Геометрическая волновая инженерия

Зеркальные псевдогиперболоиды 2-го порядка

Геометрия поверхности, точное фокальное согласование и периодическая лучевая динамика

Хаустов Владимир Игоревич

ORCID: 0009-0007-3657-2309

Лаборатория геометрической волновой инженерии https://vihrihaosa.ru/

Лицензия: CC BY 4.0

Дата публикации: 13 октября 2026 года

DOI: 10.5281/zenodo.23323412

Научно-технический перевод с английского языка.

Редакция, адаптированная для русскоязычного инженера-исследователя.

Оригинал: Khaustov. V. Mirrored Pseudohyperboloids in Geometric Wave Engineering: Surface Geometry, Exact Focal Matching, and Periodic Ray Dynamics.
https://doi.org/10.5281/zenodo.23323412

Аннотация

Геометрия отражающей поверхности может определять распространение лучей, их взаимодействие с последовательными границами и формирование повторяющихся траекторий без изменения классического закона зеркального отражения. В настоящей работе вводятся и исследуются зеркальные псевдогиперболоиды (ZPHB) — класс составных отражающих поверхностей, разработанный в рамках Геометрической волновой инженерии (ГВИ), предлагаемого подхода к управлению распространением волн и лучей посредством целенаправленного проектирования физических границ.

Зеркальный псевдогиперболоид строится путём точного геометрического отражения конечных гиперболических образующих с последующим вращением полученных профилей вокруг заданной оси. Хотя отдельные образующие сохраняют фокальные свойства классических гипербол, составные поверхности обладают особой пространственной геометрией и системой внутренних и внешних фокальных геометрических мест. Полученная конструкция открывает новые возможности согласования лучевых траекторий между несколькими отражающими ветвями.

Центральным результатом является точное геометрическое условие четырёхотражательного фокального замыкания. При выполнении соответствующих геометрических ограничений луч последовательно отражается от четырёх различных ветвей, проходит через их внутренние фокальные точки и возвращается в исходное положение с первоначальным направлением. Установлены два независимых способа реализации такой конфигурации: изменение взаимного положения отражающих компонентов и изменение их геометрических параметров. Анализ также выявляет несколько допустимых геометрий, различия в устойчивости орбит и дополнительные классы периодических траекторий.

Исследование выходит за пределы плоского лучевого движения и распространяется на трёхмерные поверхности вращения, в которых фокальные точки образуют пространственные фокальные геометрические места и могут существовать немеридиональные периодические траектории. Аналитические выводы подкреплены независимо проверенными численными трассировками лучей, проверками геометрической допустимости и анализом устойчивости.

Полученные результаты устанавливают зеркальные псевдогиперболоиды как математически определённое семейство отражающих геометрий с управляемыми фокальными соотношениями и периодической лучевой динамикой. Они создают основу для дальнейших исследований многопроходных оптических систем, геометрических датчиков и структурированного переноса лучей. Установленные свойства относятся к идеальным геометрическим лучам; их распространение на устройства, работающие с волнами конечной длины, требует отдельной физической проверки.

Ключевые слова: *Геометрическая волновая инженерия; зеркальные псевдогиперболоиды; точная геометрия поверхностей; геометрическая оптика; зеркальное отражение; фокальное согласование; динамика периодических лучевых траекторий; оптические бильярды; пространственные периодические орбиты; фокальные кольца; перенос лучей; неквадрические поверхности вращения.*

Содержание

Аннотация ... 2
1 Введение ... 4
2 Геометрия поверхности ... 4
2.1 Точное построение и фокальная геометрия ... 4
2.2 Гауссова кривизна и неквадрическая геометрия ... 12
3 Лучевая модель и локальное отражение ... 13
3.1 Отображение столкновений и наблюдаемые величины ... 13
3.2 Классическое локальное фокальное отражение ... 15
4 Точные законы фокального согласования ... 17
4.1 Двухотражательный перенос через общий фокус ... 17
4.2 Четырёхотражательное согласование через разнесённые фокусы ... 19
4.3 Осевой перенос неизменных зеркал ... 21
4.4 Согласование формы и два допустимых радиуса ... 23
5 Проверка и периодическая лучевая динамика ... 27
5.1 Независимая проверка и перечисление фокальных состояний ... 27
5.2 Линейная устойчивость, возмущения и расстройка ... 30
5.3 Обычные периодические орбиты и продолжение ... 37
5.4 Более длинные периодические пути через фокус ... 42
5.5 Пространственные косые циклы и многоточечная постановка ... 43
6 Открытый лучевой транспорт ... 46
6.1 Выход лучей и концентрация путей ... 46
6.2 Канонический транспорт и структура фазового пространства ... 50
7 Физическая интерпретация и приложения ... 55
7.1 Физическая интерпретация и научный вклад ... 55
7.2 Перспективные технические приложения ... 56
7.3 Область применимости и ограничения ... 57
8 Заключение ... 57
Литература ... 58

1 Введение

Геометрическая волновая инженерия (ГВИ) — развиваемый в этой работе исследовательский подход к управлению распространением посредством геометрии границы. На лучевом уровне аналитически заданная поверхность определяет доступные столкновения, нормали отражения, последовательность встреч со стенками и отверстия, через которые лучи могут выйти. Поэтому объектом проектирования служит полное бильярдное отображение, порождённое границей, а не оптическое действие одного изолированного зеркала. В статье вводится семейство зеркальных псевдогиперболоидальных поверхностей и исследуется, как их точная геометрия определяет фокальный перенос, периодическое движение и открытый транспорт.

Псевдогиперболоид PHB получается вращением радиально смещённой гиперболы вокруг заданной общей оси. Приставка «псевдо» обозначает это построение, а не приближённость образующей. Зеркальный псевдогиперболоид ZPHB дополнительно использует точное евклидово отражение каждого конечного сегмента образующей перед вращением. Исследуемая элементарная симметричная сборка состоит из верхней и нижней образующих воронок и представляется четырьмя стенками в знаковом меридиональном сечении. В иерархии построений она обозначается PHB-2 или ZPHB-2; цифра не задаёт алгебраическую степень пространственной поверхности. Исследования исходной PHB описаны в [14]. Поверхность настоящей работы и условия её согласования ниже определяются явно.

Двухфокусное свойство гиперболы и симплектическая структура зеркальных бильярдов относятся к классической теории [2,9–13]. Вклад рассматриваемого построения состоит в аналитическом согласовании этих локальных свойств на составной открытой границе. Различаются отражение на одном сегменте, перенос к соседнему сегменту и возврат полного состояния положения и направления. Совпадение внутренних фокусов поддерживает непрерывное двухотражательное семейство. Разнесённые фокусы допускают заданный четырёхотражательный цикл при выполнении условия коллинеарности. Более длинные пути могут проходить через фокус после промежуточных нефокальных отражений; пространственные косые пути добавляют азимутальную степень свободы. Эти различия лежат в основе законов проектирования поверхности, динамических результатов и предложенных технических приложений.

2 Геометрия поверхности

2.1 Точное построение и фокальная геометрия

Обозначения. σ и m — коэффициенты зеркального преобразования; $\chi = u/U$ — нормированная граничная координата; δ — жёсткий перенос одной воронки, поэтому при симметричном разнесении $\Delta = 2\delta$. Отношение параметров формы равно $k = b/a$, а $q = c/a$. Радиальный профиль обозначается ρ(u); r — расстояние от фокуса до стенки в четырёхотражательном построении. Угол α отсчитывается от внутренней нормали; β — угол фокальной диагонали относительно радиального направления. Относительное изменение параметров в таблице 14 обозначается ε_g. Сохранённые обозначения внутри исходных рисунков соответствуют генерирующим скриптам.

Сначала определяется горизонтальная реализация в меридиональной плоскости. Координата сечения ρ является знаковой: справа $\rho > 0$, слева $\rho < 0$. Физический цилиндрический радиус равен $|\rho|$; осью вращения служит ось z. Положительные параметры a и b задают исходную гиперболу, а R — радиус её боковой кромки. Линейный эксцентриситет c, высота осевой конечной точки L и вспомогательная длина d определяются этими параметрами.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad L = a\sqrt{1 + (R/b)^2}, \qquad d = L - a. \quad (1)$$

Верхняя правая исходная ветвь соединяет точки (R, a) и (0, L). Её параметризация имеет вид ρ = R − b sinh u, z = a cosh u, где 0 ≤ u ≤ U и U = arsinh(R/b). Отражение этой конечной ветви относительно прямой через её концы определяет зеркальную образующую. Ортогональная матрица отражения задаётся двумя безразмерными коэффициентами σ и m.

$$\sigma = \frac{R^2-d^2}{R^2+d^2}, \qquad m = \frac{2Rd}{R^2+d^2}, \qquad \sigma^2 + m^2 = 1. \quad (2)$$

$$S = \begin{pmatrix} \sigma & -m \\ -m & -\sigma \end{pmatrix}, \qquad P(u) = \begin{pmatrix} R \\ a \end{pmatrix} + S \begin{pmatrix} -b\sinh u \\ a(\cosh u - 1) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Матрица S ортогональна: $S^TS = I_2$ и det S = −1. Она сохраняет расстояния, углы и принадлежность образующей к конике. Концы остаются неподвижными, поскольку лежат на прямой отражения. Следовательно, операция изменяет ориентацию гиперболической оси, сохраняя форму коники.

Нижняя правая стенка получается отражением верхней относительно z = 0; левые стенки получаются радиальным отражением относительно ρ = 0. В вычислительных таблицах четыре стенки обозначены UR, UL, LR и LL: верхняя правая, верхняя левая, нижняя правая и нижняя левая соответственно. Эти обозначения фиксируют физический порядок ударов и позволяют отделять смену маршрута от небольшого изменения координаты на той же ветви. В режиме 1 к верхним стенкам добавляется z-сдвиг +Δ/2, а к нижним −Δ/2. В режиме 2 такой дополнительный сдвиг точно равен нулю.

Фокусы преобразуются той же матрицей и теми же переносами, что и стенка. Для верхней правой ветви без дополнительного осевого сдвига получаются две точные точки I и E. Индекс I обозначает внутренний фокус, унаследованный от ближнего фокуса исходной ветви; индекс E обозначает второй, внешний фокус. Слово «внешний» здесь описывает положение относительно расчётной полости и роль в направлении луча.

$$I = (x_I, z_I) = \big(R - m(c-a),\ a - \sigma(c-a)\big). \quad (4)$$

$$E = (x_E, z_E) = \big(R + m(c+a),\ a + \sigma(c+a)\big). \quad (5)$$

В режиме 1 к z-координатам обеих точек верхней стенки добавляется Δ/2. Фокусы нижней стенки имеют противоположные z-координаты; у левой стороны меняется знак x. Поэтому в общем случае двумерное сечение содержит четыре различные внутренние фокальные точки. Расстояние между верхней и нижней точками на одной радиальной стороне равно $2|z_i + \Delta/2|$. Оно не является полной характеристикой оптики, поскольку те же длины могут сочетаться с разными наклонами осей, кривизной и положением внешних фокусов.

Построение с общим фокусом удовлетворяет условию $z_i = 0$. Подстановка σ даёт приведённое ниже равенство. Оно определяет опорную геометрию режима 1, но не накладывается в режиме 2, где изменяется форма стенок. Каждый сегмент сохраняет собственную точную фокальную пару даже при утрате совпадения внутренних фокусов соседних сегментов.

$$(2a - c)R^2 + c(L-a)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_I = 0. \quad (6)$$

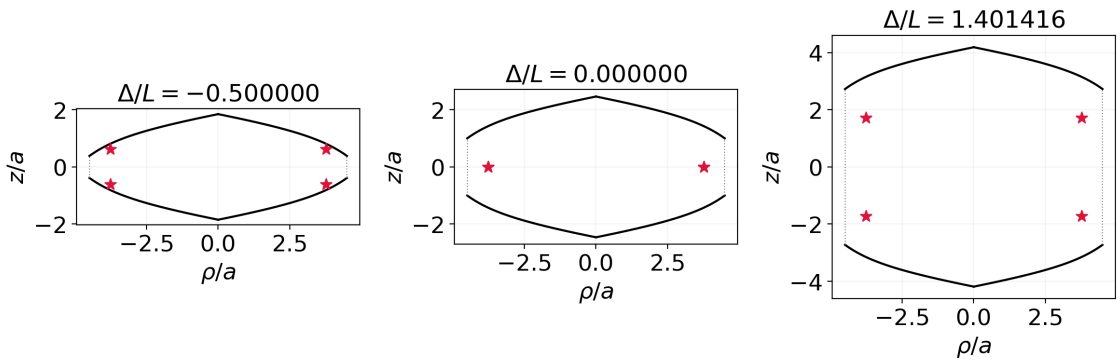

Рисунок 1. Три геометрии режима 1 при одних и тех же a, b и R. Слева воронки сближены, в центре показана контрольная общая фокальная геометрия, справа показан вычисленный сдвиг фокального замыкания. Стенки во всех панелях построены одной и той же точной зеркальной формулой.

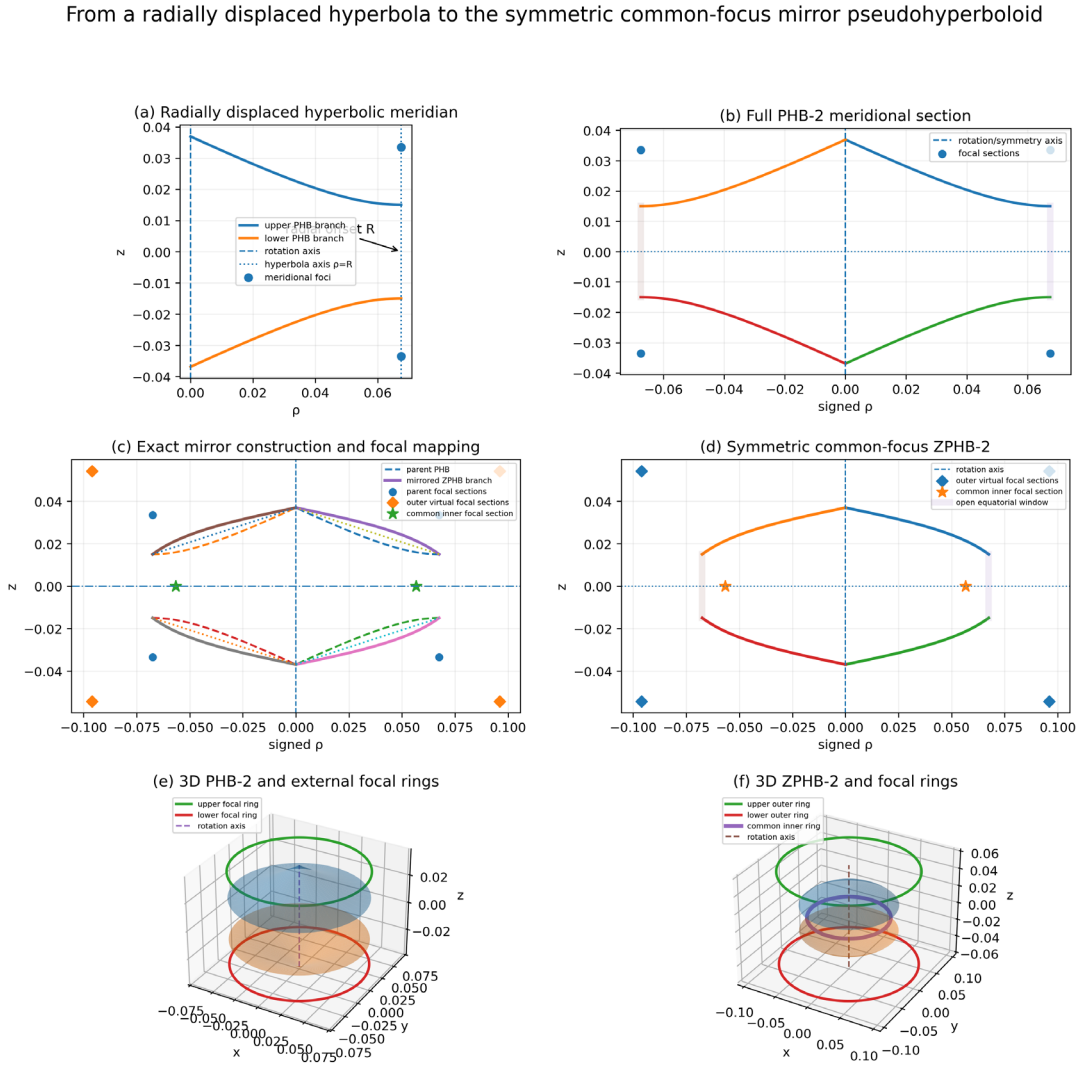

Рисунок 2. Переход от радиально смещённой исходной гиперболы к симметричной H-ZPHB-2 с общим фокусом: исходная PHB, ось вращения, точное зеркальное построение, отображённые фокусы и соответствующие пространственные фокальные кольца.

Исходная меридиональная ветвь РНВ в знаковых цилиндрических координатах (ρ,z) задаётся выражением

$$\rho(|z|) = R - b\sqrt{[(|z|/a)^2 - 1]},\ a \le |z| \le L \quad (7)$$

$$L = a\sqrt{[1 + (R/b)^2]},\ c = \sqrt{(a^2 + b^2)},\ F_+ = (R, c),\ F_- = (R, -c) \quad (8)$$

Здесь a>0 и b>0 задают исходную гиперболу, R>0 — её радиальное смещение, L — осевая конечная точка при ρ=0, а F± — исходные меридиональные фокусы. Для верхней ветви зададим A+=(R,a), B+=(0,L), d=L-a и v=B+-A+=(-R,d). Точное евклидово отражение произвольной точки P относительно бесконечной прямой A+B+ имеет вид

$$t(P) = [(P - A_+) \cdot v]/(v \cdot v),\ Q(P) = A_+ + t(P)v,\ M(P) = 2Q(P) - P \quad (9)$$

Нижняя отражённая ветвь строится аналогично по точкам B-=(0,-L) и A-=(R,-a), а знаковые радиальные копии дают четыре физических меридиональных сегмента H1-H4. Поскольку M является изометрией, каждый отражённый физический сегмент остаётся конечным сегментом точной классической гиперболы, а его два фокуса являются точными отражениями исходных фокусов.

Для верхней ветви отражение исходного фокуса F+=(R,c) даёт кандидат на внутренний фокус. Поскольку (F+-A+)=(0,c-a),

$$t_{\text{in}} = (c - a)d/(R^2 + d^2) \quad (10)$$

$$\rho_{\text{in}} = R(1 - 2t_{\text{in}}),\ z_{\text{in}} = 2(a + t_{\text{in}}d) - c \quad (11)$$

Отражение F-=(R,-c) даёт соответствующий внешний виртуальный фокус,

$$t_{\text{out}} = -(c + a)d/(R^2 + d^2) \quad (12)$$

$$\rho_{\text{out}} = R(1 - 2t_{\text{out}}),\ z_{\text{out}} = 2(a + t_{\text{out}}d) + c \quad (13)$$

Отражение относительно z = 0 переводит верхний внутренний фокус в нижний. Поэтому их совпадение эквивалентно $z_i = 0$ и уже записанному условию общего фокуса. Это условие ограничивает параметры поверхности до запуска какого-либо луча.

