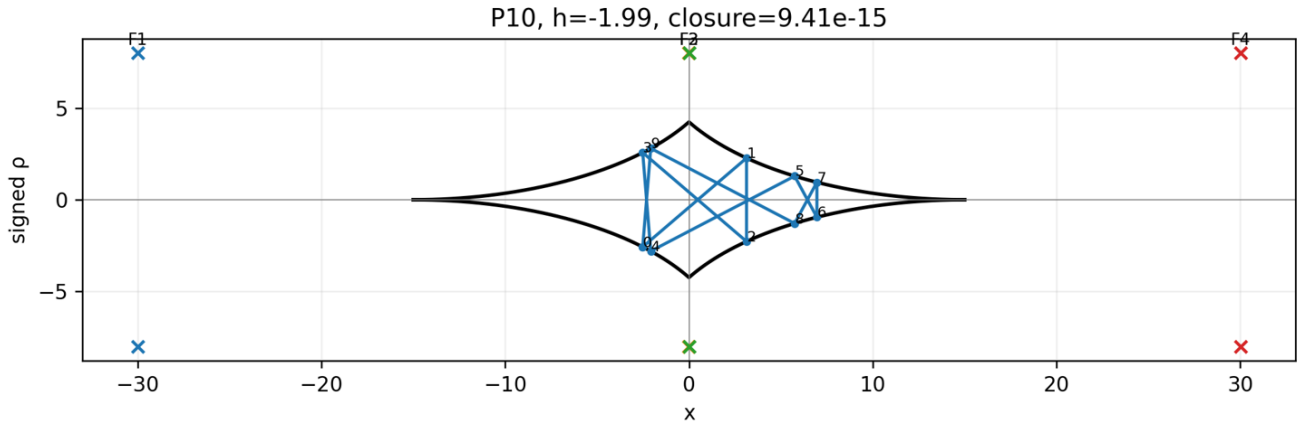

Рисунок 32. Представительная принятая периодическая орбита P10, восстановленная из принятого граничного состояния теми же точными аналитическими уравнениями пересечения/отражения.

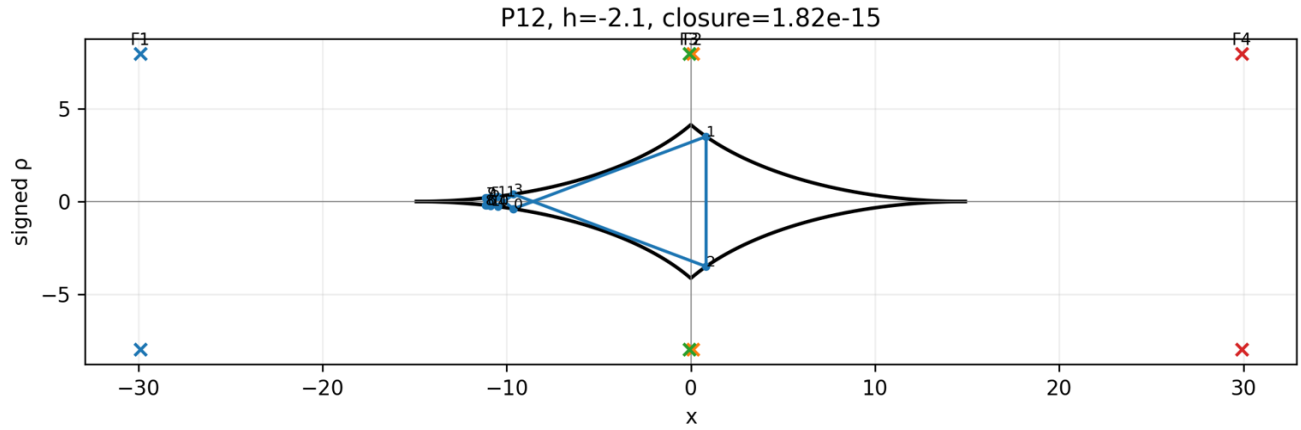

Рисунок 33. Представительная принятая периодическая орбита P12, восстановленная из принятого граничного состояния теми же точными аналитическими уравнениями пересечения/отражения.

14.3 Научная интерпретация периодического скелета

Отсутствие обнаруженных периодических замыканий в конечном общем фокус-направленном ансамбле и наличие корней в целевом поиске по граничным состояниям не противоречат друг другу. Периодические биллиардные состояния занимают специальные положения в непрерывном фазовом пространстве и могут не попадать в широкий, но конечный ансамбль запусков. Представленные данные устанавливают высокоточные численные кандидаты именно примитивных периодов 4, 6, 8, 10 и 12; в целевом поиске принятого P2-кандидата не найдено. Это свидетельство целевого поиска корней, а не утверждение о полноте периодического спектра. Продолжение, устойчивость, бифуркации и классы эквивалентности остаются задачами будущих работ и не включаются в Теоремы 1–2.

14.4 Расширенный аудит периодических орбит: зависимость от h и h_1

Целенаправленный поиск v4 сообщил о принятых примитивных кандидатах только для P4, P6, P8, P10 и P12, поскольку запрошенные периоды были ограничены значениями 2, 4, 6, 8, 10 и 12. Этот конечный результат нельзя трактовать как полный периодический спектр. Повторное симметрийное сведение всех 192 принятых записей замыкания показывает существенно более богатую структуру: после факторизации циклического сдвига, обращения времени, лево-правой зеркальной симметрии и верхне-нижней меридиональной зеркальной симметрии корпус содержит не менее 48 h-специфических маршрутных групп и не менее 28

различных маршрутных топологий после объединения групп с одинаковым символическим маршрутом поверхностей при разных h. Нижняя оценка топологического разнообразия равна 1 (P4), 2 (P6), 4 (P8), 12 (P10) и 9 (P12).

Здесь h обозначает центрированное осевое полусмещение, используемое в настоящем законе, тогда как $h_1=2h$ — прежнее полное взаимное смещение. Число сохраняющихся кандидатов сильно меняется со смещением, показывая, что периодический скелет бифурцирует вместе с геометрией и не исчерпывается фиксированным списком из пяти или шести классов. В аудированном наборе v4 числа симметрийно-сведённых маршрутных групп равны 8, 13, 6, 7, 7 и 7 для $h=\{-3.00, -2.10, -2.01, -2.00, -1.99, -1.90\}$, что соответствует $h_1=\{-6.00, -4.20, -4.02, -4.00, -3.98, -3.80\}$.

Таблица 9. Симметрийно-сведённые числа периодических кандидатов из целенаправленного поиска v4 как функция параметра смещения. Последний столбец показывает число h-специфических маршрутных групп после сведения по симметриям.

h	h_1	P4	P6	P8	P10	P12	маршрутные группы
−3.00	−6.00	0	4	8	8	12	8
−2.10	−4.20	8	0	8	28	12	13
−2.01	−4.02	0	4	12	2	4	6
−2.00	−4.00	0	4	8	4	10	7
−1.99	−3.98	0	4	4	12	8	7
−1.90	−3.80	0	8	4	12	4	7

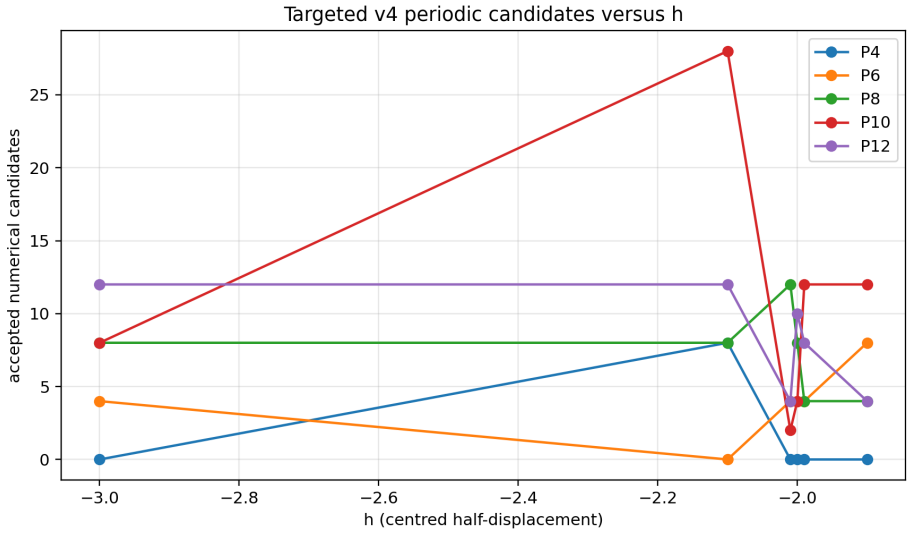

Рисунок 34. Целенаправленные периодические кандидаты v4 как функция центрированного смещения h. Сильное перераспределение принятых корней между P4–P12 показывает, что периодический скелет зависит от геометрии даже внутри одного семейства K=8/17.

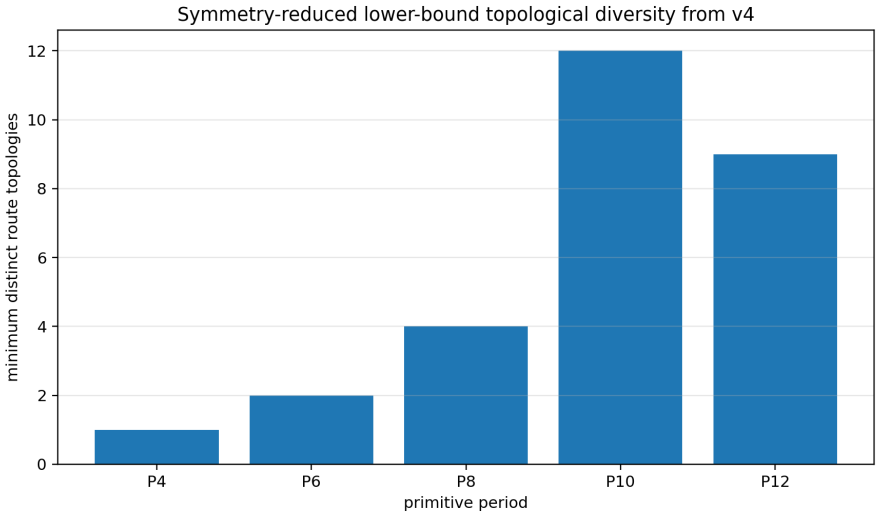

Рисунок 35. Симметрийно-сведённая нижняя оценка топологического разнообразия, извлечённая из корпуса v4. Столбцы показывают минимальное число различных маршрутных топологий для каждого примитивного периода после факторизации очевидных дискретных симметрий.

Эти результаты следует трактовать как нижнеоценочный атлас. Поиск был целенаправленным, ограниченным одним отношением формы K=8/17 и усечённым запрошенными периодами ≤12. Поэтому имеющиеся данные устанавливают геометрическую зависимость периодического скелета, но не дают полной классификации всех периодических орбит во всём семействе (K,h_1).

15. Глобальная фазовая динамика в зависимости от K

Расчёт по K использовал 32 положительных значения K от 0.001 до 2.00. Для каждой регулярной геометрии h=0 вычислялись прямые фокальные тесты, 40 коротких масочных лучей × 350 отражений, два длинных луча × 30 000 отражений, согласованный контроль полного эллипса/окружности на 30 000 отражений, шесть пар возмущённых состояний × 120 отражений и выбранные ансамбли пространственной плотности. Набор фокальных тестов содержал 8 820/8 820 принятых событий. Сетка параметров плотно охватывает обе стороны K=1, чтобы разрешить переход фокальной топологии «осевая → совпадающая → радиальная».

Таблица 10. Карта доказательств по режимам. Численные расчёты используются для верификации и динамической характеристики; точные утверждения по-прежнему опираются на аналитические доказательства.

Именованный тип	Фокальная топология	Основные вычислительные данные	Научный статус
Горизонтальный, 0<K<1	осевая пара / четыре кольца равного радиуса	строгая фокальная проверка; сканирование K; расчёт видимости	точная локальная теорема + численная глобальная динамика
Круговой переход, K=1	двойные родительские	локальное ретроотражение +	точная теорема для направленных из центра

Именованный тип	Фокальная топология	Основные вычислительные данные	Научный статус
	центры / два физических кольца центров	фазовое/контрольное сравнение на 30 000 отражений	лучей; глобальная динамика численная
Вертикальный, K>1	радиальная пара / внутреннее+внешнее кольца у каждого родителя	v15: каноническая K>1 верификация по 39 наборам; канонический skew-аудит	точные меридиональные/кольцевые законы + канонические численные skew/global диагностики
Горизонтальный трёхфокусный	$F_2=F_3=F_{23}$ при h=−f	расчёты маршрутизации, горла и предельных областей	точное слияние/маршрутизация + численная глобальная динамика

Расчёты показывают, что глобальную биллиардную динамику нельзя свести к не зависящему от K конечновременному числу заполняемости. Составной РЕВ при h=0 достигает высокой заполняемости фазового пространства в широком диапазоне K, тогда как время сходимости сильно зависит от K и резко возрастает при приближении к тонкому горизонтальному пределу. Эти конечновременные диагностики интерпретируются в рамках стандартного различия между интегрируемыми и неинтегрируемыми биллиардами [2,3,6,7].

На фазовой сетке Биркгофа 48×48 два независимых длинных луча по 30 000 отражений для каждого K дали средние сырые заполняемости 0.285 при K=0.001, 0.497 при K=0.002, 0.844 при K=0.005, 0.974 при K=0.02, 0.998 при K=0.05 и приблизительно 1.000 от K≈0.1 до K=2 для испытанных случаев. Коэффициент вариации N_{90} по K равен 0.490, что демонстрирует K-зависимую скорость конечновременного заполнения фазового пространства. Фазовая энтропия вблизи K=1 оставалась ≈0.995, поэтому переход фокальной топологии при K=1 не является переходом к регулярному составному биллиарду.

В точном случае K=1 составной РЕВ и обычный круговой биллиард запускались раздельно. При N=30 000 составной РЕВ достиг сырой заполняемости 1.000 и фазовой энтропии 0.995, тогда как обычная окружность заняла 0.020833 сетки 48×48 при энтропии 0.500. Различие геометрическое: круговые родительские дуги не превращают составную границу в полную окружность.

Помимо заполняемости и времени сходимости, v8 сравнивал конечновременные карты фазовой плотности по дивергенции Дженсена–Шеннона относительно K=0.5. Дивергенция резко возрастает в тонком пределе K (≈0.2615 при K=0.001) и существенно меньше при умеренных K. Это дополнительное свидетельство K-зависимой конечновременной фазовой структуры, а не доказательство эргодичности или строгой скорости перемешивания.

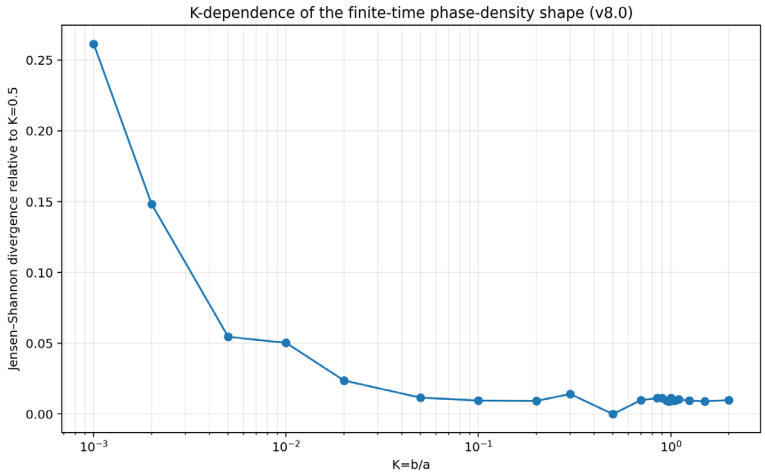

Рисунок 36. Дивергенция Дженсена–Шеннона конечновременной фазовой плотности относительно K=0.5 по v8. Сильный рост в тонком пределе K показывает K-зависимость не только заполняемости и времени заполнения, но и формы конечновременного распределения. Эргодичность и строгая скорость перемешивания не заявляются.