Для точного построения с общим фокусом параметры a, b и R должны удовлетворять определённому ограничению. Вводятся k = b/a, q = c/a = $\sqrt{(1 + k^2)}$ и x = R/b. Условие общего фокуса сводится к следующему безразмерному соотношению.

$$A = k^2(q - 2)/q,\ x = R/b = 2\sqrt{A}/(1 - A) \quad (14)$$

Конечное положительное решение существует только при 0<A<1. Нижнее неравенство требует q>2 и, следовательно, k>sqrt(3). Верхнее неравенство задаёт конечную границу k_max=2.2707543184... . Поэтому

$$\sqrt{3} < k < 2.2707543184\ldots \quad (15)$$

При выбранном масштабе a > 0 и любом k из этого интервала геометрия общего фокуса однозначно определяется выражениями

$$b = ka,\ R = 2b\sqrt{A}/(1 - A),\ L = a\sqrt{[1 + (R/b)^2]},\ c = aq \quad (16)$$

Следовательно, произвольная тройка (a,b,R), вообще говоря, не задаёт ZPHB с общим фокусом. Точное семейство имеет одну масштабную степень свободы и один допустимый безразмерный параметр формы k. После этого четыре физических сегмента наследуют отображённые внутренние и внешние фокусы от одного и того же евклидова преобразования. Именно это ограниченное многообразие параметров является математической основой всех расчётов семейства общего фокуса, приведённых далее.

Горизонтальная и вертикальная реализации используют одно и то же отражённое меридиональное построение, но разные оси вращения. В горизонтальной реализации H-ZPHB исходная образующая вращается вокруг ρ = 0. В вертикальной реализации V-ZPHB вся меридиональная геометрия вместе с фокусами жёстко поворачивается на 90°, после чего осью вращения служит прямая через два повёрнутых внутренних фокуса. Обозначения H/V задают эти правила построения, а не ориентацию готового объекта в лаборатории. В H-ZPHB внеосевые меридиональные фокусы образуют фокальные кольца. В V-ZPHB внутренние фокусы на оси вращения остаются точками, а внеосевые фокусы образуют кольца. На рисунках 3 и 4 показаны обе реализации при k = 2. Лучевые расчёты статьи относятся к H-ZPHB: семейству общего фокуса, представителям с осевым переносом и представителям с настройкой формы. V-ZPHB включена как геометрически определённая альтернатива, а не как динамически проверенный эквивалент.

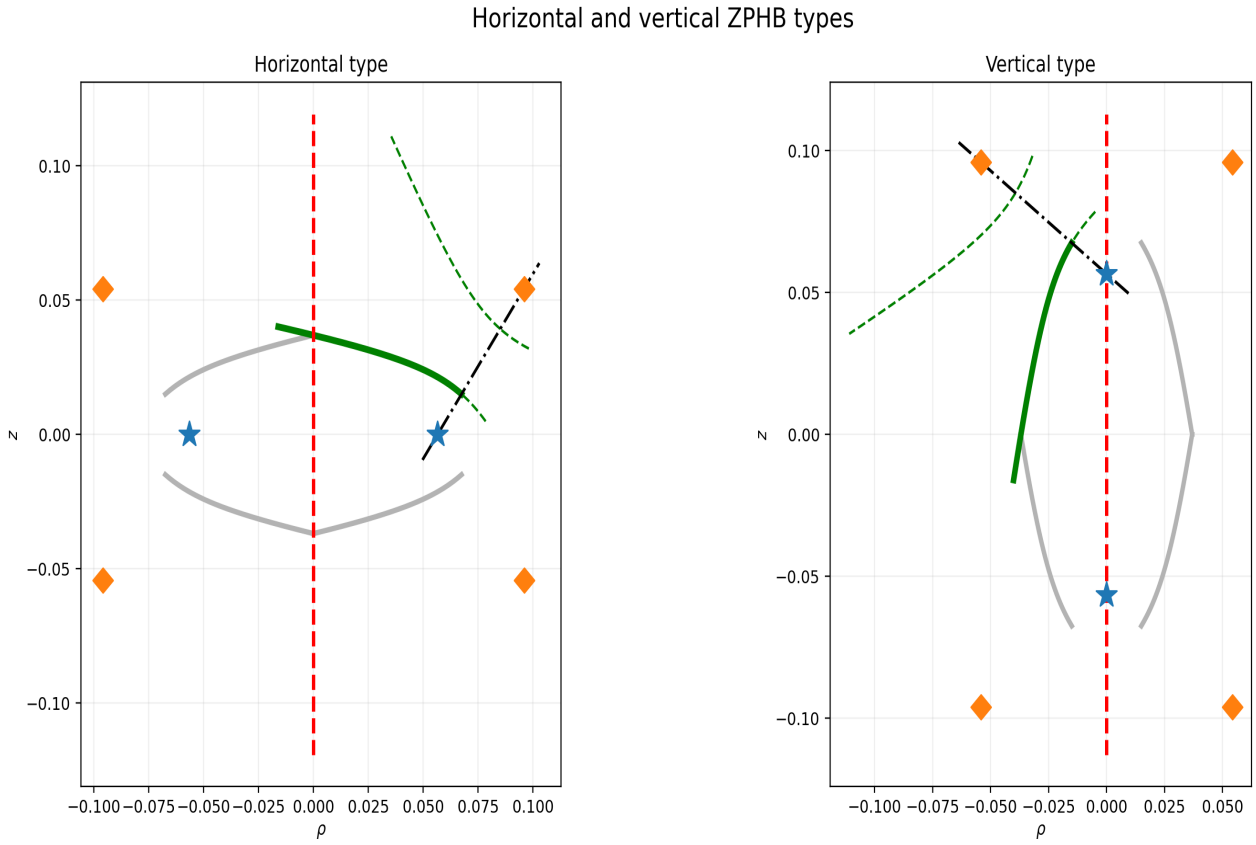

Рисунок 3. Двумерное построение горизонтального и вертикального типов зеркального псевдогиперболоида второго порядка для одной и той же точной геометрии k=2. Слева: горизонтальный тип с исходной меридиональной ZPHB и вертикальной осью симметрии/вращения ρ=0. Справа: вертикальный тип, полученный жёстким поворотом всей меридиональной конструкции на 90°, так что ось проходит по линии между двумя повернутыми внутренними фокусами. Показаны физическая образующая, короткое пунктирное продолжение соответствующей полной гиперболы и все внутренние и внешние фокусы.

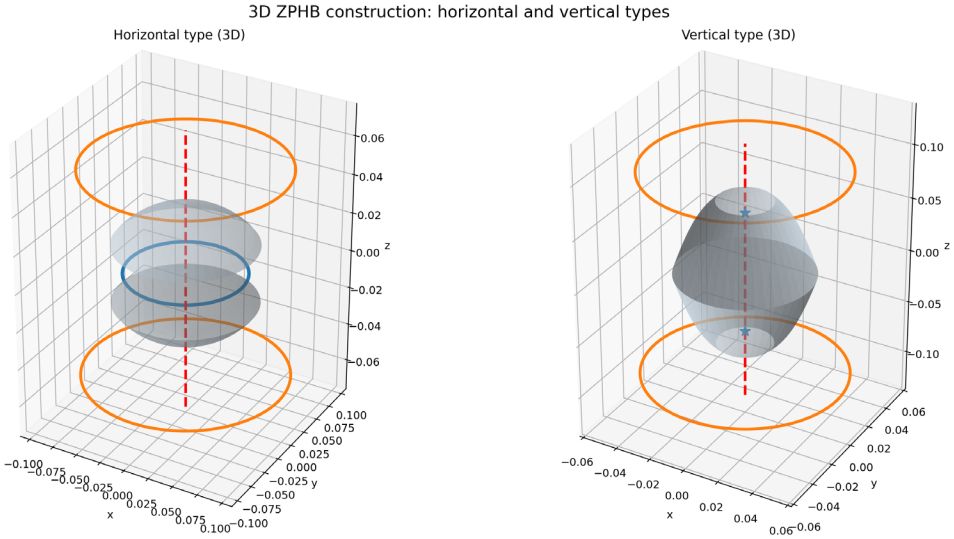

Рисунок 4. Трёхмерные реализации, точно соответствующие рисунку 3. Слева: горизонтальный H-ZPHB, полученный вращением неповернутой меридиональной конструкции вокруг ρ=0; внеосевой внутренний фокус образует внутреннее фокальное кольцо. Справа: вертикальный V-ZPHB после поворота меридиональной конструкции на 90° и вращения вокруг линии между двумя внутренними фокусами; внутренние фокусы остаются осевыми точками, а внеосевые отображённые фокусы образуют кольцевые локусы.

Выведенное выше точное построение с общим фокусом представляет собой выделенное подсемейство, а не обязательное условие существования любого ZPHB. После евклидова отражения каждый физический сегмент стенки остаётся точным конечным сегментом гиперболы и сохраняет собственную отображённую внутреннюю и внешнюю фокальную пару даже тогда, когда верхняя и нижняя части смещаются друг относительно друга. Вне общего фокуса многообразия исчезает только вырождение, при котором внутренние фокальные образы верхней и нижней воронок совпадают.

Наиболее прозрачное обобщение получается при жёстком осевом смещении двух образующих воронок. Обозначим верхнюю и нижнюю меридиональные ветви с общим фокусом через Γ_+(u) и Γ_-(u), а их общий внутренний фокус в правой знаковой половине через F_in=(ρ_f,0). Перенесём всю верхнюю ветвь вместе с её фокальной парой на +δ вдоль оси построения, а всю нижнюю ветвь вместе с её фокальной парой на -δ. Тогда

$$\Gamma_+^{(\delta)}(u) = \Gamma_+(u) + (0,\delta),\ \Gamma_-^{(\delta)}(u) = \Gamma_-(u) + (0,-\delta) \quad (17)$$

$$F_{\text{in}}^{(+)} = (\rho_f,\delta),\ F_{\text{in}}^{(-)} = (\rho_f,-\delta),\ \Delta F = |F_{\text{in}}^{(+)} - F_{\text{in}}^{(-)}| = 2|\delta| \quad (18)$$

Поскольку жёсткий перенос является изометрией, локальный гиперболический закон отражения каждой воронки не изменяется. Однако общая внутренняя фокальная структура исчезает при любом δ≠0. Для неравных осевых переносов δ_+ и δ_- внутренние фокусы смещаются на те же величины, а их осевое расстояние становится |δ_+ - δ_-|. Поэтому как раздвижение воронок, так и их прохождение через положение точного построения с общим фокусом меняет порядок/знак положений фокусов, но любое ненулевое относительное смещение даёт разнесённых фокусов ZPHB.

Для горизонтальной трёхмерной реализации, используемой в настоящей статье, общий меридиональный фокус при вращении образует одно внутреннее фокальное кольцо. При описанном осевом расщеплении это одно кольцо превращается в два соосных кольца при z=+δ и z=-δ с тем же радиусом ρ_f. Это точное геометрическое изменение, не требующее изменения самой гиперболической образующей. Более общие асимметричные модификации,

включая независимое изменение параметров верхней и нижней воронок, могут дополнительно менять как радиусы, так и осевые координаты фокусов. Симметричные представители с разнесёнными фокусами исследуются ниже; полностью асимметричные семейства выходят за границы работы.

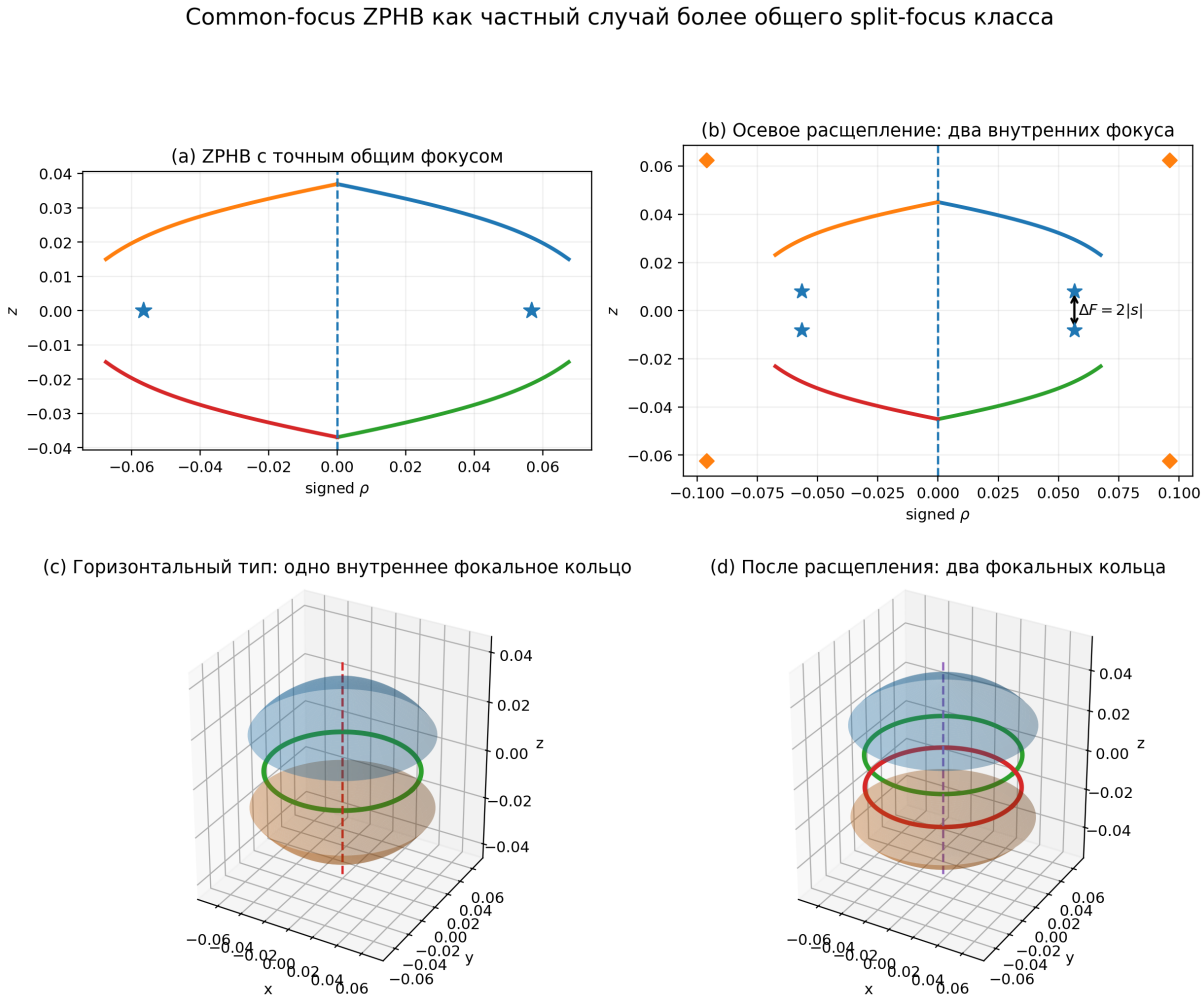

Рисунок 5. Построения с общим и разнесёнными фокусами. (a) Меридиональная геометрия общего фокуса. (b) Симметричный осевой перенос разделяет внутренние фокусы без изменения образующих гипербол. (c) В H-ZPHB внеосевой общий фокус образует одно кольцо. (d) Перенос разделяет его на два соосных кольца с расстоянием ΔF = 2|δ|. Показана схема геометрического построения.

Утверждение о фокальном маршруте имеет физический смысл лишь после проверки границы. Два аналитически правильных отражения могут оказаться недостижимыми, если стенки пересекаются, если луч раньше выходит через окно или если предполагаемая точка лежит на продолжении за конечной кромкой. Поэтому допустимость проверяется независимо от малого остатка уравнения замыкания. В рассматриваемом классе $\sigma > 0$ её основные условия можно доказать непосредственно из производных стенки.

Из параметризации верхней правой ветви следует $\rho' = -b\sigma \cosh u - am \sinh u < 0$. Радиальная координата монотонно уменьшается от R до нуля. Производная z' равна $bm \cosh u - a\sigma \sinh u$. Её значение при $u = 0$ положительно. При $u = U$ прямое сокращение даёт также положительное выражение, а функция $z'/\cosh u = bm - as \tanh u$ монотонно убывает. Следовательно, на всём конечном отрезке $z' > 0$ и верхняя стенка соединяет высоты a и L без обратного хода.

$$\rho' = -b\sigma\cosh u - am\sinh u < 0, \qquad z' = bm\cosh u - a\sigma\sinh u > 0. \quad (19)$$

$$z'(U) = \frac{Rc^2d^2}{ab(R^2+d^2)} > 0, \qquad \frac{d^2z}{d\rho^2} = \frac{ab}{(\rho')^3} < 0. \quad (20)$$

Последнее равенство означает строгую вогнутость верхней стенки как графика z = f(ρ) на каждой радиальной стороне. Нижняя стенка является её зеркальной выпуклой копией. С учётом осевого стыка верхняя граница образует вогнутый график над всем интервалом −R < ρ < R, а нижняя выпуклый. Полость между ними, мысленно замкнутая плоскими боковыми окнами, выпукла. Поэтому прямой отрезок между двумя различными регулярными точками её стенки не пересекает третью стенку раньше предполагаемого конца. В численном ядре это свойство всё равно проверяется выбором ближайшего контакта.

Минимальный вертикальный промежуток между зеркальными стенками возникает у боковой кромки и равен 2a + Δ. Для правильно упорядоченной полости в режиме 1 требуется Δ > −2a. При равенстве сходятся кромки окон. При −2L < Δ < −2a стенки пересекаются. Если продолжать перемещение до Δ ≤ −2L, можно получить другую инвертированную топологию, но она не относится к исследуемому расположению верхней и нижней воронок. Следовательно, одна лишь положительность параметров a, b и R не делает произвольное смещение допустимым.

$$\Delta > -2a \qquad \text{для непересекающейся правильно упорядоченной полости.} \quad (21)$$

Геометрическая допустимость не гарантирует, что внутренние фокусы находятся внутри свободной полости. При сильном сближении стенка может оказаться между своим внутренним фокусом и другим фокусом пары. Тогда прямая, проходящая через оба фокуса, существует математически, но фактический свободный полёт ограничен зеркальной стенкой и не посещает обе точки. Именно эта разница проявляется в исходном обследовании запусков со стенок при Δ = −0,75L: граница ещё не пересекается, однако оба разделённых внутренних фокуса уже не принадлежат последующему вертикальному свободному участку.