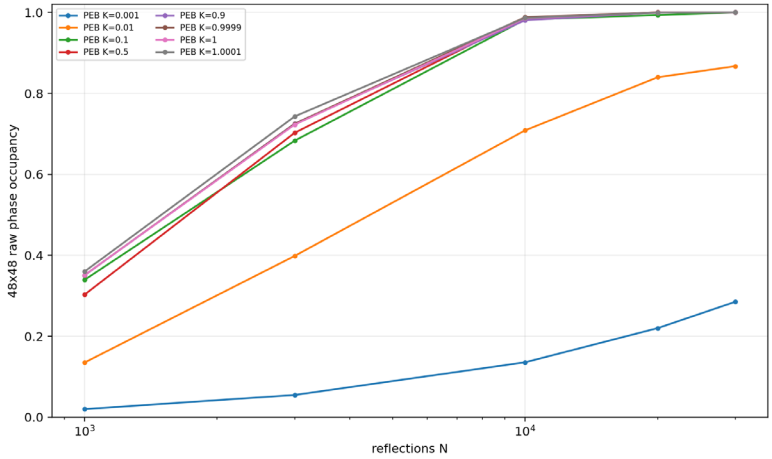

Рисунок 37. Фазовая заполняемость в зависимости от числа отражений N при сканировании K. В предельной области K→0 заполнение выбранной фазовой сетки идёт значительно медленнее, чем при умеренных K.

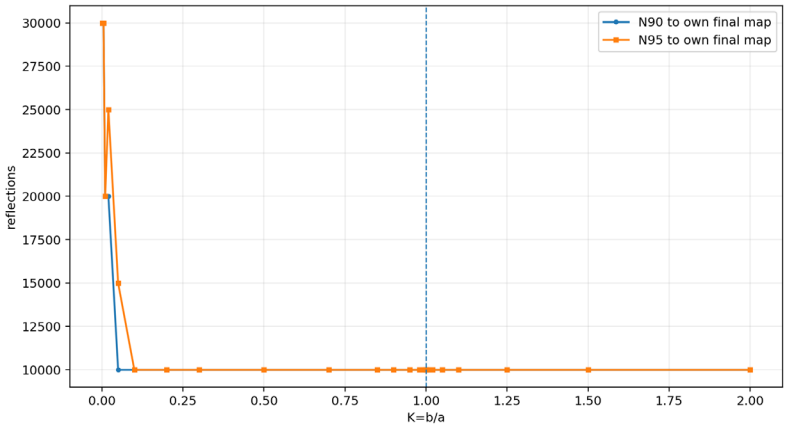

Рисунок 38. Зависимость конечновременного масштаба заполняемости фазового пространства N_{90}/N_{95} от K в семействе h=0.

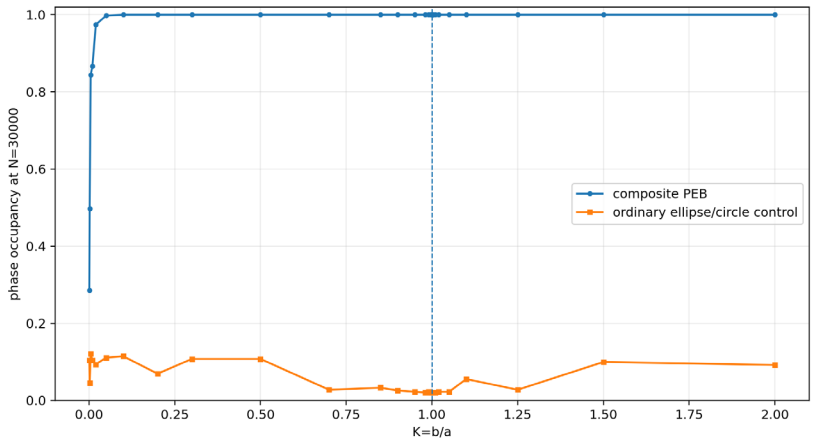

Рисунок 39. Составной PEB и контрольные полный эллипс/окружность на одной фазовой сетке. При K=1 PEB из круговых родителей остаётся глобально отличным от интегрируемого кругового контроля.

15.1 Динамическая асимптотика малых K

Регрессия средней длины свободного пробега при h=0 в диапазоне $0.001 \le K \le 0.1$ дала $\langle \ell \rangle \propto K^{0.99885}$ при $R^2=0.99920$. Почти линейное масштабирование согласуется с тем, что радиальный размер b=aK становится доминирующим масштабом длины пролёта. В том же диапазоне доля переключений родителей на коротких траекториях увеличилась с 0.00264 при K=0.001 до 0.0976 при K=0.1, тогда как чередование ветвей одного родителя оставалось выше 0.9989. Совокупная картина такова: тонкий предел K создаёт длительное символическое пребывание на одном родителе при очень коротких пролётах, делая межродительское переключение узким местом конечновременной заполняемости фазового пространства.

15.2 Динамика на точной трёхфокусной линии

Трёхфокусное семейство имеет два геометрических вырождения: радиальный коллапс при $K \to 0^+$ и, при $K \to 1^-$, коллапс разнесения родительских центров одновременно с пережатием канонического центрального горла. Траектория на 12 000 отражений на точной трёхфокусной линии имела сырую фазовую заполняемость 0.115 при K=0.001, поднялась до 0.977 при K=0.05 и ≈0.995 в промежуточной области, затем снизилась до 0.230 при K=0.9999. Это не нарушение точного закона маршрутизации F_{23}; результат отражает сильное геометрическое вырождение полного биллиарда вблизи обоих концов диапазона.

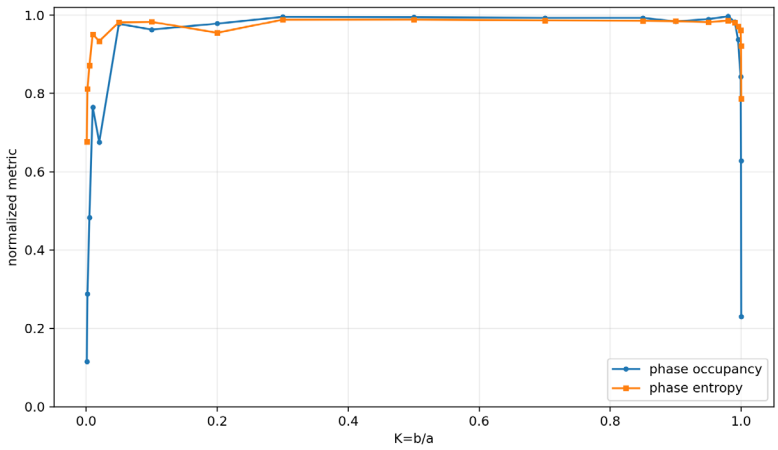

Рисунок 40. Глобальные динамические наблюдаемые на точной трёхфокусной линии. Фокальная маршрутизация остаётся точной, тогда как конечновременная заполняемость фазового пространства замедляется вблизи двух вырожденных пределов.

15.3 Определение и вычислительная основа диагностики плотности лучевых путей

Расчёт v15 сохраняет пространственную характеристику геометрического лучевого транспорта, а не интенсивность волнового поля. Каждый трассированный трёхмерный лучевой сегмент дискретизируется вдоль своей физической длины, после чего его вклад накапливается в осесимметричных координатах (s/a, ρ/a), где s — координата вдоль оси тела, а $\rho=(y^2+z^2)^{1/2}$ — расстояние до этой оси. Поэтому сохранённая матрица H(s,ρ) является гистограммой длины лучевых путей: большое значение означает, что в конечном численном ансамбле через соответствующую осерадиальную ячейку проходит сравнительно большая суммарная длина лучевых траекторий.

Это различие принципиально. H(s,ρ) не является интенсивностью электромагнитного или акустического поля, плотностью энергии, потоком мощности, вероятностной плотностью инвариантной меры фазового пространства или теоретической амплитудой каустики. Это конечнокорпусная геометрическая мера времени пребывания/длины пути. Тем не менее она научно полезна, поскольку непосредственно выявляет области полости, многократно пересекаемые проверенным ансамблем лучей, и показывает, как составная граница перераспределяет многократно отражённый лучевой транспорт в физическом пространстве.

Корпус плотности v15 объединяет несколько семейств начальных условий в одном геометрическом расчёте: изотропные внутренние состояния, состояния со стратификацией по осевому угловому моменту, почти касательные состояния и центр-направленные состояния. Поэтому описываемые максимумы не являются следом одного специально выбранного луча. Это коллективные конечнокорпусные признаки реализованного лучевого отображения; предметом настоящего раздела является их устойчивое изменение при вариации геометрии.

Вычислительное происхождение: приведённые ниже значения плотности взяты из сохранённых выходных файлов v15 PATH_DENSITY_AXIS_RHO.npz, сформированных скриптом PEB_ARTICLE_V11_CORRECT_K_TYPES_DECISIVE_COLAB_v15_0_0_20260913.py. Знаковые меридиональные визуализации воспроизводимо строятся скриптом PEB_SECTION15_3_SIGNED_DENSITY_FROM_V15_v20_0_0_20260916.py. Ни один научный рисунок в этом подразделе не перерисовывался и не реконструировался вручную.

15.4 Внутренние зоны концентрации плотности лучевых путей и их зависимость от геометрии

15.4.1 Как правильно читать знаковую меридиональную визуализацию

Сохранённая гистограмма v15 определена только при неотрицательном ρ и поэтому занимает одну радиальную полуплоскость. Однако в осесимметричном теле каждая точка (s,ρ) соответствует полной окружности радиуса ρ вокруг оси тела. Для наглядного отображения положения зон в обычном меридиональном сечении применяется точное симметрийное отображение ρ→±y. Одно и то же сохранённое значение показывается при y=+ρ и y=−ρ. Новые траектории при этом не создаются, а положение максимума не изменяется: визуализация лишь показывает два меридиональных пересечения одного и того же трёхмерного тороидального радиального слоя.

Ориентацию рисунка необходимо пояснить явно, поскольку иначе она легко приводит к ошибочному прочтению. Продольная ось псевдоэллипсоида s на рисунках горизонтальна. Поэтому физическая экваториальная плоскость s=0 выглядит в двумерном меридиональном сечении как вертикальная центральная линия. Следовательно, максимум при s≈0 и ρ>0 визуально проявляется двумя яркими областями выше и ниже горизонтальной оси тела. Это не два независимых «вертикальных рога» и не две осевые доли. Это верхнее и нижнее пересечения одной кольцевой/тороидальной зоны концентрации, лежащей в широкой центральной экваториальной части трёхмерного тела.

3D тороидальная зона: $s \approx 0$, $\rho = \rho_peak > 0$ ↔ 2D меридиональные пересечения: $s \approx 0$, $y = \pm\rho_peak$.

Красные точки на подписанных меридиональных рисунках показывают точные фокальные пересечения, задаваемые той же геометрией v15, а белые кресты — прямые глобальные максимумы сохранённой гистограммы H(s,ρ) и их зеркальные отображения. Фокальные точки и максимумы плотности нельзя отождествлять: фокальный закон является точным локальным законом сопряжения выбранных меридиональных лучей, тогда как максимум плотности — возникающее на конечном ансамбле свойство множества многократно отражённых траекторий.

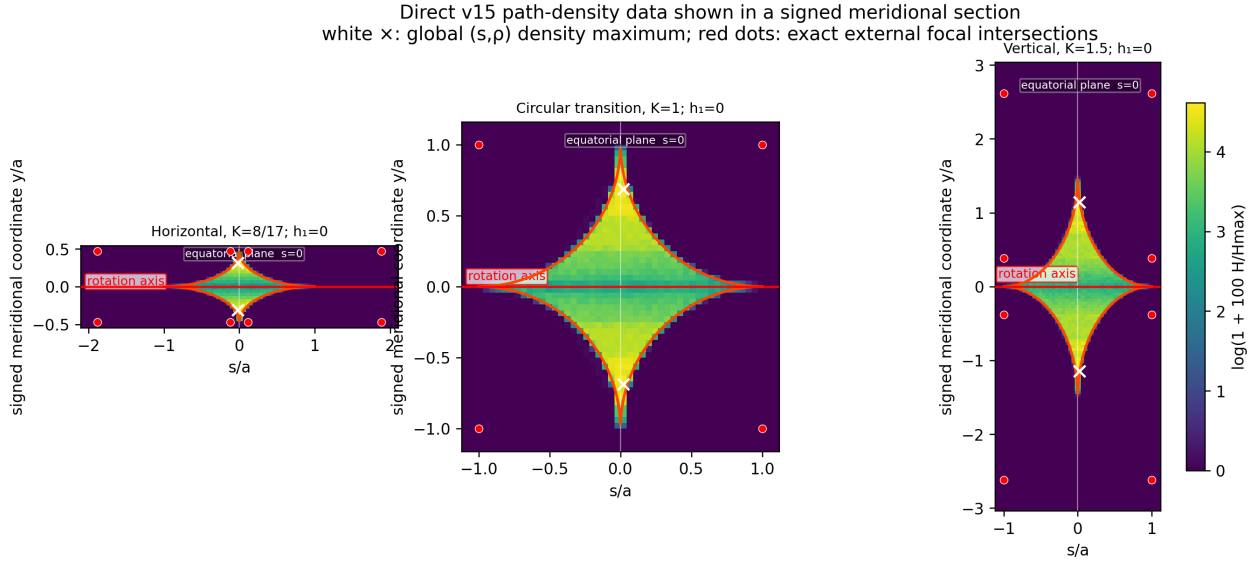

Рисунок 41. Прямые данные v15 по плотности лучевых путей при $h_1=0$, показанные в подписанном меридиональном сечении для горизонтального (K=8/17), переходного кругового (K=1) и вертикального (K=1.5) типов. Цветовое поле представляет сохранённую

осесимметричную карту H(s,ρ), зеркально отображённую только для визуализации посредством ρ→±y. Продольная ось тела горизонтальна, поэтому физическая экваториальная плоскость s=0 является вертикальной центральной линией рисунка. Красные точки — точные фокальные пересечения; белые кресты — прямые глобальные максимумы H(s,ρ). Таким образом, две симметричные яркие области при y=±ρ_peak являются двумя пересечениями одной экваториальной тороидальной зоны, а не двумя отдельными осевыми долями.

15.4.2 Канонический режим $h_1=0$: экваториально центрированная радиально внеосевая тороидальная зона

Для канонической сборки $h_1=0$ прямые карты v15 показывают устойчивую пространственную организацию: доминирующий глобальный максимум длины лучевых путей расположен очень близко к центральной экваториальной плоскости s=0, но на конечном расстоянии от оси вращения. Следовательно, в трёхмерной геометрии предпочтительная область имеет тороидальный, а не осевой характер. Именно это и видно при правильном чтении подписанных меридиональных карт: концентрация находится в радиально боковых частях широкой центральной экваториальной области, а не на осевой линии и не у удалённых осевых концов тела.

Три репрезентативных прямых максимума особенно удобны для проверки этой интерпретации. Для горизонтального типа K=8/17 получено (s_peak/a,ρ_peak/a)=(-0.022,0.3125); для переходного состояния K=1 — (+0.022,0.6875); для вертикального типа K=1.5 — (+0.022,1.145833). Относительно канонического экваториального радиуса R/a=K эти положения соответствуют ρ_peak/R≈0.664, 0.688 и 0.764. Таким образом, доминирующее накопление длины пути не является осевым эффектом: в этих репрезентативных геометриях оно находится примерно на двух третях — трёх четвертях расстояния от оси до экваториальной границы.

Во всех 18 канонических K-сканах при $h_1=0$ осевое положение остаётся тесно привязанным к экваториальной окрестности: $|s_{peak}|/a \le 0.066$, а среднее $|s_{peak}|/a$ равно 0.0342. Радиальное положение, напротив, существенно меняется с K. Аппроксимация прямых глобальных максимумов на диапазоне $0.2 \le K \le 3.0$ даёт

$$\rho_{peak}/a = 0.69919\,K - 0.02560, \qquad R^2 = 0.96890.$$

Эта зависимость является эмпирическим конечносеточным описанием проверенного корпуса, а не точным геометрическим законом. Однако её научное содержание существенно: при переходе от горизонтального семейства через K=1 к вертикальному предпочтительная радиальная полоса систематически смещается наружу в нормализованном физическом сечении, оставаясь при этом возле одной и той же экваториальной плоскости. Следовательно, геометрия управляет не только точной фокальной топологией, но и предпочтительной пространственной областью, которую многократно пересекает конечный ансамбль лучей.