Доказательство этого разделения условий будет дано ниже через длину r от внутреннего фокуса до стенки. Для контрольных a = 1 и b = 2 получено r = 1,423985688947413. Реальное прохождение обоих фокусов на вертикальном участке требует Δ > −r, то есть существенно более сильного ограничения, чем Δ > −2. Поэтому вся физически допустимая полость разделяется на области с различной доступностью фокальных точек. Обсуждать «внутренний фокус» без проверки его фактического положения в изменённой полости было бы недостаточно.

Основные опорные геометрии общего фокуса приведены в таблице 1 и на рисунке 6. Для каждого допустимого k безразмерные соотношения определяют b, R, L и c при выбранном масштабе a. Численное сравнение отображённых верхнего и нижнего внутренних фокусов подтверждает их совпадение с машинной точностью.

Таблица 1. Основные опорные геометрии общего фокуса.

k	a	b	R	L	c	rho_f/R
1.74	0.015	0.02610	0.00537707	0.015315	0.0301033	0.672012
1.80	0.015	0.02700	0.01816030	0.0180773	0.0308869	0.711797
1.90	0.015	0.02850	0.03766003	0.0248571	0.0322064	0.776164
2.00	0.015	0.03000	0.06749138	0.0369293	0.0335410	0.838525

k	a	b	R	L	c	rho_f/R
2.10	0.015	0.03150	0.12964337	0.0635311	0.0348891	0.899258
2.20	0.015	0.03300	0.36402794	0.166146	0.0362491	0.958655

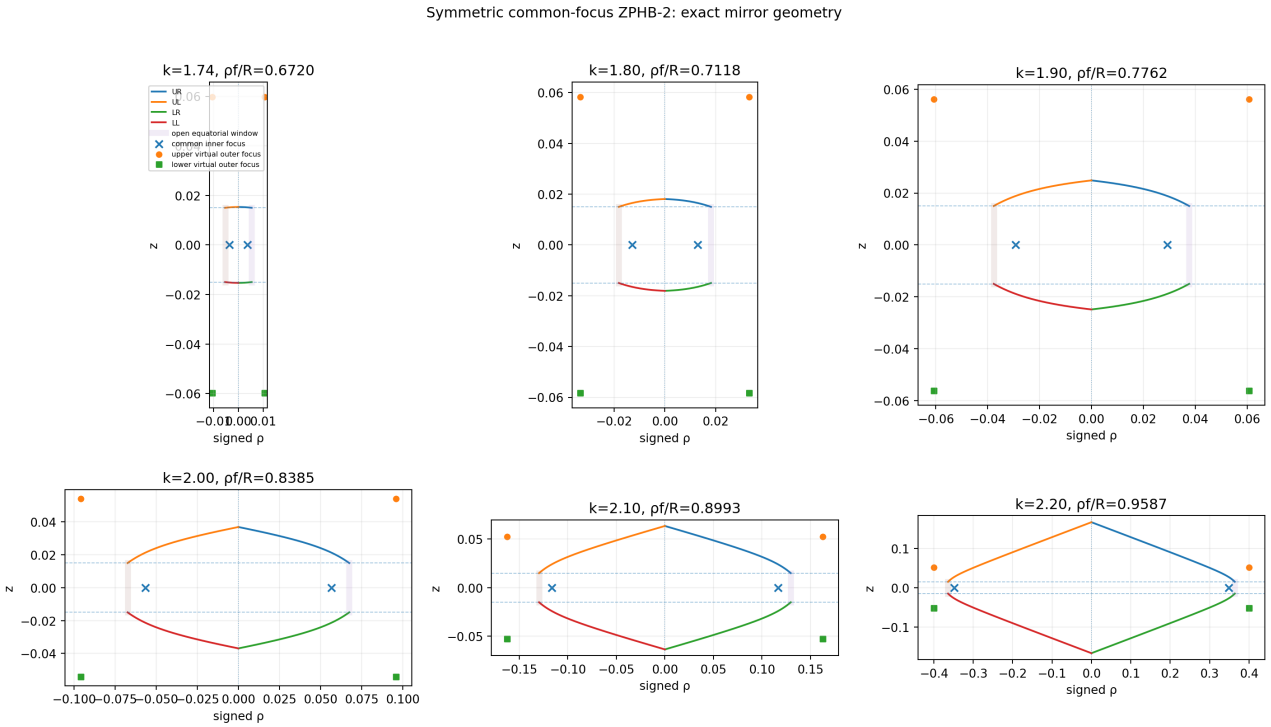

Рисунок 6. Шесть основных точных геометрий с общим фокусом H-ZPHB-2, использованных как опорные точки лучевой динамики.

2.2 Гауссова кривизна и неквадрическая геометрия

Гауссова кривизна K не зависит от ориентации нормали: её обращение меняет знаки обеих главных кривизн, но не их произведение. Отражение меридиональной кривой с последующим вращением вокруг исходной оси отличается от отражения всей пространственной поверхности. Поэтому знак гауссовой кривизны следует выводить для новой поверхности вращения. У исходной ветви ориентированный меридиональный числитель равен −ab, у зеркальной — ab. Приведённые ниже выражения устанавливают $K > 0$ на регулярной горизонтальной зеркальной ветви указанного класса; соответствующая исходная ветвь PHB имеет $K < 0$. Осевой перенос не изменяет этих производных.

Параметризуем исходную верхнюю ветвь как $\rho(u)=R-b\sinh u$ и $z(u)=a\cosh u$, $0\le u<u^*=\operatorname{asinh}(R/b)$. Пусть $d=L-a$ и $D=R^2+d^2$. Линейную часть отражения относительно верхней хорды можно записать $H=[[A,B],[B,-A]]$, где $A=(R^2-d^2)/D$ и $B=-2Rd/D$. На точном семействе общего фокуса $A>0$ и $B<0$.

Здесь принципиально важна одна тонкость. Отражение двумерной меридиональной кривой не тождественно отражению всей трёхмерной поверхности PHB в евклидовом пространстве. Отражённая кривая затем вращается вокруг исходной глобальной оси $\rho=0$. Поэтому меридиональная коника остаётся изометричной исходной, а азимутальная главная кривизна изменяется из-за нового расстояния до оси вращения.

Для отражённой меридианы $\Gamma_m(u)=(\rho(u),\zeta(u))$ на всей открытой ветви выполняется $\rho'<0$ и $\zeta'>0$. Отражение меняет знак ориентированного меридионального числителя кривизны, поэтому $\rho'\zeta''-\zeta'\rho''=ab$. При $V^2=b^2\cosh^2 u+a^2\sinh^2 u$ главные кривизны равны $k_m=ab/V^3$ и $k_\varphi=\zeta'/(\rho V)$. Следовательно,

$$K(u) = ab\zeta'(u)/\{\rho(u)[b^2\cosh^2 u + a^2\sinh^2 u]^2\} \quad (22)$$

Все множители положительны при $0\le u<u^*$, поэтому $K>0$ на открытой физической зеркальной ветви. При приближении к осевому концу $\rho\to 0$ меридиональная кривизна остаётся конечной, а азимутальная расходится как $1/\rho$. Поэтому $K\sim C^*/\rho$ и $\lim(\rho\to 0+)\ \rho K=C^*>0$. Осевой конец является сингулярной граничной вершиной, а не регулярной C^2-точкой поверхности вращения.

$$K(\rho) \sim C^*/\rho \to +\infty,\ \lim(\rho \to 0^+)\,\rho K = C^* > 0 \quad (23)$$

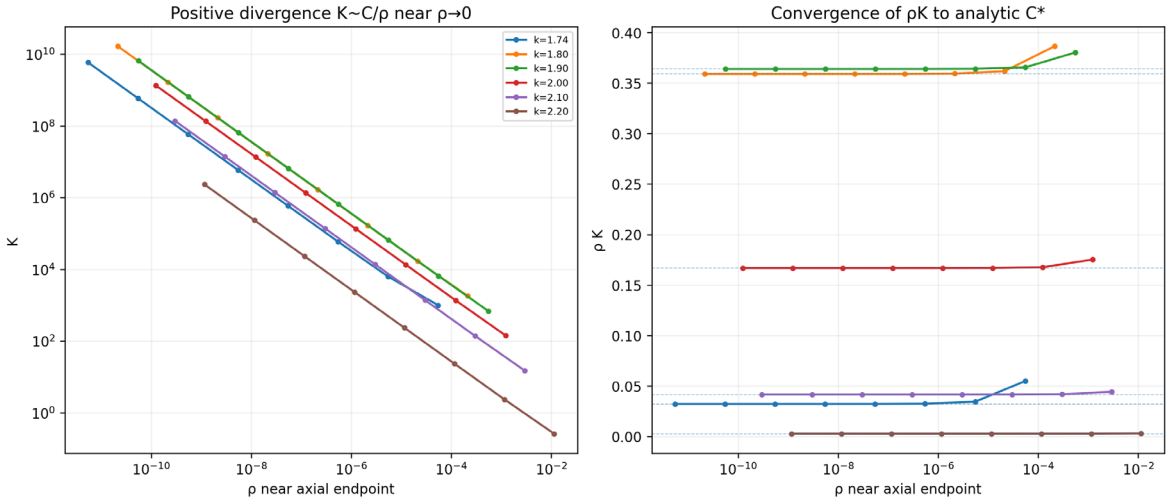

Рисунок 7. Сгенерированный скриптом аудит кривизны у осевого конца: K положительно расходится при rho→0, тогда как rho K сходится к аналитической константе C*.

Неквадрический характер следует из правила вращения. Неявное уравнение зеркальной гиперболы обычно содержит смешанный радиально-осевой член и наклонённую ось коники. Подстановка $\rho=\sqrt{(x^2+y^2)}$ создаёт члены, линейные по корню, включая $z\sqrt{(x^2+y^2)}$. Квадрика, инвариантная относительно вращения вокруг оси z, может содержать x^2+y^2, z^2, z и константу, но не такие члены. Исключение корня обычно даёт четвёртую степень с дополнительными исходными ограничениями знака и конечной ветви. Точные конические меридианы совместимы с неквадрической пространственной поверхностью. Теорема о кривизне H-ZPHB не переносится автоматически на альтернативную ось вращения.

3 Лучевая модель и локальное отражение

3.1 Отображение столкновений и наблюдаемые величины

Четыре отражающие ветви обозначаются UR, UL, LR и LL. Состояние после столкновения имеет вид $X_n = (w_n, \chi_n, \alpha_n)$, где w_n задаёт ветвь, $\chi_n = u_n/U$ — её нормированную координату, а α_n — знаковый угол исходящего направления относительно внутренней нормали. Бильярдное отображение T переводит это состояние в следующее физически достижимое столкновение.

Для каждой кандидатной ветви пересечение находится из её точного неявного конического уравнения $F_j(q_n+t\,d_n)=0$. Принимаются только положительные параметры луча, удовлетворяющие невозведённому в квадрат физическому уравнению ветви и её области; следующим событием является самый ранний допустимый кандидат. В точке столкновения направление обновляется по $d_{out}=d_{in}-2(d_{in}\cdot n_{hat})n_{hat}$ с использованием аналитической

нормали поверхности. Полиномиальные корни, не удовлетворяющие физическим ограничениям, отбрасываются.

Экваториальный интервал является реальным отверстием, а не поглощающей численной меткой. Для каждой траектории, для которой не найдено следующей стенки, последний выходящий сегмент аналитически продолжался до знакового ρ=±R. Все 9590 таких терминальных лучей в фокальном корпусе пересекают открытый интервал |z|≤a. Траектории, достигшие заданного горизонта отражений, считаются правосторонне цензурированными и никогда не переобозначаются как навсегда захваченные.

Основной корпус фокального запуска включает 25 точных геометрий общего фокуса. Для каждой геометрии фиксированная внутренняя сетка 11×9 даёт 99 источников, и каждый источник запускается к четырём знаковым внешним мнимым фокальным целям: 396 лучей на геометрию и 9900 лучей суммарно. Горизонт составляет 500 отражений. Финальный аудит содержит 479082 события столкновения. Максимальные остатки равны 7.25×10^-13 для неявного уравнения стенки, 4.55×10^-13 для квадратного пересечения и 4.44×10^-16 для тождества зеркального отражения по нормали.

$$v_{\text{out}} = v_{\text{in}} - 2(v_{\text{in}} \cdot \hat{n})\hat{n} \quad (24)$$

Число столкновений характеризует пребывание в дискретных событиях отражения; физическая задержка равна суммарной длине свободных пролётов, делённой на скорость распространения. Траектория, достигшая предельного числа столкновений, остаётся правосторонне цензурированной. Каноническая мера на границе имеет вид dμ = dℓ dp, где ℓ — длина дуги и p = sin α. Поэтому сетку, равномерную по χ = u/U и α, необходимо взвешивать множителем |dΓ/dχ| cos α. Карты путевой плотности суммируют пройденную длину сегментов в пространственных ячейках. Они зависят от возбуждения и не должны интерпретироваться как оптическая интенсивность или инвариантная плотность вероятности.

Основное вычислительное ядро записывает ту же гиперболу через гиперболические функции параметра u. Такой переход является алгебраической заменой переменной в исходной формуле, а не реконструкцией поверхности. Граница не заменяется ломаной при поиске столкновения. Полилиния используется исключительно для вывода изображения с 350 или 450 точками на каждой ветви; координата каждого столкновения находится на аналитической конике. Нормаль вычисляется производными той же параметризации, а не разностями соседних точек рисунка.

В исходном исследовании запусков со стенок были сохранены сводные результаты и рисунки, но не все свободные сегменты. Поэтому расчёт повторили с полными таблицами лучей и столкновений для обоих режимов. Исходный класс геометрии и вспомогательные функции также выполнялись без изменений и сопоставлялись с новым ядром при каждом столкновении. Числа столкновений и последовательности стенок совпали для всех 5400 лучей. Максимальное расхождение положения после нескольких отражений составило 9,3844 × 10^{-12} в единицах a, а единичного направления — 3,8373 × 10^{-12}.

Независимость контрольного решателя обеспечивается другим уравнением пересечения. Основное ядро решает квадратное уравнение для exp(u), а контрольное ядро подставляет прямолинейный полёт в неявное уравнение гиперболы и решает квадратное уравнение по времени. Они проверяют один и тот же физический контакт, но используют различные неизвестные и различные вычислительные выражения. В высокоточной проверке все геометрические параметры, включая критическое разделение, заново вычисляются с 90 десятичными цифрами, поэтому проверяется не округлённый набор уже подобранных координат.

Таблица 2. Объём и точность независимых вычислительных проверок.

Материал проверки	**Объём**	**Результат**
Утверждённые функции геометрии	80 случаев и 32320 точек	Ошибка стенки / масштаб ≤ $5{,}33\cdot10^{-15}$
Полная повторная серия V124	5400 лучей и 37769 столкновений	Число ударов и порядок стенок совпали
Направленные фокальные запуски	18392 физических начальных состояния	Проверены оба фокуса и оба смысла направления
Конечный каталог сопряжений	1600 состояний в двух режимах	По одному геометрическому фокальному циклу в каждом режиме
Высокоточная проверка	7 геометрий и 90 цифр	Замыкание подтверждено независимым полётом

3.2 Классическое локальное фокальное отражение

Каждая зеркально преобразованная ветвь остаётся точной гиперболой. Для выбранной ветви разность расстояний до внешнего и внутреннего фокусов постоянна и равна 2a. Это известное свойство коники; оно не зависит от того, совпадает ли внутренний фокус с фокусом соседней стенки. Осевой перенос также не изменяет расстояний от точки стены до её собственных фокусов. Поэтому искать новый закон посредством проверки одного отражения недостаточно: правильная гипербола всегда проходит эту проверку.

$$|P - E| - |P - I| = 2a. \quad (25)$$

Зеркальный закон выводится из этого равенства без приближения малых углов. Если A = (P − E)/|P − E| и B = (P − I)/|P − I|, то градиент разности расстояний равен A − B и перпендикулярен касательной. Зеркальное отражение направления A относительно этой касательной даёт B. Обращение обоих векторов показывает, что луч, направленный к E, отражается к I. В обратном смысле луч, вышедший из I и достигший стены, отражается так, как если бы он вышел из E. В последнем случае E является виртуальной точкой продолжения назад.

Направления к внешнему фокусу и от него лежат на одной фокальной прямой, но задают разные физические запуски. Допустимый падающий луч должен подходить к отражающей стенке изнутри полости. В расчёте разнесённых фокусов проверяются оба фокуса каждой стенки и оба знака направления; запуски с неверной стороны исключаются. Это различие существенно при сопоставлении фокального тождества с физически доступным лучевым путём.

Для явной угловой записи удобно временно использовать собственную систему гиперболы. Координата ξ направлена вдоль её оси, η перпендикулярна оси, а точка стены имеет ξ = a cosh u и η = b sinh u. Фокусы находятся при ξ = ±c. Пусть θ_i и θ_e обозначают знаковые углы векторов P − I и P − E относительно положительной оси ξ. При η > 0 обычная формула тангенса половинного угла даёт следующие выражения; предел u → 0 понимается односторонне.

$$\tan\frac{\theta_I}{2} = \frac{b}{a+c}\coth\frac{u}{2}, \qquad \tan\frac{\theta_E}{2} = \frac{b}{a+c}\tanh\frac{u}{2}. \quad (26)$$

$$\tan\frac{\theta_I}{2}\tan\frac{\theta_E}{2} = \kappa, \qquad \kappa = \frac{c-a}{c+a}. \quad (27)$$

Равенство получается потому, что длины до фокусов равны c cosh u − a и c cosh u + a. Произведение половинных тангенсов сокращается до $b^2/(a + c)^2$, что тождественно (c − a)/(c + a). После ортогонального отражения всей геометрии углы просто отсчитываются в отражённой собственной системе. Численный коэффициент κ поэтому полностью определяется отношением b/a. В режиме 1 он постоянен при всех Δ, а в режиме 2 меняется вместе с формой.

Существование такого локального соотношения не означает сохранения κ как динамического интеграла между любыми ударами. После свободного полёта луч в общем случае подходит к другой стенке под направлением, не связанным с её собственным фокусом. Тогда гипербола отражает его по обычному зеркальному правилу, но применять фокальную угловую формулу к этому удару нельзя. Для составной ZPHB требование сопряжённости следующего удара является отдельным геометрическим условием.

Точные фокальные свойства гиперболических зеркал и роль действительных и мнимых источников описаны у Torras [12] и Goldberg с Sanchez del Rio [13]. Выводимые здесь условия согласования применяют эти классические свойства к явно определённой сборке ZPHB.

Начальное направление задаётся от внутреннего источника S к внешнему мнимому фокусу, после чего трассировщик самостоятельно определяет первую физическую стенку. Из 9900 запусков 9352 сначала сталкиваются со стенкой, а 8920 попадают на требуемую ветвь. Поэтому доля требуемой ветви составляет 90.10% всех запусков и 95.38% при условии наличия первого столкновения. Для всех 8920 правильных первых попаданий отражённый луч проходит через соответствующий внутренний фокус с максимальным поперечным промахом 5.51×10^-15 и положительным параметром пересечения вперёд по лучу.