Таблица 11. Прямые численные опорные значения $h_1=0$ из сохранённых карт плотности v15.

Тип	K	s_peak/a	ρ_peak/a	ρ_peak/R	Интерпретация
Горизонтальный	8/17	−0.022	0.312500	0.664	экваториальная, внеосевая
Переходный круговой	1	+0.022	0.687500	0.688	экваториальная, внеосевая
Вертикальный	1.5	+0.022	1.145833	0.764	экваториальная,

					внеосевая

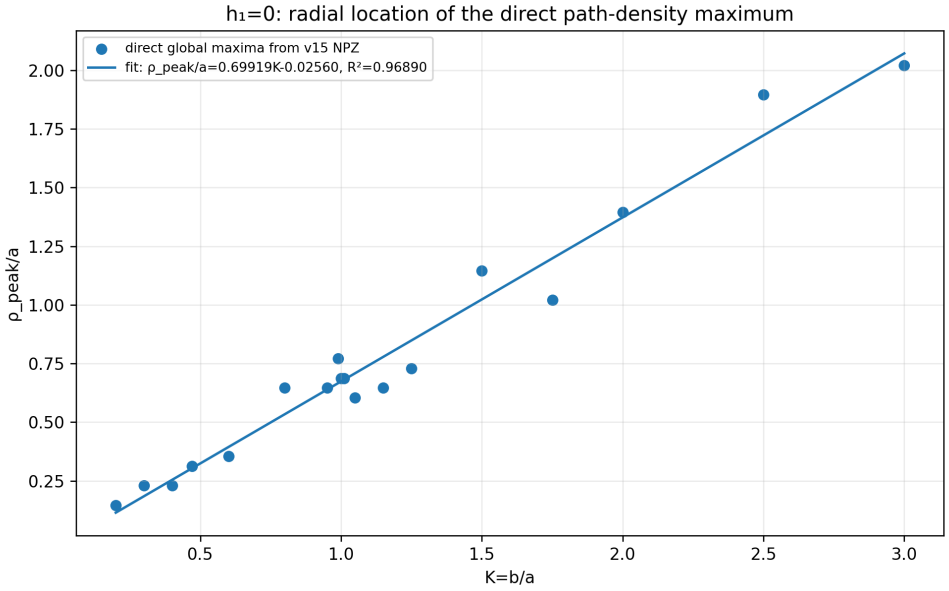

Рисунок 42. Радиальное положение прямого глобального максимума плотности лучевых путей для всех 18 канонических K-сканов при $h_1=0$. Эмпирическая аппроксимация $\rho_peak/a=0.69919K-0.02560$ ($R^2=0.96890$) количественно описывает геометрически управляемое радиальное смещение доминирующей конечнокорпусной зоны длины пути и не возводится в ранг точной теоремы.

15.4.3 Отрицательное h_1: управляемое горлом смещение внутрь

При $h_1<0$ четверти двух родителей перекрываются, а связное центральное горло постепенно сужается при увеличении модуля отрицательного смещения. Карты плотности показывают соответствующее движение доминирующей внеосевой полосы к оси. При фиксированном K=8/17 прямые максимумы составляют ρ_peak/a=0.270833 для $h_1=-1$, 0.270833 для $h_1=-2$, 0.229167 для $h_1=-4$ и 0.145833 для $h_1=-8$. Точные радиусы горла для тех же конфигураций равны 0.357296, 0.311569, 0.249135 и 0.167351.

Численный тренд геометрически согласован: при сокращении доступного горла предпочтительная радиальная полоса длины пути также перемещается внутрь. Аппроксимация проверенных отрицательных h_1 по точному радиусу горла даёт приблизительно ρ_peak/a=0.93894(r_throat/a)-0.00969 при $R^2\approx0.99714$. Такая высокая корреляция поддерживает обозначение этого конечнокорпусного режима как «концентрация, управляемая горлом». Однако это не точная аналитическая теорема, поскольку максимум определяется на конечной гистограммной сетке и по конечному ансамблю траекторий.

Существенно, что отрицательное осевое перекрытие меняет не только внешний контур полости. Оно изменяет внутреннее поперечное ограничение, через которое проходят многократно отражённые траектории. Наблюдаемое смещение максимума внутрь является прямой численной сигнатурой этого геометрического ограничения в физическом пространстве.

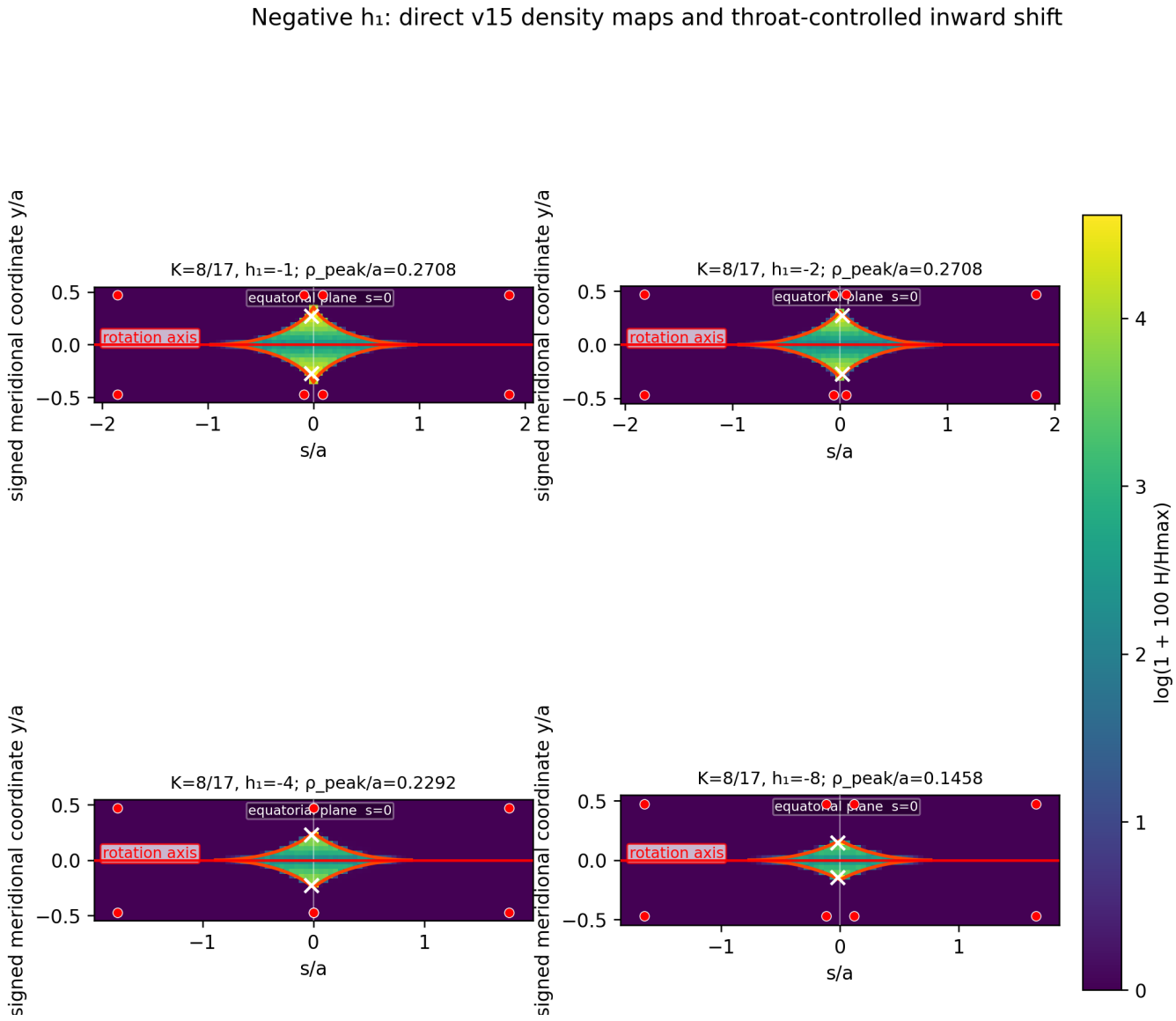

Рисунок 43. Прямые подписанные меридиональные визуализации v15 для K=8/17 и отрицательного h_1. Увеличение перекрытия уменьшает центральное горло и смещает доминирующую внеосевую концентрацию внутрь. Поскольку ось s горизонтальна, парные максимумы выше и ниже оси являются меридиональными пересечениями одной экваториальной тороидальной полосы. Красные точки показывают точные фокальные пересечения; белые кресты — прямой глобальный максимум плотности и его зеркальное отображение; красная горизонтальная линия — ось вращения y=0; вертикальная центральная линия — экваториальная плоскость s=0.