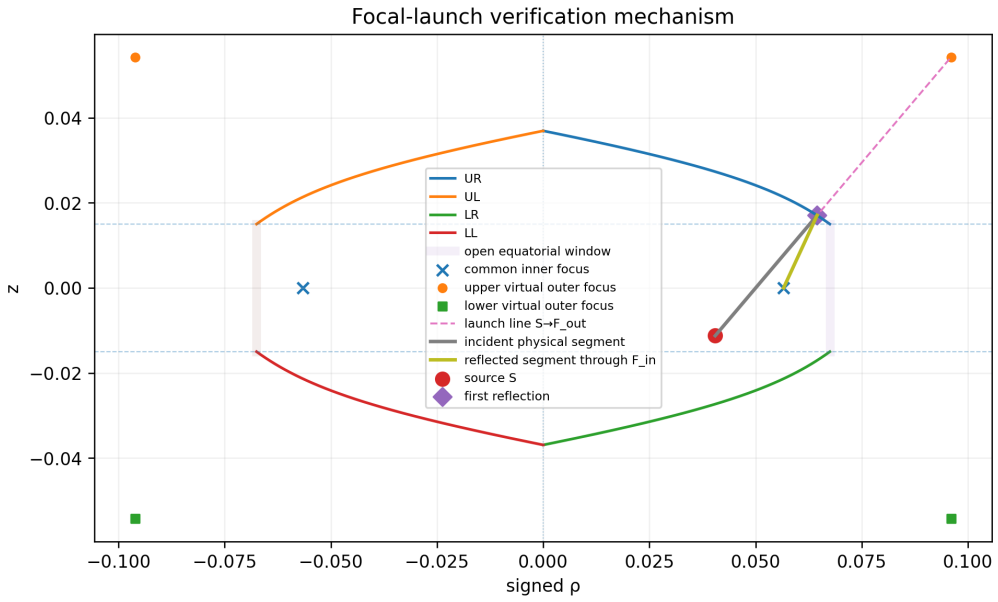

Рисунок 8. Сгенерированный лучевым скриптом механизм проверки фокального запуска. Внешний мнимый фокус задаёт начальное направление; первая физическая стенка выбирается по порядку событий; правильное первое попадание отражается через отображённый внутренний фокус.

Первое отражение подтверждает классическое двухфокусное свойство и само по себе не устанавливает нового фокального закона. Специфический результат ZPHB относится к сборке четырёх конечных сегментов, принадлежащих разным полным гиперболам. Их отображённые фокусы можно согласовать так, чтобы выделенная фокальная точка одного сегмента определяла доступ к следующему. Периодическое замыкание, пребывание и концентрация тогда зависят от полного отображения переходов между ветвями, а не от фокального свойства изолированного сегмента.

Разделение локальной фокальности и глобальной динамики принципиально для интерпретации всей статьи. Условие общего фокуса определяет выделенный аналитический элемент семейства ZPHB, но периодическая возвратность, время жизни и транспорт должны устанавливаться из полной динамики переходов между ветвями, а не выводиться из свойства одной коники.

4 Точные законы фокального согласования

4.1 Двухотражательный перенос через общий фокус

Контрольная ZPHB нужна для понимания того, что именно изменяется при разнесении. На каждой радиальной стороне верхняя и нижняя гиперболы имеют общий внутренний фокус. Луч, направленный к внешнему фокусу верхней стенки, после первого отражения проходит через общий внутренний фокус и достигает нижней стенки как луч, исходящий из её собственного внутреннего фокуса. После второго отражения он уходит как из нижнего внешнего виртуального фокуса. Здесь согласование двух ударов обеспечивается совпадением точки, а не отдельным подбором каждой траектории.

Для этого общего фокального семейства можно получить точное преобразование координат точек отражения. Вводятся $q = c/a$, $\kappa = (q - 1)/(q + 1)$, $D = 1/\sqrt{[q(q - 2)]}$ и $h_0 = D\sqrt{\kappa}$. Пусть u и v являются параметрами ударов верхней и нижней стенок на одной стороне, а $X = \tanh(u/2)$ и $Y = \tanh(v/2)$. Прямая свободного полёта должна пройти через общий внутренний фокус. Подстановка точных стенок и исключение направления дают дробно-линейное соответствие X и Y.

$$XY + h_0(X + Y) = \kappa, \qquad Y = \frac{\kappa - h_0 X}{X + h_0}. \quad (28)$$

Допустимый непрерывный диапазон завершается при Y = 0, когда второй удар подходит к кромке. Поэтому предельное значение первого параметра равно $u_{max,ф} = 2\,\mathrm{artanh}(\sqrt{\kappa}/D)$. Для a = 1 и b = 2 получается $u_{max,ф} = 0{,}966964215970399$. В расширенном расчёте семь начальных точек взяты внутри этого интервала и распространены точным решателем; для каждой проверено уравнение пары и физический порядок двух столкновений. На рисунке показаны фактические свободные отрезки, без дорисовывания к фокусам.

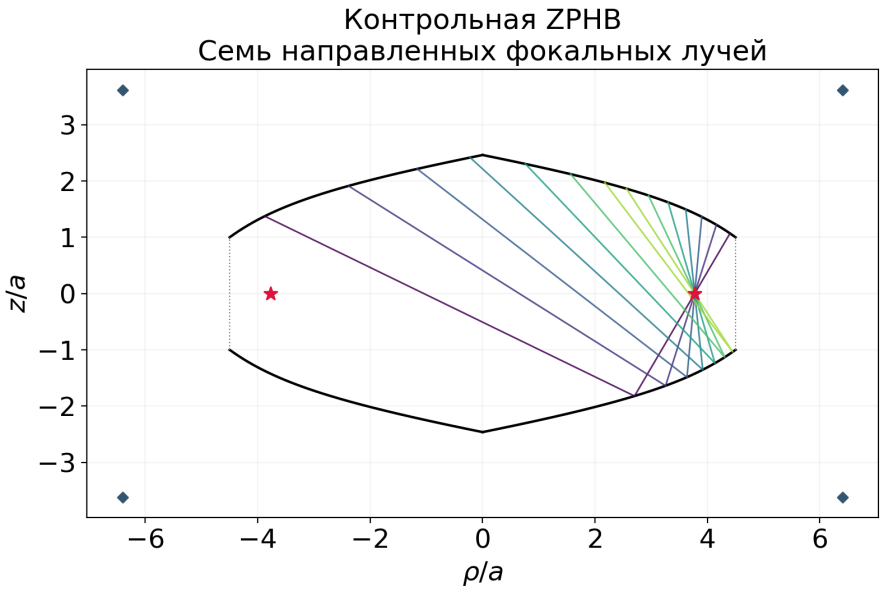

Рисунок 9. Семь лучей непрерывного двухотражательного фокального семейства в контрольной ZPHB. Начальные направления перед первым отражением обращены к внешнему фокусу верхней правой стенки. Отрезки после отражений рассчитаны до ближайшего физического контакта. Разные цвета обозначают разные лучи.

Производная дробно-линейного отображения по X равна $-(\kappa + h_0^2)/(X + h_0)^2$. Она зависит от исходной точки. Поэтому даже в общей фокальной геометрии нельзя по одному постоянному к заключить, что весь угловой пучок сжимается с одним коэффициентом. В пределах допустимой апертуры отдельные интервалы направлений могут уменьшаться или увеличиваться. Для построения закона угловой плотности требуется дополнительно преобразовать X в физический угол луча и учитывать якобиан источника.

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{\kappa + h_0^2}{(X + h_0)^2}. \quad (29)$$

Реальный второй удар этой пары не гарантирует бесконечного продолжения фокальной цепочки. После него луч связан с внешним фокусом нижней ветви, а у следующей встреченной стенки собственные фокусы обычно расположены иначе. Следовательно, непрерывная двухотражательная сопряжённость контрольной геометрии и замкнутый четырёхотражательный маршрут разделённой геометрии являются разными математическими объектами. Контроль показывает механизм переноса, но сам по себе не задаёт закон периодического повторения.

В общей фокальной геометрии также существует известная обычная орбита C00002 периода четыре. Её замыкание подтверждено с ошибкой положения $2{,}7013 \cdot 10^{-15}$a. Однако эта орбита не проходит через внутренние фокусы; максимальный локальный угловой остаток фокальной сопряжённости равен приблизительно 0,7726. Значит, наличие красивого замкнутого четырёхугольника нельзя использовать как доказательство фокального закона. Фокальное прохождение и периодичность необходимо проверять совместно.

Двухотражательное отображение проверено на 12 000 физических парах для 25 форм общего фокуса с максимальным остатком уравнения пары $1{,}50 \times 10^{-15}$. При k = 2 полные входная и выходная угловые апертуры обе равны 31,0202173 градуса; локальный угловой коэффициент меняется от 0,7049150 до 1,4186107. Локальное сжатие компенсируется расширением на других участках, поэтому к не является универсальным коэффициентом сжатия. Все 6408 намеченных двухударных пар исходного фокального корпуса удовлетворяют сопряжению

второй стенки, тогда как ни одно записанное третье отражение ему не удовлетворяет. Асимметричные контроли расщепления фокусов сохраняют фокальность первой стенки и устраняют наблюдённое согласование второй. Исходная PHB и прямой конус также имеют собственные двухотражательные соотношения изображения. Отличие состоит в точной фокальной связности заданных соседних коник, а не в исключительном существовании изображения.

4.2 Четырёхотражательное согласование через разнесённые фокусы

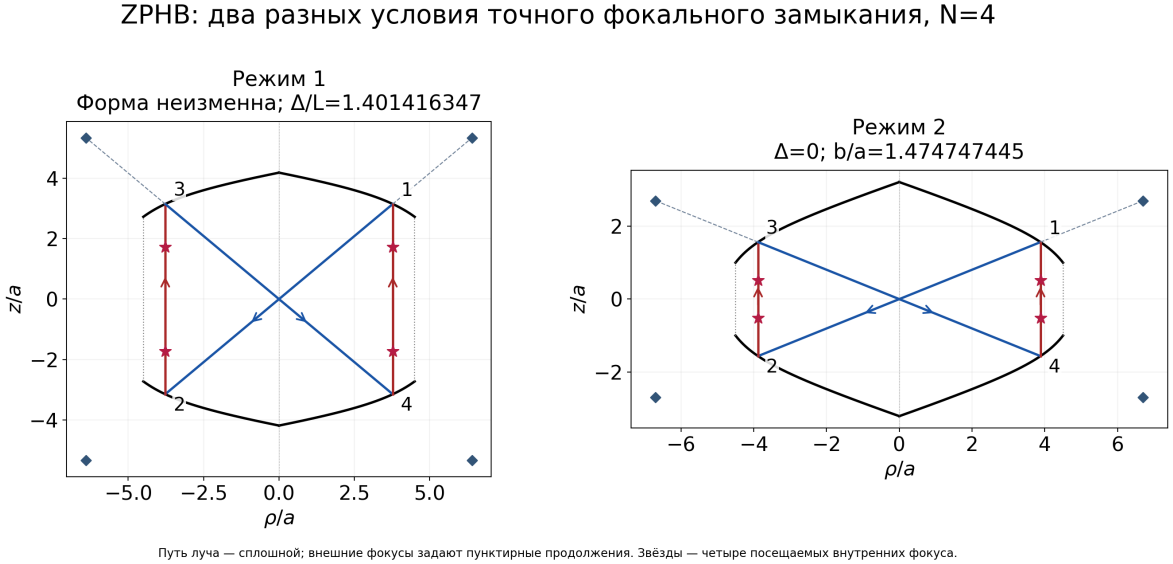

Рисунок 10. Две рассчитанные фокальные орбиты периода четыре. Слева форма стенок сохранена и изменён только осевой сдвиг. Справа дополнительный сдвиг равен нулю и изменён параметр b. Сплошные отрезки являются физическим путём луча. Звёздами обозначены внутренние фокусы, ромбами внешние фокусы; пунктир у внешних фокусов показывает только продолжение направления.

Следующий шаг состоит в выделении точки каждой стенки, находящейся непосредственно над её внутренним фокусом. Благодаря радиальной и осевой симметрии вертикальная прямая соединяет внутренние фокусы верхней и нижней стенок на одной стороне. Если она пересекает оба зеркала в регулярных точках и оба фокуса лежат между этими точками, она создаёт физический межфокальный свободный участок. Его длина до верхней стенки относительно верхнего внутреннего фокуса обозначается r.

Проекция в собственной системе гиперболы даёт $\xi = c - \sigma r$ и $\eta = mr$. Подстановка в $\xi^2/a^2 - \eta^2/b^2 = 1$ приводит к квадратному равенству, которое удобно записать в факторизованной форме. Требуется корень, относящийся к выбранной конечной ветви; выбор другого формального корня без проверки ветви может перенести удар на непредусмотренное продолжение гиперболы.

$$\big((c\sigma + a)r - b^2\big)\big((c\sigma - a)r - b^2\big) = 0. \quad (30)$$

$$r = \frac{b^2}{a + c\sigma}, \qquad u_v = \operatorname{arsinh}\frac{mr}{b}. \quad (31)$$

При этом $a \cosh u_v = c - \sigma r$ и $b \sinh u_v = mr$. Подстановка u_v в точную зеркальную параметризацию возвращает $P_v = (x_i, z_i + r + \Delta/2)$. Нижняя зеркальная точка имеет координаты $(x_i, -z_i - r - \Delta/2)$. У всех исследованных критических геометрий u_v находится строго между кромками 0 и U. Это отдельно проверяется до запуска маршрута и подтверждается независимым решателем.

$$P_v = (x_I, h), \qquad Q_v = (x_I, -h), \qquad h = z_I + r + \Delta/2. \quad (32)$$

Положение фокусов внутри свободного участка определяется строгим неравенством $h > |z_i + \Delta/2|$. При его выполнении луч проходит обе внутренние точки на конечном отрезке от верхнего зеркала к нижнему или в обратном направлении. В контрольной общей фокальной геометрии $z_i = 0$, поэтому условие сокращается до $\Delta > -r$. В режиме 2 при положительном z_i и r оно выполнено автоматически для рассматриваемой фокальной ветви, поскольку дополнительного осевого сдвига нет.

$$h > |z_I + \Delta/2| \qquad \text{для прохождения обоих внутренних фокусов.} \quad (33)$$

Сам по себе такой вертикальный участок не замыкает луч. Направление к внешнему фокусу верхней стенки после отражения становится вертикальным вниз, проходит внутренние точки и на нижней стенке отражается как направление из её внешнего фокуса. Дальнейшая траектория определяется положением остальных стенок. Поэтому вертикальный мост является строительным элементом закона; окончательное согласование возникает, когда диагональный участок соединяет его с зеркальным мостом на противоположной стороне.

Разность расстояний до фокусов даёт также точное соотношение оптических длин для этой пары ударов. Обозначим верхний внешний фокус E_u, нижний E_l и соответствующие точки P_v, Q_v. Тогда сумма расстояний до внешних фокусов за вычетом физической вертикальной длины равна $4a - 2z_i - \Delta$. Расстояния до внешних точек служат геометрическими величинами сопряжения; они не включаются в реальное время полёта луча, поскольку виртуальные продолжения не посещаются.

$$|P_v - E_u| + |Q_v - E_l| - |P_v - Q_v| = 4a - 2z_I - \Delta. \quad (34)$$

Рассмотрим четыре регулярные точки зеркальных стенок $P = (x_i, h)$, $Q = (-x_i, -h)$, $T = (-x_i, h)$ и $W = (x_i, -h)$. Они образуют два вертикальных межфокальных участка и два перекрёстных диагональных участка. Предполагаемый порядок движения $P \to Q \to T \to W \to P$ означает удары $UR \to LL \to UL \to LR$. Луч подходит к P вертикально вверх, то есть от внутреннего фокуса верхней правой стенки. Локальное свойство гиперболы заставляет отражённый луч уходить по прямой от её внешнего фокуса E.

Чтобы этот выходящий луч попал именно в Q, точки E, P, начало координат и Q должны лежать на одной прямой. Центральная симметрия преобразует внешний фокус верхней правой стенки в внешний фокус нижней левой. Поэтому на конце диагонали тот же луч направлен к внешнему фокусу нижней левой стенки. Она отражает его вертикально вверх к своему внутреннему фокусу. После прохождения двух левых внутренних точек луч достигает T. Дальнейшая пара ударов является радиально отражённой копией уже описанной пары.

$$P = (x_I, h), \quad Q = (-x_I, -h), \quad T = (-x_I, h), \quad W = (x_I, -h). \quad (35)$$

$$P \to Q \to T \to W \to P, \qquad \text{UR} \to \text{LL} \to \text{UL} \to \text{LR} \to \text{UR}. \quad (36)$$

Условие коллинеарности P и E относительно начала координат записывается одним скалярным определителем. Внешняя точка верхней стенки после осевого переноса имеет координаты $(x_e, z_e + \Delta/2)$. Следовательно, точный остаток Ф равен $x_i(z_e + \Delta/2) - x_e(z_i + r + \Delta/2)$. Его обращение в нуль является законом согласования фокального четырёхотражательного маршрута.

$$\Phi = x_I(z_E + \Delta/2) - x_E(z_I + r + \Delta/2) = 0. \quad (37)$$

Достаточность условия следует из последовательного применения локального закона к четырём ударам, как было описано выше. При $x_i > 0$, $h > 0$ и действительном конечном положении точек каждый диагональный отрезок лежит внутри выпуклой полости. Вертикальные отрезки лежат внутри неё по условию доступности фокусов. Поэтому

предписанный конец каждого отрезка является ближайшим физическим зеркальным контактом, а не пересечением, найденным после пропущенной стенки. Численный алгоритм проверяет этот порядок независимо от доказательства выпуклости.

Необходимость Φ = 0 в рассматриваемом симметричном классе также непосредственна. Если диагональ должна соединить P с центрально симметричной точкой Q, её прямая проходит через начало координат. Если удар в P должен остаться локально фокальным при входящем вертикальном луче, отражённая прямая обязана проходить через E. Следовательно, P и E должны быть коллинеарны с началом координат. Тем самым Φ = 0 является необходимым и достаточным условием именно этого симметричного фокального маршрута при перечисленных условиях допустимости. Оно не классифицирует автоматически все возможные орбиты произвольного периода.

По завершении четырёх ударов луч возвращается в P и имеет то же исходящее направление, поскольку в P вновь приходит вертикально вверх. После двух ударов он находится в T, а T отличается от P при $x_i > 0$. После одного или трёх ударов он находится на другой стенке. Поэтому период четыре является примитивным, а не двукратным повторением двухударной траектории. Обращение направления даёт ту же геометрическую орбиту; четыре возможные точки старта не создают четыре разные геометрические орбиты.

На двух вертикальных участках посещаются все четыре внутренние фокальные точки. Диагональные участки связаны с внешними фокусами только коллинеарностью и направлением. Внешние фокусы лежат за зеркальными стенками и не входят в физический маршрут. Такое разделение позволяет однозначно понимать рисунки: сплошные линии представляют свободный полёт, а короткие пунктирные линии служат проверкой продолжения фокальной прямой.

$$\tan\beta = \frac{h}{x_I} = \frac{z_E + \Delta/2}{x_E}, \qquad \ell_4 = 4h + 4\sqrt{x_I^2 + h^2}. \quad (38)$$

Угол β измеряется между диагональю и радиальным направлением в сечении. Полная физическая длина периода складывается из двух вертикальных отрезков длиной 2h и двух диагоналей длиной $2\sqrt{(x_i^2 + h^2)}$. При единичной скорости эта длина является временем возврата. При постоянной физической скорости v время равно ℓ_4/v. Внешние фокальные расстояния в ℓ_4 не добавляются. Формула показывает точную связь между геометрией, направлением луча и числом отражений для найденного семейства.

4.3 Осевой перенос неизменных зеркал

В первом режиме исходная геометрия имеет $z_i = 0$, а a, b и R остаются постоянными. Значения x_i, x_e, z_e и r в формулах этого раздела относятся к исходной неподвижной конструкции. После симметричного сдвига меняются только вертикальные координаты и высота h. Поэтому условие Φ = 0 линейно по Δ и может быть решено явно. Получается единственный сдвиг данного симметричного фокального маршрута.

$$\boxed{\Delta_* = \frac{2(x_I z_E - x_E r)}{x_E - x_I}, \qquad r = \frac{b^2}{a + c\sigma}.} \quad (39)$$

Знаменатель равен 2cm и положителен для конечной контрольной конструкции. Следовательно, критический сдвиг однозначен. В этой записи нет численного подбора угла: точка отражения u_v сначала определяется собственным фокусом стенки, а затем общий сдвиг вычисляется так, чтобы её фокальный выход совпал с диагональю к противоположной стенке. После этого направление луча задаётся зеркальным отражением вертикального входа. Трассировка является проверкой уже выведенной конструкции, а не поиском визуально похожей замкнутой линии.

Для конечного семейства исходных общих фокусов удобно выразить закон через единственную безразмерную форму k = b/a и q = √(1 + k²). Положим H = q − (q² − 1)(q − 2). Тогда точная общая фокальная геометрия имеет R/a = 2(q² − 1)√[q(q − 2)]/H и допустима при q > 2, H > 0. Это соответствует √3 < k < 2,2707543184. Подстановка её параметров в закон сдвига даёт полностью рациональное выражение Δ*/a через q.

$$\frac{R}{a} = \frac{2(q^2-1)\sqrt{q(q-2)}}{H}, \qquad H = q - (q^2-1)(q-2) > 0. \quad (40)$$

$$\frac{\Delta_*}{a} = \frac{q^6-4q^5+4q^4+6q^3-11q^2+2}{H(2q-1)}. \quad (41)$$

Положительность критического сдвига можно доказать, не опираясь на график. Если y = q − 2 > 0, числитель последней формулы превращается в 6 + 28y + 41y² + 38y³ + 24y⁴ + 8y⁵ + y⁶. Все коэффициенты положительны, а знаменатель положителен в конечном общем фокальном семействе. Поэтому Δ* > 0: данный фокальный цикл возникает при раздвижении воронок. Он автоматически удовлетворяет условию непересечения Δ > −2a и условию доступности внутренних фокусов Δ > −r. Вырожденные пределы R → 0 и R → ∞ не включаются в доказательство регулярной конечной орбиты.

При a = 1 и b = 2 получены R = 4,499425544225889 и L = 2,461951981052455. Неподвижная внутренняя точка имеет x_i = 3,772883016220528 и z_i = 0. Длина r равна 1,423985688947413. Критическое разделение составляет Δ* = 3,450219751578597. Верхний внутренний фокус после сдвига находится на высоте 1,725109875789298; точка верхнего удара находится на высоте h = 3,149095564736711. Расстояние между внутренними фокусами одной стороны равно самому Δ*, что является особенностью именно общего фокального исходного состояния.

Таблица 3. Опорная фокальная орбита, полученная осевым переносом.

Величина	**Режим 1 при a = 1**
b и R	2 и 4,499425544225889
Критический сдвиг Δ*	3,450219751578597
Нормированный сдвиг Δ*/L	1,401416346919841
Параметр точки удара u_v	0,407155844084253
Высота точки удара h	3,149095564736711
Угол диагонали β	39,85058981041432°
Длина периода ℓ_4	32,25403181526145
Ошибка замыкания положения / a	$1{,}4043\cdot10^{-15}$
Ошибка возврата единичного направления	$1{,}1102\cdot10^{-15}$

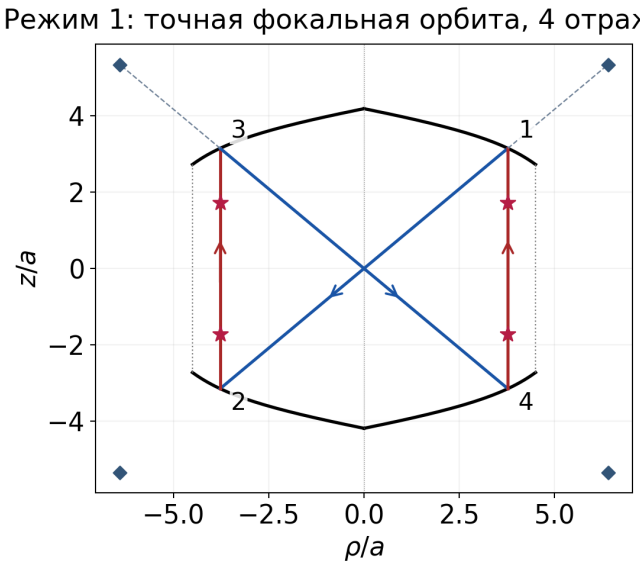

Рисунок 11. Точная фокальная орбита режима 1 при Δ*/L = 1,401416346919841. Последовательность физических ударов 1–2–3–4 соответствует UR–LL–UL–LR. Два вертикальных участка проходят через четыре различные внутренние фокальные точки. Форма стенок совпадает с контрольной конструкцией; изменено только положение воронок.

Максимальная дистанция от четырёх внутренних фокусов до соответствующих конечных отрезков равна $3{,}1792 \cdot 10^{-15}$a. Проверяется не расстояние до бесконечной прямой: проекция каждой фокальной точки должна лежать строго между концами участка. Это исключает ложное прохождение, возникающее при продолжении луча за стенку. Все четыре отражения дополнительно проверены на локальную фокальную сопряжённость, и максимальный синус углового остатка составляет $2{,}3203 \cdot 10^{-15}$.

Исходное обследование запусков со стенок завершалось при Δ/L = 1, тогда как фокальное согласование требует Δ*/L = 1,4014163469. Следовательно, нужная геометрия находилась вне девяти исследованных сдвигов. Отсутствие обнаруженной фокальной периодической орбиты в этом обследовании не противоречило аналитическому закону; увеличение числа запусков при тех же сдвигах не добавило бы недостающую геометрию.

В дополнительной проверке рассмотрены двенадцать различных исходных общих фокальных форм с k от 1,74 до 2,2. Для каждой сначала отдельно вычисляется её собственная контрольная геометрия, после чего выполняется только осевой перенос. Эта вспомогательная проверка универсальной формулы не смешивает режимы: ни в одном эксперименте первого режима форма стенки не изменяется при сканировании Δ. У сильно неустойчивых предельных форм двойная арифметика усиливает ошибки, поэтому три случая проверены также с 90 цифрами.

4.4 Согласование формы и два допустимых радиуса

Во втором режиме дополнительный осевой сдвиг равен нулю при любом выборе a, b и R. Высота фокального удара равна $h = z_i + r$. Верхняя и нижняя стенки по-прежнему являются точными гиперболами, связанными исходными симметриями, но их внутренние фокусы не обязаны совпадать. Условие четырёхотражательного фокального цикла принимает следующий вид.

$$\boxed{x_I z_E - x_E\left(z_I + \frac{b^2}{a+c\sigma}\right) = 0, \qquad \Delta = 0.} \quad (42)$$

Этот закон отличается от прежнего требования $z_i = 0$. Совпадение внутренних фокусов связывает только их координаты. Новое условие связывает внутреннюю точку, внешнюю точку и точку стены на вертикальной фокальной прямой. Геометрически оно требует, чтобы внешняя фокальная прямая из этой точки стены прошла через центр всей конструкции. Поэтому фокальный цикл второго режима может существовать при ненулевом разнесении внутренних фокусов без какого-либо дополнительного перемещения воронок.

Для дальнейшего анализа вводятся безразмерные величины $q = c/a$ и $t = L/a - 1$. Параметры коники связаны соотношением $R/a = \sqrt{(q^2 - 1)}\sqrt{[t(t + 2)]}$. После подстановки точных координат фокусов и r условие $\Phi = 0$ сокращается до квадратного многочлена по t. Так устраняется необходимость искать замыкание в трёхмерной сетке a, b и R.

$$\Pi(q,t) = A(q)t^2 + B(q)t + C(q) = 0, \qquad t > 0. \quad (43)$$

$$A(q) = q(q^3 + 3q^2 - 4q - 8). \quad (44)$$

$$B(q) = 4q^4 + 10q^3 - 12q^2 - 30q - 8. \quad (45)$$

$$C(q) = 4(q+1)^2(q^2 - 3), \qquad \frac{R}{a} = \sqrt{q^2 - 1}\sqrt{t(t+2)}. \quad (46)$$

Эквивалентность многочлена исходному геометрическому определителю проверяется и в явной нормированной форме. Обозначим $D_t = q^2t + 2(q^2 - 1)$ и $N_t = (q^2 - 2)t + 2(q^2 - 1)$. Тогда $\Phi/(aR)$ равен $q(q - 1)\Pi/[D_t(D_t + qN_t)]$. В регулярном классе рассматриваемого фокального семейства знаменатель не равен нулю. Следовательно, корни многочлена являются именно корнями условия коллинеарности, а не результатом добавочного возведения в квадрат.

$$\frac{\Phi}{aR} = \frac{q(q-1)\Pi(q,t)}{D_t(D_t+qN_t)}. \quad (47)$$

$$D_t = q^2t + 2(q^2 - 1), \qquad N_t = (q^2 - 2)t + 2(q^2 - 1). \quad (48)$$

В расчёте разнесённых фокусов это тождество дополнительно проверено на 300 независимо сформированных положительных наборах параметров. Максимальная абсолютная разность нормированных выражений составила $1{,}90958 \times 10^{-14}$. Так проверяется реализация алгебраических соотношений; физическая допустимость устанавливается отдельно. Определитель Φ задаёт геометрию согласования, а многочлен классифицирует число радиусов и предельные отношения параметров формы.

Если $a = 1$ и R оставлен равным контрольному $R_0 = 4{,}499425544225889$, решение даёт $b^* = 1{,}474747444567769$. Новая высота L составляет 3,210682386069660. Внутренний фокус верхней правой стенки находится в точке (3,880563749927140; 0,522243262046789), внешний в точке (6,701419892692989; 2,699923386136835). Длина вертикального фокального плеча r составляет 1,041190306896885; точка удара находится на высоте $h = 1{,}563433568943674$.

Таблица 4. Опорная фокальная орбита, полученная согласованием формы.

Величина	**Режим 2 при a = 1 и R = R_0**
Критический параметр b*	1,474747444567769
Дополнительный осевой сдвиг	Точно 0
Высота осевой кромки L	3,210682386069660

Величина	**Режим 2 при a = 1 и R = R₀**
Разнесение внутренних фокусов одной стороны	1,044486524093579
Параметр точки удара u_v	0,533225492581941
Угол диагонали β	21,94392672503674°
Длина периода ℓ_4	22,98841660523577
Ошибка замыкания положения / a	$4{,}4409 \cdot 10^{-15}$
Максимальный промах конечного отрезка мимо фокуса / a	$1{,}7902 \cdot 10^{-15}$

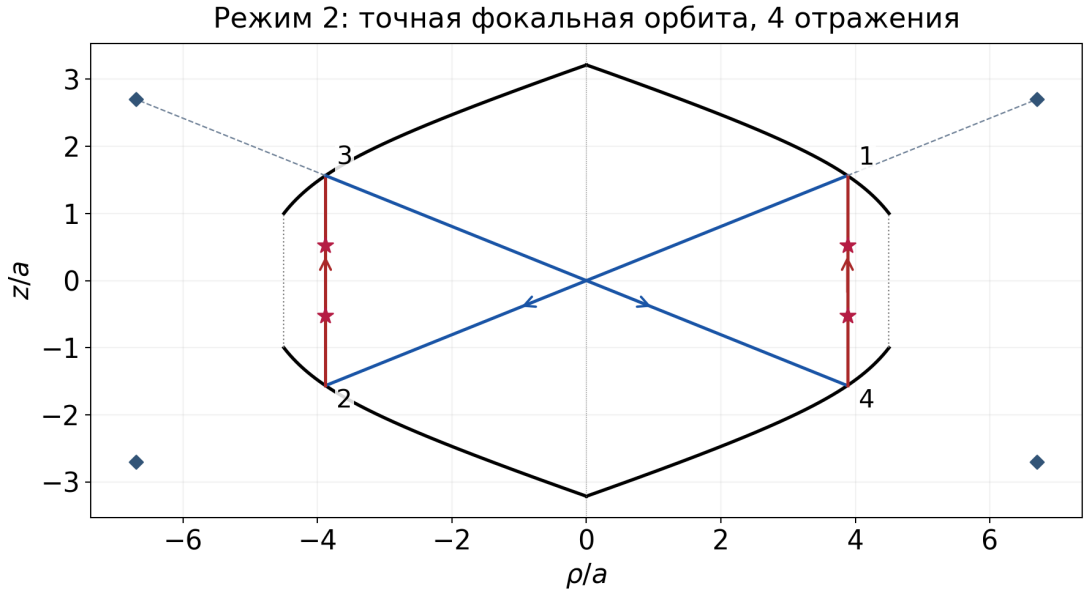

Рисунок 12. Точная фокальная орбита режима 2 при a = 1, R = R₀, b = 1,474747444567769 и Δ = 0. Четыре внутренних фокуса разделены из-за изменения формы. Все стенки и все точки ударов вычислены точными формулами исходного зеркального построения.

Угловой остаток локальной фокальной сопряжённости не превышает $1{,}7469 \cdot 10^{-15}$. Ошибка возврата единичного направления равна $4{,}0413 \cdot 10^{-16}$. Таким образом, расчёт подтверждает совместно три разных свойства: правильный порядок физических контактов, прохождение четырёх внутренних фокусов и возврат фазового состояния. Ни одно из них не выводится только из другого. Например, локально фокальные отражения могут составлять открытую цепочку, а обычная замкнутая орбита может обходить все фокусы.

Для фиксированного отношения R/a существование хотя бы одного корня в интервале $\sqrt{2} < b/a < 1{,}5$ следует из изменения знака точного определителя. При $q = \sqrt{3}$ коэффициент C обращается в нуль, а A и B отрицательны, поэтому $\Pi < 0$ для $t > 0$. При $b/a = 1{,}5$

коэффициенты дают положительный многочлен на положительной полуоси: A > 0, C > 0 и дискриминант отрицателен. Непрерывность по b при фиксированных a и R обеспечивает промежуточный корень. Это доказательство существования не утверждает единственности всех возможных геометрий вне выбранного интервала.

Полиномиальная форма режима 2 обнаруживает дополнительную закономерность. Если фиксировать отношение k = b/a, неизвестной становится t, а затем R/a. В определённом узком интервале k квадратное уравнение имеет два положительных корня. Значит, одинаковые a и b допускают две различные конечные геометрии R, каждая из которых поддерживает найденный четырёхотражательный фокальный цикл. Это свойство нельзя увидеть по одному расстоянию между внутренними фокусами.

Первый порог задаётся обращением A в нуль, то есть уравнением $q^3 + 3q^2 - 4q - 8 = 0$. Его положительный корень равен $q_\infty = 1{,}778457118258389$ и соответствует $k_\infty = 1{,}470683419871161$. Второй порог получается из дискриминанта $B^2 - 4AC = 0$. После удаления положительного множителя соответствующее уравнение имеет вид $q^6 - 8q^5 - 14q^4 + 16q^3 + 33q^2 + 24q + 16 = 0$. Нужный корень равен $q_m = 1{,}785719487136278$ и $k_m = 1{,}479457362257612$.

$$q^3 + 3q^2 - 4q - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_\infty = 1.470683419871161. \quad (49)$$

$$q^6 - 8q^5 - 14q^4 + 16q^3 + 33q^2 + 24q + 16 = 0. \quad (50)$$

При $\sqrt{2} < k < k_\infty$ имеется один положительный конечный радиус этого семейства. При $k_\infty < k < k_m$ имеются два. При $k = k_m$ положительные корни совпадают и R/a = 9,169815435818087. При $k = \sqrt{2}$ остаётся вырожденный предел t = 0, то есть R = 0. При $k = k_\infty$ один радиус конечен, а другая ветвь уходит к бесконечному радиусу. Эти утверждения относятся к корням данного точного фокального четырёхотражательного условия и не запрещают орбиты другого вида или другого периода при иных k.

Для конкретного значения k = 1,475 получены два радиуса R/a = 4,575423218014632 и R/a = 35,89964884750465. Обе геометрии распространены независимо обычным зеркальным решателем. В первом случае разнесение внутренних фокусов составляет 1,049100407719839a; во втором 1,366403285057065a. Ошибки возврата положения составляют соответственно $2{,}8436 \cdot 10^{-15}$a и $2{,}0652 \cdot 10^{-13}$a. Большая ошибка второй геометрии согласуется с большей динамической чувствительностью, а не с потерей аналитического условия.

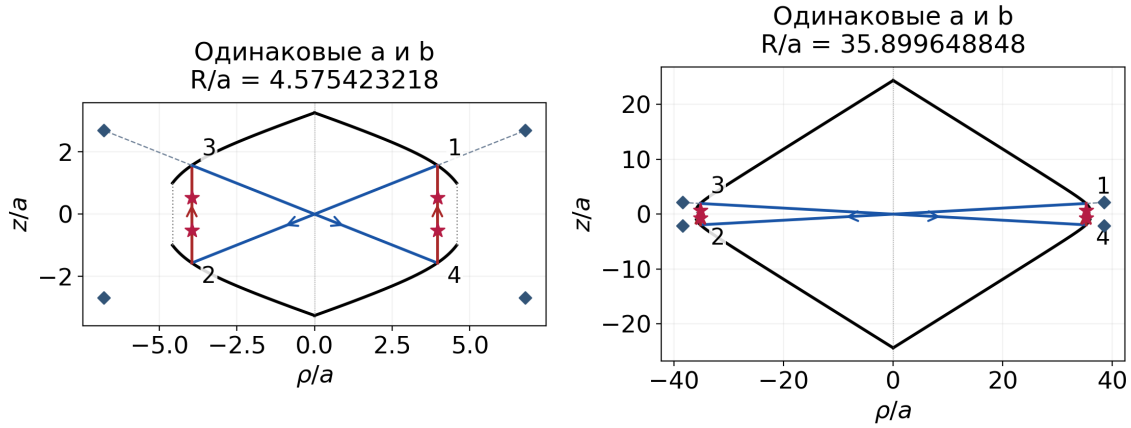

Рисунок 13. Две рассчитанные геометрии режима 2 при одинаковых a = 1 и b = 1,475. Их радиусы различаются почти в восемь раз. В обеих геометриях показана точная фокальная орбита периода четыре. Масштаб каждой панели задан собственными координатными осями.