15.4.4 Положительное h_1: перестройка, обусловленная апертурой

При $h_1>0$ четверти родителей уже не соединяются в центральном интервале, и каноническая конфигурация v15 содержит открытую экваториальную апертуру. Это качественно меняет транспортную задачу. В проверенных положительных h_1 глобальный максимум $H(s,\rho)$ отходит от простого режима $h_1=0$, а абсолютная амплитуда пика резко уменьшается относительно закрытых/перекрывающихся случаев. Пространственная организация становится чувствительной одновременно к размеру апертуры и к тому, какие траектории достаточно долго остаются в полости, чтобы внести заметный вклад в накопленную длину пути.

Прямые карты однозначно показывают перестройку, но не подтверждают универсального однопараметрического закона вида |s_lobe|=f(h₁) на всём проверенном корпусе. В частности, ранее предложенная линейная формула |s_lobe|/a≈1.039(h₁/2a)+0.055 исключается из научного описания. Поэтому карты при h₁>0 следует рассматривать как диагностику транспорта, обусловленного апертурой и ансамблем. Для полной классификации необходим более плотный двумерный скан (K,h₁/a), явное условие по времени выхода и тесты сходимости по числу лучей и пространственному разбиению.

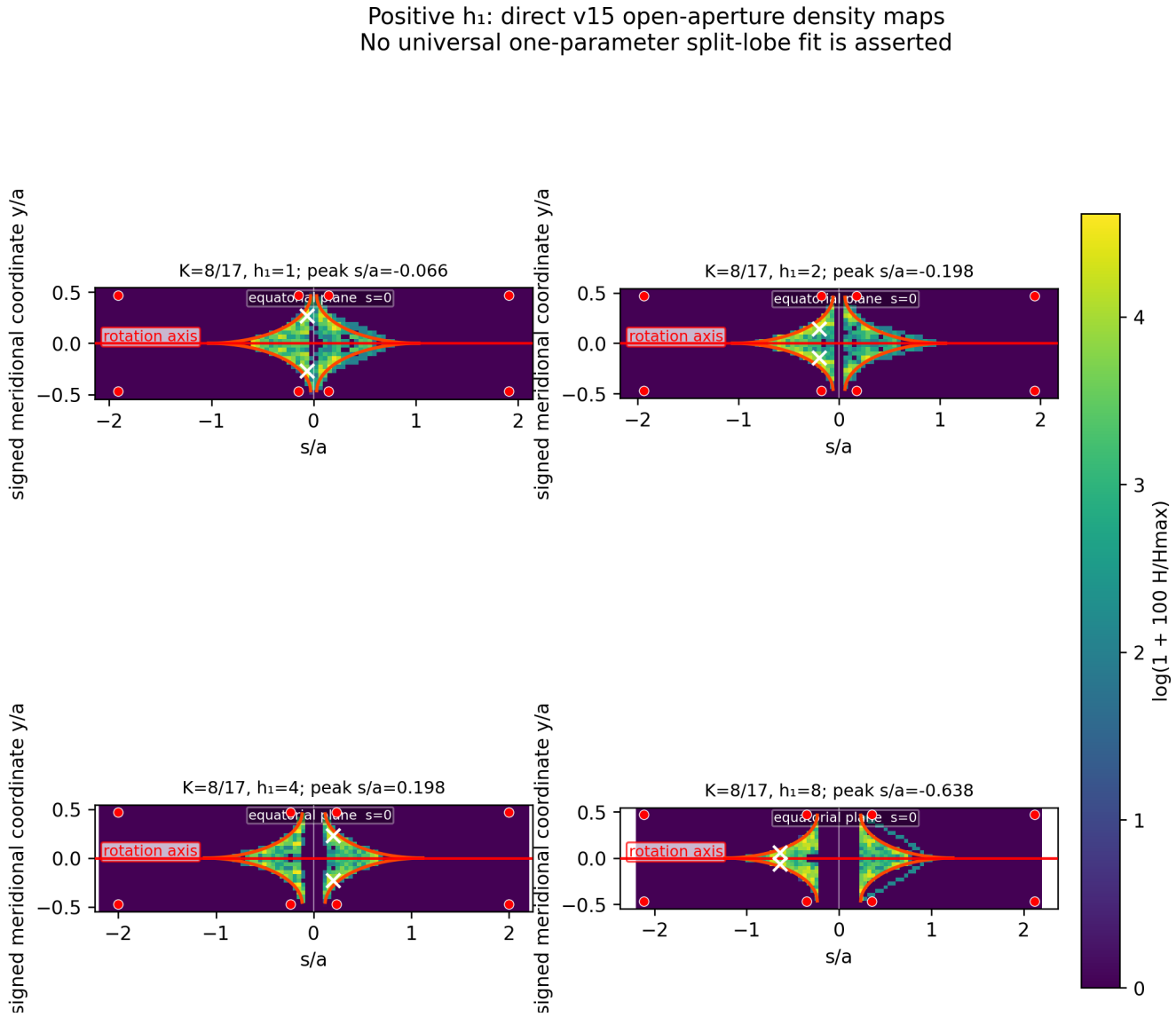

Рисунок 44. Прямые подписанные меридиональные визуализации v15 для K=8/17 и положительного h₁. Центральная апертура перестраивает конечное поле плотности лучевых путей. Карты устанавливают геометрически зависимое перераспределение, но не универсальный однопараметрический закон положения раздвоенных максимумов.

15.4.5 Связь с фокальным законом, динамическая интерпретация и ограничения

Описанные зоны концентрации связаны с геометрией псевдоэллипсоида, но не тождественны его точным фокальным кольцам. Доказанный в других разделах закон относится к локальному сопряжению родительских фокальных линий при гладком физически первом отражении. Напротив, H(s,ρ) накапливается по множеству сегментов после многократных отражений и включает вклад нефокальных, косых, почти касательных и стратифицированных

по угловому моменту состояний. Поэтому структуры плотности являются глобальными транспортными сигнатурами составного биллиарда, а не повторной формулировкой одноотражательного фокального закона.

Имеющиеся данные сами по себе также не доказывают, что механизм концентрации является устойчивым периодическим семейством, строгой каустикой, инвариантным тором или сингулярностью инвариантной меры. Для таких выводов необходим специальный анализ устойчивости в фазовом пространстве и прямое сопоставление пространственных гребней плотности с периодическими и околопериодическими семействами. В настоящем разделе устанавливается более узкий и непосредственно воспроизводимый результат: в конечном корпусе v15 накопленная длина пути имеет устойчивые геометрически зависимые пространственные максимумы, включая внеосевую экваториальную полосу при $h_1=0$ и её коррелированное с горлом смещение внутрь при $h_1<0$.

Необходима также оговорка о мере. $H(s,\rho)$ накапливается по ячейкам $ds\,d\rho$. Физический объём осесимметричной ячейки пропорционален $2\pi\rho\,ds\,d\rho$. Поэтому объёмно-нормированная плотность длины пути должна дополнительно учитывать цилиндрический якобиан и может изменить относительную выраженность или положение максимума. Настоящий раздел намеренно сообщает максимумы именно сохранённой меры v15 и не переименовывает их в максимумы объёмной плотности энергии.

15.4.6 Потенциальное техническое значение

Наличие геометрически управляемых предпочтительных зон лучевого транспорта потенциально важно для инженерных приложений, поскольку означает, что область многократного прохождения траекторий можно смещать изменением геометрии без обязательного активного управления направлением. Уже на стадии геометрического проектирования рассчитанные зоны задают кандидаты для размещения приёмников, поглотителей, апертур связи, диагностических датчиков, активной среды, рассеивающих включений или других элементов, для которых полезно многократное прохождение лучевых траекторий. Результат $h_1=0$ особенно интересен тем, что кандидатом является не точка, а осесимметричная тороидальная полоса, радиус которой систематически зависит от K.