След матрицы возврата в этих случаях равен приблизительно 2,3567 и 29,2586. Обе орбиты линейно гиперболические, но вторая существенно сильнее увеличивает отклонения. Поэтому наличие двух корней полиномиального условия имеет и динамическую сторону: две геометрии поддерживают один тип фокального маршрута, но обладают различной устойчивостью. Для оптического применения выбор геометрии должен учитывать эту чувствительность, а не только факт точного замыкания идеального центрального луча.

5 Проверка и периодическая лучевая динамика

5.1 Независимая проверка и перечисление фокальных состояний

Малые невязки двойной арифметики достаточны для практической проверки трассировки, но сами по себе не являются аналитическим доказательством. Здесь доказательство коллинеарности, зеркального перехода и примитивности построено отдельно. Численный контроль проверяет правильность реализации, знаки направлений, принадлежность конечной ветви и отсутствие более раннего контакта. Основной и независимый решатели дают согласие точек ударов около $10^{-14}a$ для двух главных геометрий.

Дополнительно семь геометрий проверены с 90 десятичными цифрами стандартным модулем Decimal. В первом режиме это общие фокальные исходные формы k = 2, k = 2,2 и k = 2,26 с независимо вычисленными критическими сдвигами. Во втором режиме это R/a = R_0/a, 1, 8 и 20 с независимо вычисленными параметрами b*. Высокоточная процедура не берёт округлённые положения ударов из двойного расчёта: она заново строит геометрию и решает физические квадратные уравнения по времени каждого свободного участка.

Таблица 5. Высокоточные проверки замыкания семи фокальных геометрий.

Проверка с 90 цифрами	Ошибка положения / a	Ошибка направления
Режим 1 при k = 2	$1{,}3928\cdot10^{-88}$	$4{,}6228\cdot10^{-89}$
Режим 1 при k = 2,2	$4{,}3445\cdot10^{-85}$	$8{,}8577\cdot10^{-86}$
Режим 1 при k = 2,26	$6{,}4831\cdot10^{-81}$	$1{,}4023\cdot10^{-81}$
Режим 2 при R = R_0	$1{,}0102\cdot10^{-87}$	$1{,}6031\cdot10^{-89}$
Режим 2 при R/a = 1	$1{,}6589\cdot10^{-88}$	$4{,}4721\cdot10^{-90}$
Режим 2 при R/a = 8	$5{,}0133\cdot10^{-87}$	$1{,}3234\cdot10^{-87}$
Режим 2 при R/a = 20	$9{,}0907\cdot10^{-88}$	$1{,}0449\cdot10^{-87}$

Рост последних остатков при приближении к предельной форме первого режима связан с усилением начального округления неустойчивой геометрией. При этом ошибки остаются на уровне десятков последних знаков 90-значного расчёта. В двойной арифметике соответствующий остаток может достигать $10^{-11}a$ и создавать ошибочное впечатление потери закона, если применять одинаковый абсолютный порог ко всем сильно различающимся геометриям. Высокоточная проверка показывает, что аналитическое условие сохраняется, а меняется чувствительность реализации.

Для исходной случайной серии дополнительно проверены остатки неявного уравнения стенки и зеркального отражения по градиенту коники. Максимальный геометрический остаток составил $6{,}2173\cdot10^{-15}$ в режиме 1 и $1{,}1546\cdot10^{-14}$ в режиме 2. Максимальная разность отражённых единичных направлений, найденных двумя формулами нормали, составила $1{,}1323\cdot10^{-15}$ и $1{,}3415\cdot10^{-15}$. Эти проверки относятся к каждому сохранённому контакту повторной серии, а не только к четырём ударам найденной орбиты.

Исходная статистика запусков со стенок была правильно воспроизведена, но отвечала другому вопросу. В каждой геометрии 300 лучей запускались со стенок, а максимальное число последующих отражений ограничивалось двенадцатью. Точка старта выбиралась внутри конечной ветви по нормированному параметру u/U, угол относительно внутренней нормали выбирался в заданном диапазоне. Это ансамбль состояний на границе, а не один неизменный внешний источник. При перемещении стенок физические точки запуска тоже перемещаются, а при изменении формы изменяются их нормали.

В первом режиме воспроизведена следующая последовательность средних чисел столкновений. В строке $\Delta = -L$ стенки пересекаются, поэтому её значение не описывает физически допустимый бильярд. Строка $\Delta = -0{,}75L$ допустима по границе, но, как показано выше, требует отдельной проверки расположения внутренних фокусов. Среднее вычисляется после начального состояния на стенке, то есть стартовый контакт не прибавляется к числу будущих ударов.

Таблица 6. Статистика столкновений при запусках со стенок и осевом переносе.

Δ/L	**Среднее число ударов**	**Доля с 8 и более ударами**	**Граница**
-1	11,0167	91,667 %	Пересечение
-0,75	11,0733	90,333 %	Допустима
-0,5	8,59	65 %	Допустима
-0,25	8,09	63 %	Допустима
0	6,85333	49,333 %	Допустима
0,25	5,87667	42,333 %	Допустима
0,5	5,56	41,333 %	Допустима
0,75	5,14667	37,667 %	Допустима
1	4,88333	36,667 %	Допустима

В этом конкретном ансамбле сближение стенок увеличивает число последующих контактов, а раздвижение уменьшает его. Однако часть траекторий достигает предельного числа двенадцать и дальше не прослеживается. Их действительное число ударов неизвестно и может быть существенно больше. Поэтому среднее является правосторонне цензурированной характеристикой эксперимента с фиксированным пределом, а не временем удержания всех

лучей. На его основе нельзя вывести ни фокальный угол, ни число ударов точной периодической орбиты.

Во втором режиме аналогичная статистика меняется при изменении формы даже у геометрий с близким разнесением фокусов. Например, изменение a до 0,8 при фиксированных b = 2 и R = R_0 даёт среднее 7,8467, а изменение b до 1,6 при a = 1 и R = R_0 даёт 5,9533. Размеры фокального разделения в этих случаях близки, но лучи испытывают разные наклоны и кривизны стенок. Поэтому наблюдаемая зависимость от одного расстояния не может заменить точный закон через x_i, z_i, x_e, z_e и r.

Таблица 7. Статистика столкновений при запусках со стенок и изменении формы.

a	**b**	**R/R_0**	**Разнесение фокусов**	**Среднее число ударов**
0,8	2	1	0,765335	7,84667
1,2	2	1	0,732969	6,35333
1	1,6	1	0,804144	5,95333
1	2,4	1	0,823572	7,16667
1	2	0,8	0,0783216	6,58333
1	2	1,2	0,0619307	6,86
0,85	1,75	0,9	0,0857611	6,99333
1,15	2,3	1,1	0,0177991	6,84
1	1,4	1	1,18327	4,21

Даже направленная сетка параметров может пропустить изолированное фокальное состояние. В режиме 2 проверено 9680 физических фокальных запусков с 121 значением u для каждой выбранной геометрии. Ни один не удовлетворил установленному допуску второго фокального сопряжения. Тем не менее целевое решение Φ = 0 восстановило четырёхотражательную орбиту. Результаты согласуются: равномерная сетка не обязана содержать ни нужный параметр столкновения u_v, ни нужный параметр формы b*.

В первом режиме направленная сетка содержит 8712 физических запусков и 304 точных вторых фокальных сопряжения; основная причина их появления связана с непрерывным семейством общей фокальной контрольной геометрии. Числа сеточных попаданий описывают выборку конкретного набора, а не число всех математически существующих решений. В статье они используются для оценки полноты метода поиска и для демонстрации того, почему отрицательный сеточный результат нельзя превращать в теорему отсутствия.

Для геометрии с разделёнными фокусами можно существенно усилить поиск. Назовём отражение локально фокальным, если его входящий или выходящий свободный луч лежит на собственной фокальной прямой этой стенки с физически правильным направлением. Если два последовательных отражения локально фокальны, соединяющая их прямая должна

одновременно проходить через одну фокальную точку первой стенки и одну фокальную точку второй. При различных точках эта прямая определяется однозначно.

Пересечение такой прямой с невырожденной гиперболой содержит не более двух точек. Для четырёх стенок имеются два выбора фокуса исходной стенки, три выбора следующей стенки и два выбора её фокуса. Поэтому до исключения повторов, недостижимых контактов и неверных направлений получается не более 4·2·3·2·2 = 96 регулярных исходных состояний. На выбранной фокальной прямой только один из противоположных выходящих векторов направлен внутрь полости, что учитывается при подсчёте.

$$N_{\mathrm{cand}} \le 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 96. \quad (51)$$

Алгоритм сначала строит эти прямые по точным фокусам, затем находит их пересечения с конечными ветвями. Для каждого состояния он выбирает ближайший физический контакт, проверяет локальную фокальную сопряжённость следующей стенки и продолжает цепочку до выхода, потери сопряжённости или замыкания. Это конечная перечислительная процедура для заданной геометрии, а не вероятностное ожидание удачного случайного угла. Она также различает обращённые направления и совпадающие геометрические орбиты.

В режиме 1 проверены 70 расчётных случаев и 676 допустимых сопряжённых состояний. В режиме 2 проверен 71 случай и 924 состояния. Среди них обнаружены соответственно восемь и восемь замкнутых полностью фокальных фазовых представлений. Они сводятся к одной неориентированной геометрической орбите в каждом режиме. Всего в двух режимах перечислено 1600 состояний. Часть случаев повторяет одну и ту же геометрию в разных контрольных сериях, поэтому числа 70 и 71 описывают расчётные записи, а не гарантированно различные поверхности.

Граница применимости этого конечного результата должна быть точной. При совпадении двух фокусов прямая через них не определяется единственным образом и появляется непрерывный пучок. Поэтому общая фокальная контрольная конструкция рассматривается отдельно. Кроме того, конечное перечисление описывает только маршруты, у которых два последовательных отражения остаются локально фокальными. Оно не исключает специального многоотражательного отображения между фокусами, в котором промежуточные удары не являются фокальными. Оно также не классифицирует касательные удары, кромки или геометрии вне доказанного регулярного класса.

В просмотренных случаях самая длинная последовательная фокальная цепочка имеет четыре отражения. Это эмпирический результат конечного каталога, а не доказанная верхняя граница для всех параметров и всех возможных маршрутов. Строго доказан закон конкретного симметричного четырёхотражательного семейства и механизм конечного поиска последовательных локальных сопряжений. Разделение этих утверждений сохраняет научную силу результата без необоснованного распространения на ещё не решённые задачи.

5.2 Линейная устойчивость, возмущения и расстройка

Устойчивость определяет, насколько специальный закон сохраняет практическую значимость для луча с малой ошибкой запуска. Для её анализа состояние на стенке задаётся двумя координатами: u определяет положение удара, p является синусом угла исходящего луча относительно внутренней нормали. Если t̂ и n̂ обозначают единичную касательную и внутреннюю нормаль, исходящее направление имеет вид v = √(1 − p²)n̂ + pt̂. Такой параметр p удобен тем, что стандартная мера бильярдного отображения в координатах длины дуги и p сохраняет площадь.

$$v = \sqrt{1 - p^2}\,\hat{n} + p\,\hat{t}, \qquad -1 < p < 1. \quad (52)$$

Производная перехода вычисляется аналитически через точное пересечение и отражение. Пусть следующий контакт Q(w) = P(u) + τv. При малом изменении начального состояния получаем Q′(w)δw = δP + δτv + τδv. Векторное произведение с v исключает вариацию времени и даёт δw. Далее дифференцируется зеркальная формула, включая изменение нормали в новой точке. Этот способ учитывает зависимость места удара от направления и не подменяет её отражением на заранее фиксированной точке.

$$\delta w = \frac{[\delta P + \tau \delta v,\, v]}{[Q'(w),\, v]}. \quad (53)$$

$$\delta v_{\text{out}} = \delta v - 2[(\delta v \cdot \hat{n} + v \cdot \delta \hat{n})\hat{n} + (v \cdot \hat{n})\delta \hat{n}]. \quad (54)$$

Квадратные скобки в формуле δw обозначают двумерное векторное произведение. Знаменатель отличен от нуля для регулярного некасательного столкновения. Четыре матрицы перехода перемножаются в порядке движения и дают матрицу M_4 возврата в исходную стенку. В локальных координатах u, p элементарный переход не обязан иметь единичный определитель, поскольку u не является длиной дуги. Однако на замкнутом полном периоде факторы скорости параметризации сокращаются и $\det M_4 = 1$.

$$\delta \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}_{n+4} = M_4\, \delta \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}_n + O(\| \delta(u,p) \|^2), \qquad \det M_4 = 1. \quad (55)$$

Если $|\mathrm{tr}\, M_4| < 2$, собственные значения являются комплексно сопряжёнными и лежат на единичной окружности; такая неподвижная точка линейно эллиптическая. Если $|\mathrm{tr}\, M_4| > 2$, собственные значения действительны и взаимно обратны; одна фазовая составляющая растёт, другая уменьшается. Это линейно гиперболическая точка. Значения $\mathrm{tr}\, M_4 = \pm 2$ образуют предельный параболический случай, требующий анализа старших порядков. Здесь классификация применяется только к возмущениям в меридиональном сечении.

Для найденной фокальной орбиты режима 1 след M_4 равен −1,336632153731438. Собственные значения равны −0,668316076865719 ± 0,743877423641029i, их модули равны единице с ошибкой округления. Для режима 2 след равен 2,335329423316541; собственные значения равны 0,564804131712962 и 1,770525291603579. Таким образом, эти два способа разнесения дают не просто разные параметры точного закона, но и разные типы линейной динамики около найденного цикла.

Таблица 8. Меридиональная линейная устойчивость двух опорных фокальных циклов.

Величина	**Режим 1**	**Режим 2**
След матрицы M_4	−1,336632153731438	2,335329423316541
Определитель M_4	1 с ошибкой $< 10^{-15}$	1 с ошибкой $< 10^{-15}$
Тип в двумерном сечении	Линейно эллиптический	Линейно гиперболический
Модули собственных значений	1 и 1	0,5648041 и 1,7705253
Ошибка аналитического Якобиана против разностей	$7{,}72 \cdot 10^{-10}$	$1{,}49 \cdot 10^{-9}$

Аналитический Якобиан независимо сопоставлен с центральными разностями при шаге 10^{-6}. Различие около 10^{-9} согласуется с конечным шагом и округлением. Эллиптическая линейная классификация сама по себе не доказывает нелинейную устойчивость при любом времени. Для утверждения об инвариантных кривых или бесконечном удержании нужны условия нелинейного отображения и соответствующее доказательство. Гиперболическая классификация, напротив, непосредственно показывает существование растущего линейного направления у данного цикла.

Предсказание матрицы возврата непосредственно проверяется отдельной серией лучевых трассировок. Для каждой критической геометрии запущены 22 возмущённых состояния. Десять изменяют p на $\pm10^{-10}$, $\pm10^{-8}$, $\pm10^{-6}$, $\pm10^{-4}$ и $\pm10^{-2}$. Двенадцать расположены на окружности радиуса 10^{-4} в локальной плоскости (u, p). Каждая траектория использует точные стенки соответствующей опорной геометрии и предел 3200 столкновений, эквивалентный 800 периодам идеальной орбиты.

Окружность в фазовых координатах не является физическим круглым пучком в пространстве. Величины δu и δp имеют различный геометрический смысл; выбранная норма лишь фиксирует воспроизводимый набор начальных ошибок. Во время трассировки состояние сравнивается с соответствующим состоянием точной орбиты после такого же числа ударов. Если меняется порядок стенок, это отмечается отдельно. Выход через боковое окно прекращает трассировку и не заменяется искусственным отражением от окна.

В режиме 1 все 22 возмущённых луча достигли предела 3200 отражений без выхода и без изменения порядка четырёх стенок. Всего в этой серии выполнено 70400 отражений. При $\delta p = +10^{-6}$ максимальное расстояние в координатах u, p до соответствующей фазы точной орбиты составило $5{,}6580\cdot10^{-6}$. При $\delta p = +10^{-4}$ оно составило $5{,}6618\cdot10^{-4}$. Длительная траектория остаётся рядом с идеальным циклом, а точки возврата образуют ограниченные полосы в фазовой плоскости, согласующиеся с эллиптической линейной динамикой.

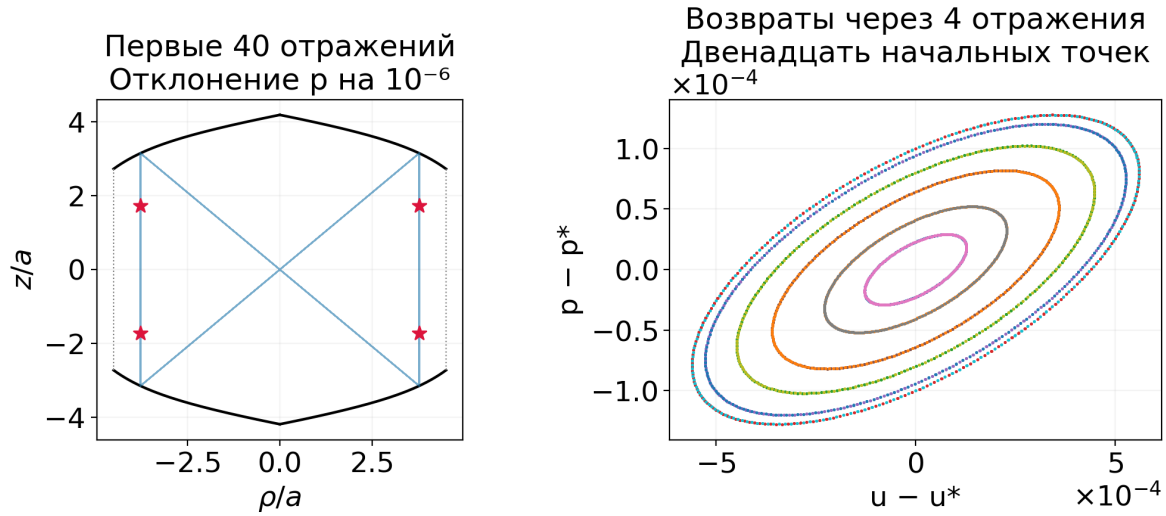

Рисунок 14. Прямая трассировка возмущённых лучей режима 1. Слева первые 40 отражений луча с $\delta p = 10^{-6}$; близкие отрезки почти совпадают в масштабе полости. Справа вычисленные возвраты через четыре отражения для двенадцати начальных фазовых точек на протяжении 3200 контактов.

В режиме 2 все 22 возмущённых состояния в конечном счёте вышли через окна; до выхода выполнено суммарно 1670 отражений. Для положительных ошибок $\delta p = 10^{-10}$, 10^{-8}, 10^{-6}, 10^{-4} и 10^{-2} выход зарегистрирован после 134, 102, 70, 38 и 8 отражений соответственно. Малость

ошибки запуска только отодвигает расхождение; она не превращает гиперболическую точку в эллиптическую. При отрицательной ошибке последующее нелинейное движение может задержать выход: например, при $\delta p = -10^{-6}$ луч вышел после 206 отражений.

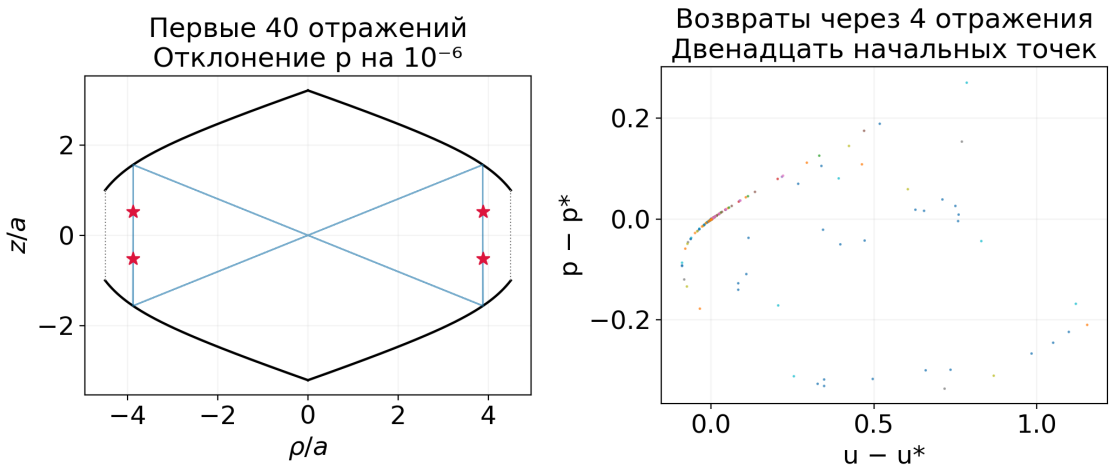

Рисунок 15. Прямая трассировка возмущённых лучей режима 2. Слева первые 40 отражений луча с $\delta p = 10^{-6}$. Справа возвраты двенадцати возмущённых фазовых состояний до смены маршрута или выхода. Расходящиеся состояния вычислены тем же зеркальным законом, что и точная орбита.

Таблица 9. Рост возмущений и выход в двух опорных геометриях.

Начальная положительная δp	**Удары в режиме 1**	**Удары до выхода в режиме 2**	**Первое отклонение > 0,01 в режиме 2**
10^{-10}	3200 и предел достигнут	134	113
10^{-8}	3200 и предел достигнут	102	81
10^{-6}	3200 и предел достигнут	70	49
10^{-4}	3200 и предел достигнут	38	17
10^{-2}	3200 и предел достигнут	8	0

Последний столбец таблицы содержит число уже выполненных отражений, после которого расстояние состояния до соответствующей фазы точной орбиты впервые превышает 0,01. Для четырёх малых положительных ошибок это 113, 81, 49 и 17. Уменьшение начальной ошибки в сто раз добавляет приблизительно 32 отражения до такого уровня расхождения. Этот результат имеет количественное объяснение через растущее собственное значение $\lambda = 1{,}770525291603579$ за один период из четырёх отражений.

$$\| \delta X_n \| \approx C\lambda^n \| \delta X_0 \|, \qquad \Delta n \approx \frac{\ln(\varepsilon_1/\varepsilon_2)}{\ln\lambda}, \qquad \lambda = 1.770525291603579. \quad (56)$$

В последней формуле n обозначает число полных четырёхотражательных периодов, а C зависит от направления начального отклонения и выбранной фазовой нормы. Для стократного уменьшения ошибки добавляется примерно ln(100)/ln(λ) = 8,06 периода, то есть около 32,2 отражения. По двадцати вычисленным возвратам в линейном диапазоне получен показатель роста 0,5713654746 за период; предсказанный показатель ln(λ) равен 0,5712762775. Различие около 0,016 % объясняется конечностью возмущения и численной трассировкой.

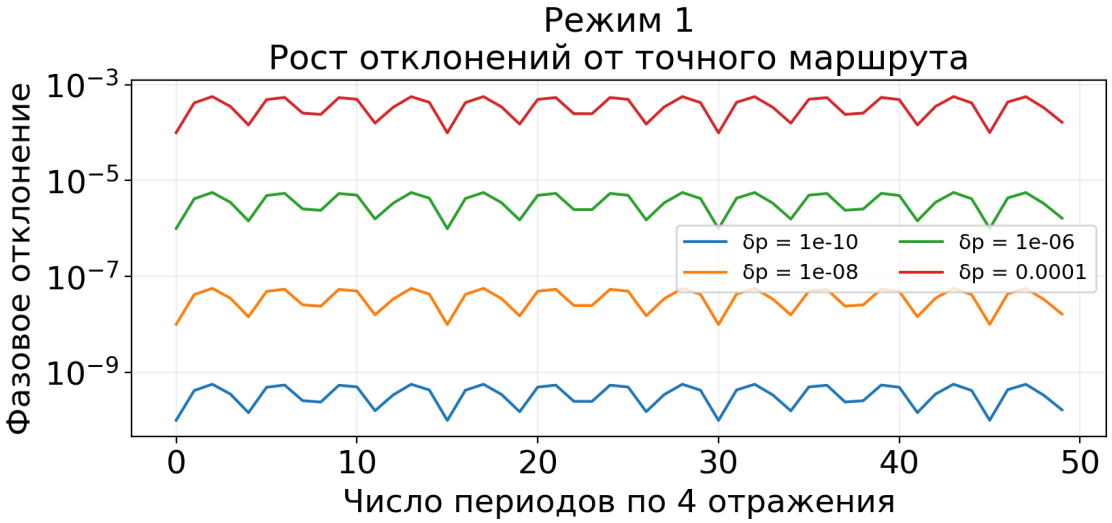

Рисунок 16. Изменение фазового отклонения лучей режима 1 для четырёх начальных ошибок p. На графике представлены значения после целых периодов из четырёх отражений. Колебания ограничены в показанном интервале; длительный предел 3200 отражений отдельно проверен по полным журналам.

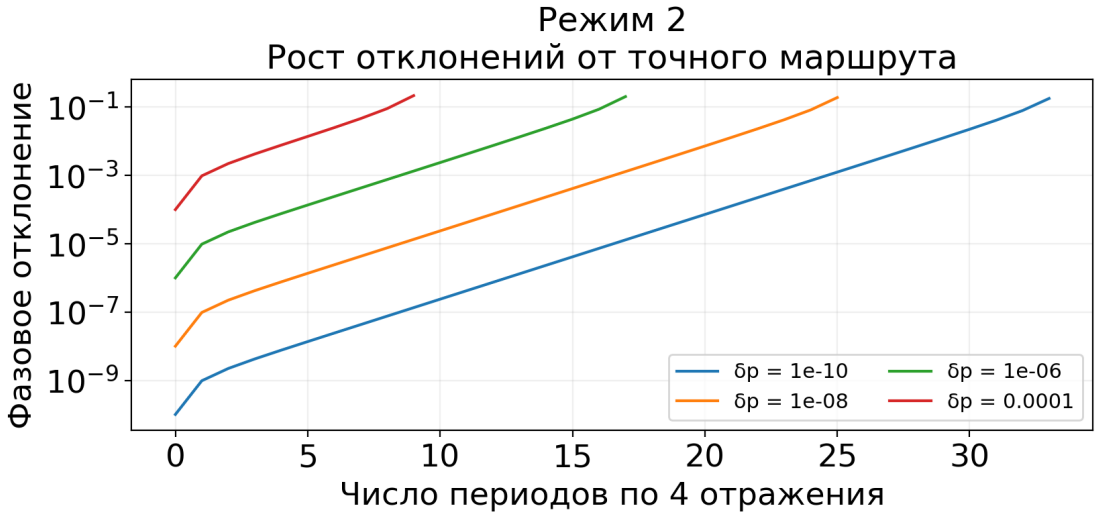

Рисунок 17. Рост фазовых отклонений в режиме 2. Участки почти прямых линий в полулогарифмическом масштабе соответствуют экспоненциальному росту до выхода из линейной области. За пределами этой области последующее время выхода уже зависит от нелинейной траектории.

Порог расхождения и время выхода следует различать. Первый отражает локальную гиперболическую динамику и хорошо подчиняется логарифмическому сдвигу по размеру ошибки. Второе включает более далёкие нелинейные участки движения и может быть немонотонным при смене знака ошибки. Поэтому приведённая формула является законом локального роста около конкретного фокального цикла, а не универсальной формулой времени выхода любого луча из ZPHB.

Конечный опыт режима 1 поддерживает наличие области длительного регулярного движения около эллиптической орбиты. Он не заменяет доказательства бесконечной нелинейной устойчивости. В частности, достижение 3200 отражений означает правое цензурирование записи: луч мог бы выйти позже или оставаться в полости, но этот вопрос не решён данной трассировкой. В режиме 2 выход наблюдён непосредственно, поэтому для этих 22 состояний число ударов является завершённой величиной, а не пределом наблюдения.

Реальная геометрия или вычислительная модель могут иметь небольшую ошибку настройки. Для её количественного анализа выполнено по 27 расчётов около каждого критического набора. В режиме 1 меняется только Δ, а a, b и R сохраняются. В режиме 2 меняется только b, а a и R сохраняются и Δ остаётся нулём. В каждом случае заново определяется вертикальная фокальная точка u_v и отражается вертикальный вход. Таким образом, первый удар по-прежнему точно связан с внутренним фокусом своей стенки, а проверяется согласование последующих ударов.

Вводится ε = (Δ − Δ*)/a для первого режима и ε = (b − b*)/a для второго. Величины ε имеют оба знака, а их модули принимают логарифмически распределённые значения от 10^{-8} до 10^{-2}. Для каждого состояния записаны остаток Φ/a², ошибка положения после четырёх отражений, ошибка направления и максимальная дистанция от внутренних фокусов до конечных отрезков. Метод не подстраивает начальные координаты для восстановления обычной нефокальной периодичности.

В режиме 1 геометрический остаток зависит от ошибки сдвига точно линейно, поскольку x_i, x_e и r неизменны. Его производная равна $(x_i - x_e)/2 = -cm$. Поэтому $\Phi(\Delta^* + \delta\varepsilon) = -cm\cdot\delta\varepsilon$, где δε здесь является размерной ошибкой Δ. Равенство показывает, что согласование не допускает произвольного интервала сдвигов: нулевой определитель выделяет конкретное значение. Малое ненулевое разделение от этого значения даёт малый, но ненулевой промах.

$$\Phi(\Delta_* + \delta\Delta) = -cm\,\delta\Delta. \quad (57)$$

Для регулярного заданного порядка ударов точное бильярдное отображение гладко зависит от геометрических параметров. Поэтому в малом диапазоне ошибки возврата имеют первый ненулевой порядок, пропорциональный |ε|. На логарифмических графиках это проявляется наклоном приблизительно один. Полученные коэффициенты относятся к выбранному способу запуска через вертикальный первый вход и к конкретным критическим геометриям. Они не являются постоянными для всего семейства ZPHB.

Таблица 10. Локальная чувствительность фокального возврата к расстройке геометрии.

Величина при ε = +10⁻⁶	**Коэффициент для режима 1**	**Коэффициент для режима 2**
Ошибка положения после 4 ударов / (a|ε|)	1,5877386	15,616494
Ошибка направления / |ε|	0,33341478	0,31426352

Величина при ε = +10⁻⁶	**Коэффициент для режима 1**	**Коэффициент для режима 2**
Максимальный фокальный промах / (a|ε|)	1,0728646	4,7628653

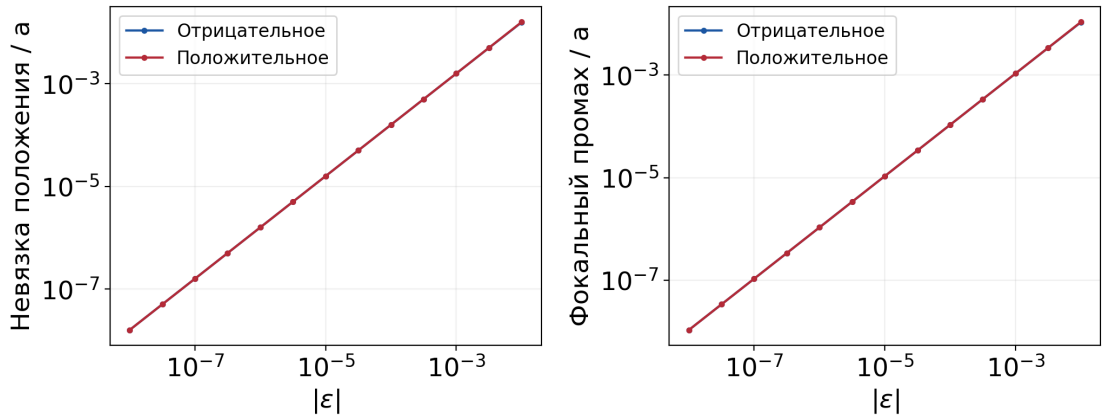

Рисунок 18. Ошибки фокального маршрута при изменении только осевого сдвига режима 1 относительно Δ*. Положительные и отрицательные отклонения рассчитаны раздельно. На всех точках заново используется собственная вертикальная фокальная точка неизменной стенки.

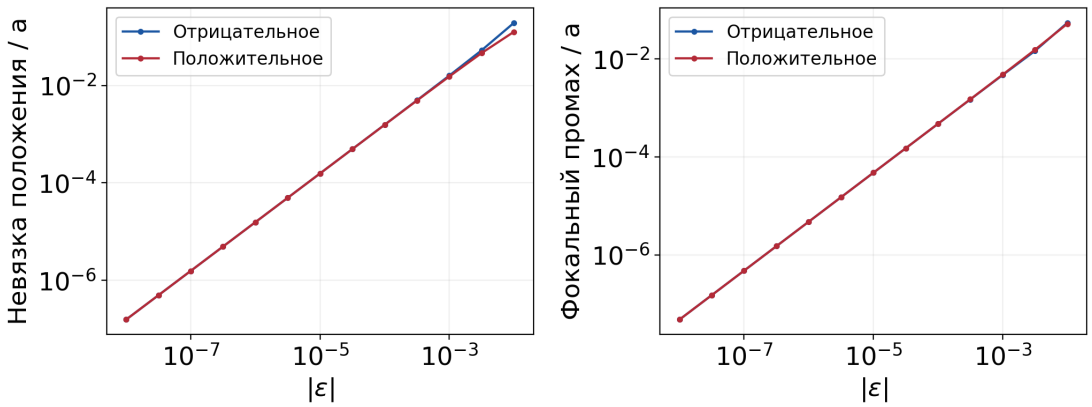

Рисунок 19. Ошибки фокального маршрута при изменении только параметра b режима 2 относительно b*. Дополнительный сдвиг точно равен нулю. Изменение формы заново меняет фокусы, нормали и параметр вертикального удара.

Если требуется максимальный фокальный промах менее 10^{-5}a, результаты около выбранной геометрии дают следующие ориентиры. Для режима 1 величина $|\Delta - \Delta^*|/a$ должна быть не больше примерно $9{,}3\cdot10^{-6}$; для режима 2 величина $|b - b^*|/a$ должна быть не больше примерно $2{,}1\cdot10^{-6}$ при данном способе запуска. Это оценки первого порядка по рассчитанным коэффициентам, а не строгие допуски на изготовление с произвольными ошибками поверхности. Ошибка a, R, локального наклона или положения источника требует своего расчёта производной. Уменьшение ошибки положения геометрии также не устраняет гиперболический рост ошибки запуска во втором режиме.

Утрата фокального согласования при расстройке не означает исчезновения всех орбит периода четыре. Обычная периодическая точка может сместиться и восстановить замыкание после изменения начального состояния, что показывают ветви продолжения в разделе 5.3. Её вертикальные пролёты в общем случае проходят мимо фокусов стенок. Поэтому $\Phi = 0$ задаёт фокальное прохождение одновременно с периодическим возвратом и является более сильным условием, чем обычное замыкание за четыре столкновения.

5.3 Обычные периодические орбиты и продолжение

Чтобы отделить самостоятельные замкнутые маршруты от повторных обходов более коротких, периодический кандидат определяется полным фазовым состоянием $X=(\chi,\sin\alpha)$ на гладкой физической стенке и равенством $T_k^p(X)=X$ после p отражений. Примитивный период означает, что ни один собственный положительный делитель d числа p не удовлетворяет условию возврата для того же полного состояния — координаты и направления. Классы отождествляются с учётом циклической перестановки столкновений, обратного обхода и указанных отражений относительно двух осей. Без указания этой эквивалентности число классов неоднозначно.

Физическое отображение строится выбором ближайшего пересечения с одной из четырёх точно отражённых гиперболических ветвей и применением закона зеркального отражения $d_{вых}=d_{вх}-2(d_{вх}\cdot n)n$. Проверяется принадлежность точки конечному физическому сегменту, а не только полной виртуальной гиперболе. Сохранение скорости, проверка всех делителей периода, замыкание и допустимость последующего прямолинейного участка являются отдельными условиями допуска. Постановка относится к двумерному меридиональному биллиарду, а не ко всем косым трёхмерным лучам.

При $k=b/a=2$ и ограничении поиска периодами не более 48 исправленный расчёт обнаружил 19 различных представителей примитивных периодических классов. Отдельный высокоточный расчёт уточнил все 19 кандидатов при номинальной точности 60 десятичных знаков; максимальная сообщённая невязка замыкания около $9{,}23\times10^{-49}$. Собственные делители периода и повторы с учётом принятой группы симметрий не обнаружены. Это свидетельство существования не менее 19 найденных классов в принятой классификации, но не исчерпывающее перечисление непрерывного фазового пространства.

Таблица 11. Каталог периодических орбит конечного поиска при $k = 2$.

Показатель	**Результат**	**Смысл**
Примитивные кандидаты	19	$p\le48$, факторизация по симметриям
Эллиптический линейный тип	3	C00001, C00002, C00009
Гиперболический линейный тип	16	Остальные найденные кандидаты
Высокоточно уточнённые циклы	19/19	Номинально 60 десятичных знаков
Максимальная невязка замыкания	$9{,}23\times10^{-49}$	Численная диагностика
Полнота фазового каталога	Не доказана	Конечный поиск не исключает другие орбиты

Матрица M_p=D(T_k^p)|X* представляет линейное отображение возврата. В канонических координатах гладкого бильярда сохраняется площадь фазового пространства, поэтому det M_p=1 вдали от касаний, вершин и сингулярных концов. Аналитическое дифференцирование элементарных карт столкновения и отдельная проверка конечными разностями дали близкие к единице определители. При k=2 для трёх циклов |tr M_p|<2 (эллиптический тип), для шестнадцати |tr M_p|>2 (гиперболический). Эллиптичность в линейном приближении сама по себе не доказывает существование нелинейного острова конечной площади.