Эту возможность необходимо трактовать как инженерную гипотезу, а не как уже доказанную эффективность устройства. Максимум геометрической длины пути не гарантирует максимума электромагнитной, акустической, оптической или упругой энергии. При конечной длине волны вступают в действие дифракция, интерференция, модовая структура, поляризация, потери материалов, импеданс границы, дисперсия и связь с источником. Поэтому любое применение в датчиках, резонаторах, поглотителях, излучателях или системах концентрации энергии требует отдельной конечноволновой проверки и, в конечном счёте, эксперимента.

Наиболее прямое инженерное следствие настоящего лучевого результата имеет геометрический характер: атлас плотности даёт воспроизводимую карту потенциально высокопроходимых областей и показывает, что их положение можно смещать параметрами K и h_1. Это создаёт проверяемую проектную переменную. Естественный следующий эксперимент — разместить одинаковые виртуальные или физические датчики (i) в предсказанном максимуме плотности пути, (ii) на оси и (iii) в согласованных контрольных точках, а затем сравнить интегральный поток, время пребывания, волновую интенсивность, отношение сигнал/шум, поглощение или эффективность связи при прочих равных условиях.

Таблица 12. Научная интерпретация и технический статус режимов концентрации.

Геометрический режим	Подтверждённое численное наблюдение	3D-интерпретация	Технический статус
$h_1=0$	s_peak≈0, ρ_peak>0; радиус зависит от K	экваториальная тороидальная зона высокой длины пути	кандидатная зона размещения/взаимодействия; нужна волновая проверка
$h_1<0$	ρ_peak смещается внутрь при сжатии горла	сжимающаяся тороидальная полоса у центрального горла	геометрически настраиваемая зона высокой проходимости; конечнокорпусный результат
$h_1>0$	сильная перестройка после открытия апертуры	обусловленный апертурой транспортный рисунок	универсальный закон split-lobe не установлен

Таким образом, результат по лучевой плотности сильнее качественного визуального впечатления, но намеренно слабее универсальной теоремы о концентрации: это воспроизводимый конечнокорпусный кандидат на пространственный закон транспорта, наиболее устойчивой частью которого является экваториально центрированная радиально внеосевая полоса и её геометрически управляемая миграция. Превращение этого результата в утверждение о волновой энергии или эффективности устройства является отдельным, фальсифицируемым этапом программы Геометрической волновой инженерии.

16. Итоговая математическая формулировка закона

Полученные выше результаты можно свести к следующему закону.

ТОЧНЫЙ ЛУЧЕВОЙ ЗАКОН ФОКАЛЬНОГО СОПРЯЖЕНИЯ В ПСЕВДОЭЛЛИПСОИДАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА. Пусть РЕВ-2 собран из двух активных четверть-эллиптических родительских ветвей, определённых формулами (5)–(6), с полуосями $a>0$ и $b>0$, $K=b/a>0$, центрированным симметричным осевым полусмещением h (эквивалентным более раннему конструктивному параметру $h_1=2h$ [9]), знаковым радиальным смещением уровня оси h_a, $R=b+h_a>0$, активным радиальным профилем (7) и вращением вокруг оси x. Для каждого состояния луча физически следующим событием является допустимое пересечение при положительном времени с минимальным временем пролёта среди всех активных гладких ветвей и явно заданных элементов замыкания или открытия. В каждой гладкой активной точке родительской поверхности зеркальное отражение точно сопрягает две фокальные прямые этого родителя. При $0<K<1$ это горизонтальный тип псевдоэллипсоида с четырьмя осевыми родительскими фокальными кольцами одинакового радиуса; $K=1$ — круговой переход, при котором каждая родительская пара фокусов сливается, а семейство лучей, направленных из центра, ретроотражается; $K>1$ — вертикальный тип псевдоэллипсоида с двумя радиальными фокальными радиусами в каждой осевой координате родителя и, при $h_a=0$, точным инвариантом $r_-r_+=a^2$ из (34). Внутри $0<K<1$ условие $h=-f$ из (37), где $f=a-a\sqrt{(1-K^2)}$, определяет горизонтальный трёхфокусный тип псевдоэллипсоида: $F_2=F_3=F_{23}$ при $x=0$; левый родитель сопрягает $F_{23}\leftrightarrow F_1$, а правый — $F_{23}\leftrightarrow F_4$. Это состояние имеет четыре родительские фокальные метки, но три физических кольца. Его связное физическое горло требует $r_{throat}=aK+h_a-aK^2>0$, как задано формулой (41). На каждом регулярном C^2 эллиптическом фрагменте поверхности с положительным радиусом $K_G<0$; негладкие и

вырожденные страты исключены из этого дифференциально-геометрического утверждения. Лучевой закон инвариантен относительно подобия и точно переносится в каждую меридиональную плоскость. Для общих осесимметричных трёхмерных лучей сохраняется инвариант L=(r×v)_axis, определённый в (35), однако точное сопряжение фокальных колец не утверждается для произвольных косых лучей. Негладкие швы исключаются, если не задан локальный закон скругления или граничного взаимодействия; теорема об общем повторном фокальном возврате не заявляется.

Вычислительные данные §§12–16 используются только для проверки реализации, количественной оценки численных остатков и характеристики вторичной конечновыборочной динамики. Они не заменяют аналитического содержания Теорем 1–2 и приведённых выше точных следствий.

17. Протокол численной воспроизводимости

Воспроизводящая реализация точного лучевого закона должна использовать аналитические пересечения луч–эллипс в меридиональном 2D, явную идентичность активного родителя и фильтрацию по опоре, оператор зеркального отражения d_out=d_in−2(d_in·n)n, фильтрацию корней по положительному времени, выбор первого пересечения, отдельное состояние NONE («нет фокального события») для нефокальных событий и раздельное различение прямой и обратной виртуальной ориентации фокуса. На негладком шве нельзя произвольно назначать единственную нормаль. При h>0 центральная область должна быть явно объявлена OPEN («открытой») либо задана конкретная модель замыкания; при $h_a<0$ активное отсечение и точки осевого вырождения должны обрабатываться согласно (7).

Точные геометрические тождества и одно-событийные лучевые отображения воспроизводимы из уравнений настоящей рукописи посредством аналитического пересечения луч–эллипс, точного зеркального отражения, явного выбора активного родителя и правила первого пересечения. Диагностики конечного корпуса (фазовая заполняемость и энтропия, статистики ошибок косых лучей, прокси чувствительности, доли выхода и поиск периодических орбит) дополнительно зависят от ансамблей запусков, правил разбиения на бины и нормировки, численных допусков и параметров поиска. Эти детали протокола относятся к сопровождающему вычислительному архиву и не должны выводиться только из аналитических уравнений. Публикационные рисунки строятся из указанных уравнений и рассчитанных траекторий; научная геометрия лучей не реконструируется вручную.

Протокол численной воспроизводимости намеренно определяет тип псевдоэллипсоида только как функцию K, использует формулу центров родителей (2) для каждого регулярного K и применяет одинаковую логику первого пересечения к горизонтальной, круговой-переходной, вертикальной и трёхфокусной конфигурациям.

Канонический аудит K-типов v15 является источником данных для диагностик косых лучей и радиального произведения при K>1, h=0, использованных в настоящей версии. В нём проверяется геометрия родительских центров и активной опоры, определённая настоящим законом, и формируется конечновыборочная доказательная база K>1, приведённая в таблицах 2, 4, 5, 7 и на рисунках 11 и 21. Эти расчёты уточняют численную верификацию, не изменяя аналитический фокальный закон.

Для специализированного набора верификации K>1 максимальная относительная ошибка меридионального фокального попадания составила 1.964×10^{-15}, максимальная относительная ошибка $r_-r_+=a^2$ — 1.574×10^{-15}, а максимальный нормированный остаток осевого углового момента — 2.006×10^{-14}. Эти значения являются численными проверками согласованности аналитических тождеств; они не определяют сами тождества.

18. Перспективные научные и технологические направления

Точная фокальная геометрия предлагает проверяемые приложения, однако настоящий результат остаётся лучевым законом. Аналитически заданные фокальные кольца могут определять кандидатные положения кольцевых источников, датчиков, поглотителей или элементов связи. Изменение K переключает родительскую фокальную организацию между осевой, круговой-переходной и радиальной формами, а изменение h внутри горизонтального семейства может создавать точное трёхфокусное слияние. Независимый параметр h_a изменяет допустимость горла и топологию радиальных колец. Эти геометрические управляющие параметры могут быть полезны в резонаторах, многопроходных ячейках, направленно-чувствительных полостях или пассивных пространственных препроцессорах, но любое утверждение о характеристиках требует конечноволновых расчётов Гельмгольца/Максвелла, учёта материальных потерь, производственных допусков и эксперимента.

19. Инженерная интерпретация в каноническом семействе

Точное трёхмерное инженерное утверждение является общим: осевой угловой момент сохраняется при гладком зеркальном отражении от любой осесимметричной стенки, а явно заданная соосная круговая апертура радиуса r_ap недоступна, если |L|>r_ap v. Это критерий исключения, а не гарантия выхода при |L|≤r_ap v. Инженерные исследования должны формулировать доступность по фактической апертуре устройства, а не приписывать апертуру как внутреннее свойство типа K.

Сравнительные утверждения об удержании, выводе энергии, чувствительности или резонаторных свойствах требуют согласованных контрольных геометрий с одинаковой площадью апертуры, телесным углом, мерой запусков и конечноволновой моделью. Настоящий закон задаёт точную лучевую геометрию, на которой могут строиться такие сравнения, но сам по себе не ранжирует какой-либо K-тип как лучший резонатор или волновое устройство. После введения физики конечноволновых мод соответствующую основу сравнения даёт установившаяся теория оптических резонаторов [4,5].

20. Ограничения, критерии фальсификации и будущая работа

Точная теорема фокального сопряжения установлена для гладких меридиональных зеркальных событий и переносится в каждую меридиональную плоскость поверхности вращения. Общие косые 3D-лучи прослежены численно, а осевой инвариант L является точным, однако замкнутая аналитическая теорема о фокальном сопряжении косых лучей не получена. Важные последующие математические задачи — аналитическое разложение ошибки косого фокального попадания, доказательство или опровержение кандидата о чередовании ветвей одного родителя и строгий анализ K-зависимого перемешивания. Конечноволновые моделирования Гельмгольца/Максвелла и лабораторные измерения необходимы до того, как лучевой закон можно будет повысить до закона волнового транспорта или резонаторных характеристик.

Псевдоэллипсоиды высших порядков геометрически определены интервальной рекурсией, но точные многоотражательные лучевые законы для n≥3 здесь не установлены. Поэтому настоящий закон второго порядка даёт математически контролируемый базовый случай для будущих исследований высших порядков.

21. Выводы

В настоящей работе устанавливается единый лучево-геометрический закон для псевдоэллипсоида второго порядка — составной поверхности, конструктивная геометрия которой была ранее введена в программе Геометрической волновой инженерии [9]. Новый результат данной работы состоит в точной организации наследуемых фокальных систем

родительских эллипсов при физическом выборе первого пересечения и в её теоремной лучевой формулировке; он не заменяет классический закон зеркального отражения и не приписывает эллипсу новое локальное оптическое свойство. Поэтому отображение первого пересечения, граница фокальной видимости и исключение негладких швов являются существенными частями составного закона, а не вторичными деталями реализации.

Закон разделяет горизонтальный, круговой-переходный и вертикальный фокальные режимы вместе с точным горизонтальным трёхфокусным подтипом. В горизонтальном псевдоэллипсоиде родительские пары фокусов осевые и после вращения образуют четыре фокальных кольца одинакового радиуса. При $K=1$ каждая родительская пара фокусов сливается, создавая режим кругового перехода. В вертикальном псевдоэллипсоиде родительские пары фокусов радиальны и порождают внутреннюю/внешнюю пары соосных колец. Внутри горизонтального семейства $h=-f$ является точным критическим условием горизонтального трёхфокусного типа: два внутренних кольца сливаются в F_{23}, внешние остаются различными, а левый и правый родители сохраняют разные сопряжённые партнёры маршрутизации. Эти утверждения задают единое непрерывное описание фокальной топологии во всём регулярном семействе псевдоэллипсоидов.

Точное трёхмерное расширение — меридиональный кольцевой перенос теоремы родительского фокального сопряжения. Общие косые лучи по-прежнему определяются той же осесимметричной границей и сохраняют осевой угловой момент, однако универсальный точный закон сопряжения фокальных колец для косых лучей не заявляется. Численные расчёты в рукописи служат независимой верификацией, тестами фальсификации и характеристикой вторичной биллиардной динамики; они не определяют закон. Конечноволновое электромагнитное, акустическое или оптическое поведение, характеристики резонатора и эксперимент намеренно оставлены для отдельных исследований. В этом смысле препринт даёт геометрический фундамент: определяет, что такое псевдоэллипсоид второго порядка, как организована его фокальная топология и какие лучевые преобразования точно следуют из этой конструкции.

Приложение А. Номенклатура

Таблица А1. Основные обозначения.

Символ	Значение
x	центрированная осевая координата; ось x является осью вращения
ρ	цилиндрический радиус; в меридиональной плоскости используется знаковая радиальная координата
a	осевая полуось каждого родительского эллипса
b	поперечная полуось каждого родительского эллипса; $b=aK$
K	безразмерное отношение формы $K=b/a$
h_1	более раннее конструктивное взаимное смещение сборки четвертей [9]; $h_1=2h$
h	центрированное симметричное осевое полусмещение, используемое в настоящем лучевом законе
h_a	знаковое радиальное смещение уровня оси; $R=b+h_a$
R	радиальный уровень центров родительских эллипсов относительно оси вращения; $R>0$
c_x	осевое фокальное полуразнесение при $0<K<1$: $c_x=a\sqrt{(1-K^2)}$

Символ	Значение
c_r	радиальное фокальное полуразнесение при K>1: $c_r=a\sqrt{(K^2-1)}$
f	положительный внутренний фокальный отступ в горизонтальном семействе: $f=a-c_x$
ξ, η	безразмерные смещения $\xi=h/a$ и $\eta=h_a/a$
$F_1…F_4$	родительские фокальные метки; после вращения соответствующие меридиональные фокусы порождают соосные кольца
F_{23}	объединённое физическое кольцо при $h=-f$ (эквивалентно $h_1=-2f$)
s	знаковая меридиональная ветвь, $s=\pm1$
P	индекс родителя, $P\in\{L,R\}$
Q	гладкая активная точка отражения
d_in, d_out	единичные направления падающего и отражённого лучей
n	единичная нормаль поверхности в гладкой активной точке
L	осевой инвариант углового момента, $L=(r\times v)_x=\rho v_\varphi$
P4,P6,…	примитивный численный класс периодической орбиты указанного периода

Литература

1Born, M.; Wolf, E. Principles of Optics. 7th ed. Cambridge University Press, 1999.

2Tabachnikov, S. Geometry and Billiards. American Mathematical Society, 2005.

3Chernov, N.; Markarian, R. Chaotic Billiards. American Mathematical Society, 2006.

4Kogelnik, H.; Li, T. Laser Beams and Resonators. Applied Optics 5, 1550–1567 (1966).

5Siegman, A. E. Lasers. University Science Books, 1986.

6Kozlov, V. V.; Treshchev, D. V. Billiards: A Genetic Introduction to the Dynamics of Systems with Impacts. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 89. American Mathematical Society, 1991.

7Dragović, V.; Radnović, M. Poncelet Porisms and Beyond: Integrable Billiards, Hyperelliptic Jacobians and Pencils of Quadrics. Birkhäuser, 2011.

8do Carmo, M. P. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, 1976.

9Khaustov, V. I. Geometric Wave Engineering. Theory of Higher-Order Pseudoellipsoids. Volume 1: Constructive Geometry: Recursive Constructions and Computational Apparatus. Zenodo (2026). DOI: 10.5281/zenodo.20274309.