Для особенно неустойчивого цикла C00015 периода 32 получено tr M≈−1028,0713 и det M≈0,9999999999909. Неопределённость раннего теста конечными разностями отражала ограничения численного дифференцирования и не опровергала физическое существование траектории. Независимый символьный вывод полного следа матрицы пока не представлен, поэтому классификация остаётся численной, хотя поддержана высокоточным расчётом.

Обнаружение замкнутого маршрута при фиксированном параметре ещё не является теоремой о ветви периодических решений. Псевдодуговой метод предиктора-корректора продолжил 19 представителей по параметру формы k, используя дополненную систему условия возврата и касательного ограничения, с контролем физических пересечений, примитивности периода и геометрической идентичности. Получено 1156 принятых точек; в 30 из 38 направлений продолжения достигнута граница заданного диапазона. Численная остановка ветви не равнозначна доказанному физическому исчезновению орбиты.

Таблица 12. Выбранные сложные ветви псевдодугового продолжения.

Цикл	**Период**	**Диапазон k**	**Ограничение**
C00015	32	1,97804–2,03087	Продолжение значительно улучшено
C00016	38	1,97002–2,03040	Почти полный диапазон
C00019	44	1,99955–2,00883	Узкий интервал; бифуркация не доказана

Контрольные геометрии отвечают на разные физические вопросы. Малые изменения R нарушают точное условие общего фокуса внутри близкого семейства. Исходный PHB исключает зеркальное преобразование. Двойной конус с теми же концами заменяет криволинейные гиперболические отражатели прямыми стенками. Изолированная зеркальная пара исключает полную четырёхветвевую сборку. Для каждого контроля необходимо явно указывать, какие геометрические и апертурные параметры уравнены; отдельный контроль не доказывает универсальную уникальность.

После исправления алгоритма столкновений с прямыми сегментами двойного конуса конечный поиск обнаружил 143 периодических состояния. При локальном возмущении у всех 143 представителей найдены численные признаки непрерывных семейств; символические последовательности отражений распределены по 15 группам. Это не 143 изолированных класса и не доказательство ровно 15 глобально связных семейств. Прежний нулевой результат для конуса недействителен. Сравнение 19 классов ZPHB с 143 конусными состояниями было бы методологически некорректным.

Таблица 13. Контрольные бильярды и область интерпретации численных результатов.

Геометрия	**Результат поиска**	**Допустимый вывод**

Геометрия	Результат поиска	Допустимый вывод
Зеркальный ZPHB, k=2	19 примитивных представителей	Высокоточная локальная проверка, неполный каталог
Исходный PHB	13 кандидатов	Конечный поиск, не теорема отсутствия
Двойной конус	143 состояния, 15 символических групп	Локальные признаки непрерывных семейств
Изолированная зеркальная пара	Не найдены в заданном поиске	Отсутствие орбит не доказано
ZPHB с изменённым R	Каталоги зависят от R	Универсальные доли сохранения не установлены

Содержательный сравнительный результат является качественным, а не соревнованием количества орбит: криволинейная зеркальная сборка демонстрирует периодические циклы разных линейных типов устойчивости, тогда как прямостенный контроль показывает локальное вырождение в семейства траекторий. Чтобы доказать изолированность всех 19 решений ZPHB, потребуется одинаковая процедура исследования ранга и нуль-пространства якобиана для обеих геометрий; такие результаты пока не представлены.

Новый фокальный цикл не означает, что период четыре впервые появляется только при найденном Δ* или b*. Обычные симметричные орбиты периода четыре существуют и без прохождения фокусов. Чтобы отделить новый фокальный механизм от прежней периодичности, в расчёте разнесённых фокусов построены ветви симметричных четырёхударных орбит и выполнено продолжение известных начальных состояний C00001, C00002 и C00009. Проверяется не только ошибка после заданного числа ударов, но и минимальный период и порядок стенок.

Для первого режима симметричное замыкание при произвольной точке u можно записать как условие параллельности отражённого вертикального направления и диагонали к центрально симметричной точке. Если $P_0(u) = (x(u), z(u))$ относится к неподвижной контрольной стенке, а $v_{out}(u)$ является отражением вертикального входа, то необходимый сдвиг равен $2[x(u)v_{out,z}/v_{out,x} - z(u)]$. Эта функция строит обычную ветвь периода четыре, а фокальный закон выделяет на ней специальную точку $u = u_v$.

$$\Delta(u) = 2\left[x(u)\frac{v_{\mathrm{out},z}(u)}{v_{\mathrm{out},x}(u)} - z(u)\right]. \quad (58)$$

В численном исследовании этой функции низкая ветвь появляется у боковой кромки при Δ ≈ 0,923903962104910, или Δ/L ≈ 0,375272941639565. Две симметричные ветви сходятся в численной складке при Δ ≈ 4,567779085064762 и u ≈ 0,770970367447147. Кромочное и складчатое значения описывают семейство обычной периодичности. Они не совпадают с фокальным условием Δ* = 3,450219751578597 и не заменяют его.

При самом критическом сдвиге имеются две различные точки периода четыре: u = 0,407155844084253 даёт найденную фокальную орбиту, а u = 1,065124032699903 даёт обычную орбиту без прохождения внутренних фокусов. Вторая является продолжением известной C00002. Аналогично в критической геометрии второго режима имеются фокальная точка u = 0,533225492581941 и обычная точка u = 1,262986964186779. Поэтому у одного и того же набора стенок могут сосуществовать два одинаковых по периоду, но оптически различных маршрута.

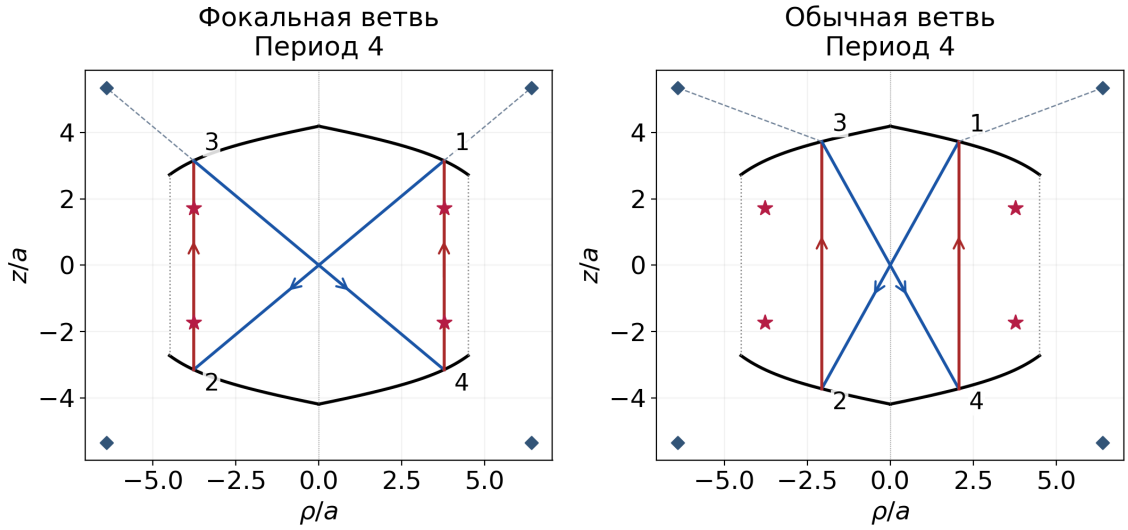

Рисунок 20. Две реально трассированные орбиты периода четыре в одной критической геометрии режима 1. Левая орбита проходит четыре внутренних фокуса, правая проходит мимо них. Одинаковый период и одинаковый порядок стенок не означают одинаковой фокальной природы.

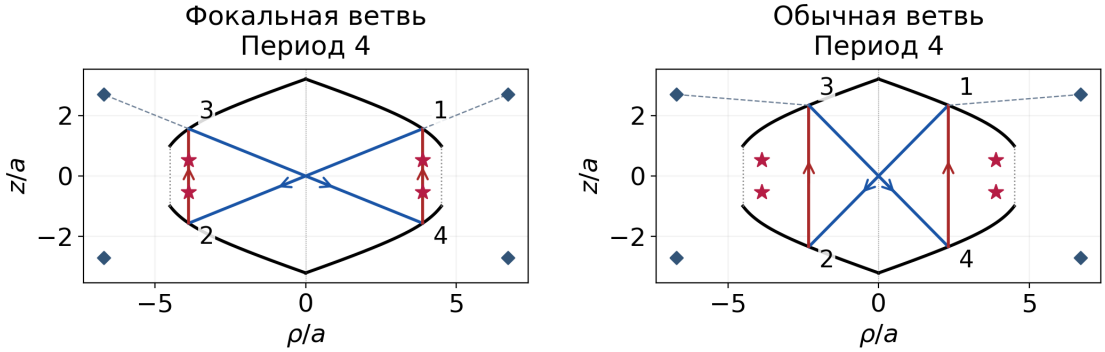

Рисунок 21. Сосуществование фокальной и обычной орбит периода четыре в одной геометрии режима 2. Дополнительный осевой сдвиг обеих орбит равен нулю. Каждая траектория получена зеркальными отражениями на точных стенках, а не проведением линий между выбранными точками.

Для продолжения каждой известной орбиты используется нелинейное решение двух фазовых условий возврата с аналитической производной. В первом режиме из 183 запрошенных состояний подтверждены 159, во втором 168. Орбиты C00001 периода два и C00002 периода четыре успешно продолжены до обеих критических геометрий; они остаются обычными и не посещают внутренние фокусы. Такой результат показывает, что изменение геометрии не уничтожает автоматически все прежние периодические семейства.

Продолжение C00009 требует более осторожного чтения. В первом режиме на одном из шагов численный решатель сошёлся к орбите минимального периода четыре, повторённой четыре раза при проверке шестнадцати ударов. Такое состояние отвергнуто как продолжение исходной орбиты периода шестнадцать. Во втором режиме найден кандидат минимального периода шестнадцать, но изменился порядок стенок; он также отвергнут как сохранение

прежнего семейства. После первого отвергнутого шага дальнейшие состояния этого продолжения не объявляются подтверждёнными.

Эти остановки не являются доказательством исчезновения C00009. Они фиксируют предел выбранной процедуры с данным шагом параметра и правилом сохранения маршрута. Для решения вопроса о бифуркации этой конкретной орбиты нужна отдельная более тонкая процедура продолжения около проблемного состояния. В настоящем исследовании достаточно установить, что новый фокальный цикл строго подтверждён и не получается ошибочным многократным повторением орбиты меньшего периода.

Атлас периодических орбит использует сохранённые вершины столкновений из orbit_points.json и точный вычислитель стенок соответствующей реализации геометрии. Последовательные вершины соединяются в записанном порядке, включая замыкающий сегмент; синие точки обозначают столкновения, чёрные кривые — аналитические стенки при k = 2 и a = 1. На рисунках 22 и 23 показаны 19 обнаруженных представителей. Это рассчитанные траектории, а не реконструкции по иллюстрациям или исчерпывающая классификация периодического движения.

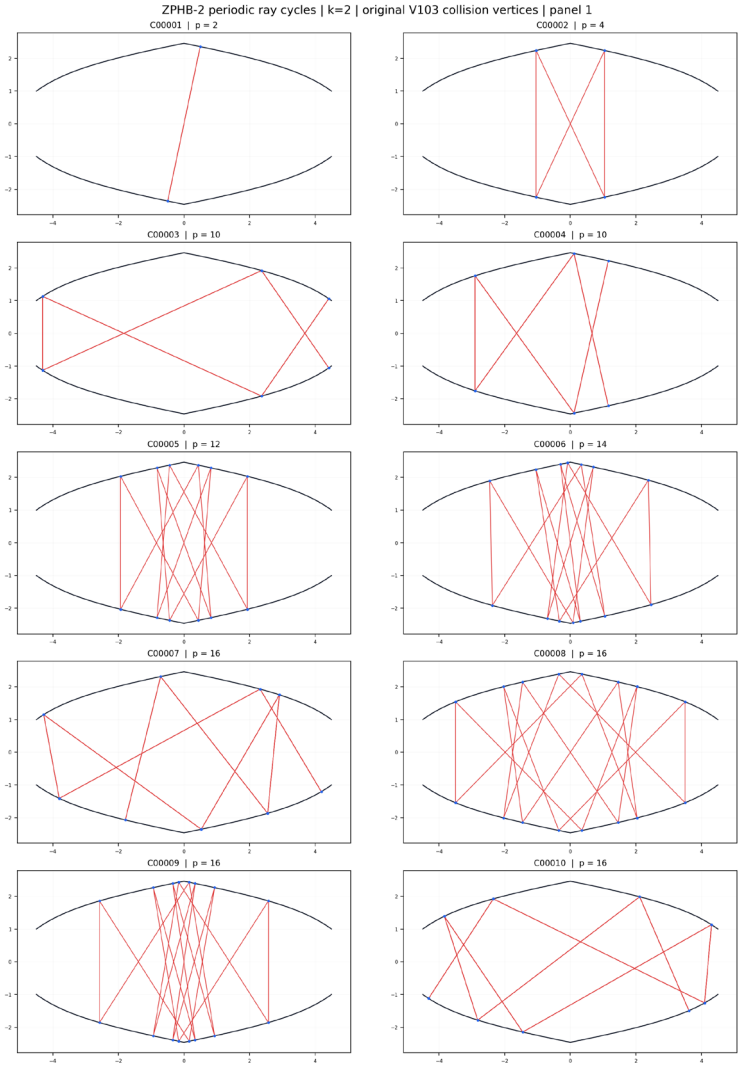

Рисунок 22. Атлас рассчитанных примитивных периодических лучей, лист 1 из 2. Пути построены по сохранённым вершинам столкновений и точной геометрии стенок.

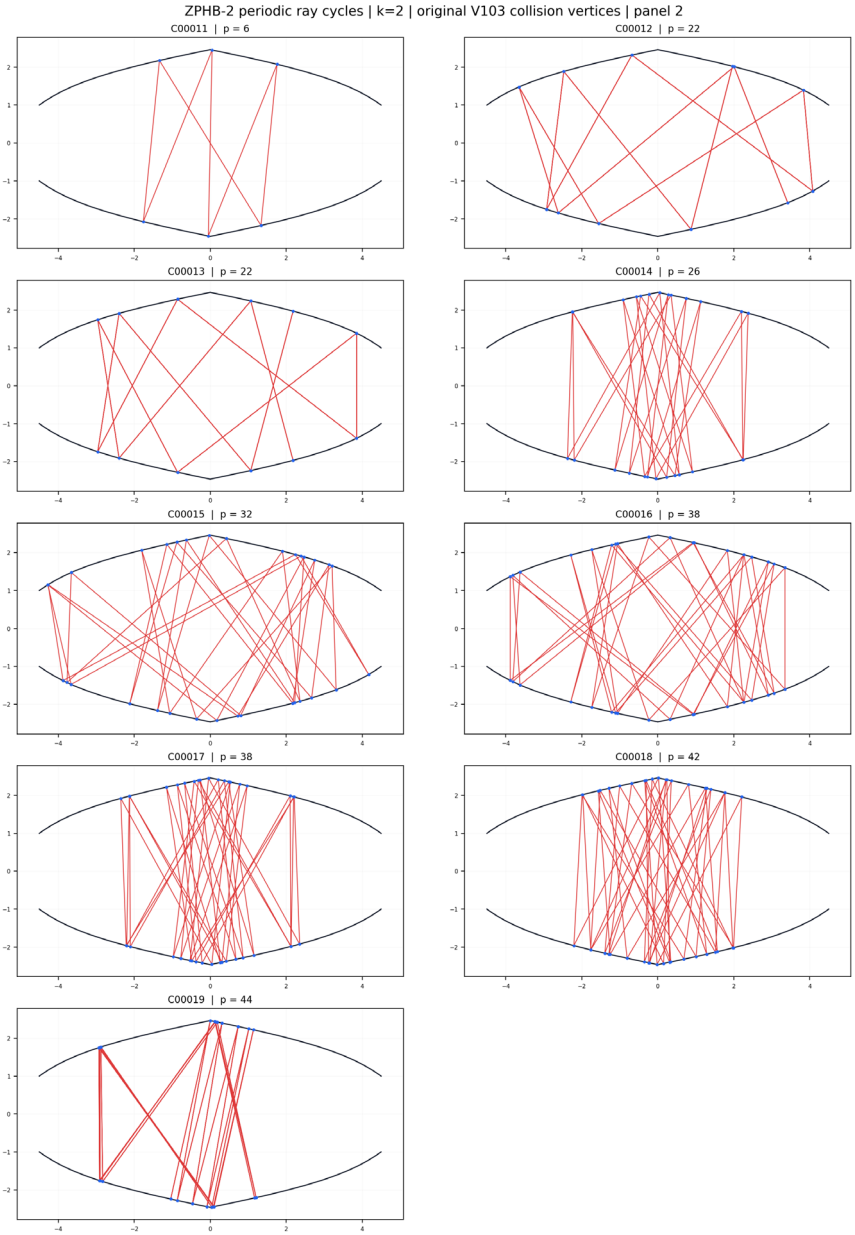

Рисунок 23. Атлас рассчитанных примитивных периодических лучей, лист 2 из 2. Пути построены по сохранённым вершинам столкновений и точной геометрии стенок.

5.4 Более длинные периодические пути через фокус

Фокальное прохождение слабее последовательного локального фокального сопряжения: периодический луч может пересечь внутренний фокус после промежуточных обычных отражений. Семь решений с ограничениями проверены одновременным наложением фазового возврата и знакового фокального прохождения при изменении одного геометрического параметра. Повторное уточнение точным отображением подтверждает примитивные периоды 10, 16, 32 и 38. Выбранные фокусы лежат строго внутри конечных сегментов при долях интерполяции от 0,3296 до 0,4934. Все матрицы возврата с аналитическими производными гиперболические. Их определители отличаются от единицы не более чем приблизительно на $5{,}5 \times 10^{-11}$. Максимальный модуль следа, около 1676,9 для маршрута периода 32, объясняет плохую обусловленность конечных разностей полного возврата. Это численные примеры фокального прохождения, а не общая теорема сжатия или классификация всех возможных периодов.

Таблица 14. Более длинные меридиональные периодические пути с фокальным прохождением.

Маршрут	Изменение	Период	ε_g	tr M
C00003	M1	10	−0.028470076	102.931819
C00003	M2_R	10	−0.072766435	73.84776
C00003	M2_b	10	+0.008704651	95.994391
C00010	M1	16	−0.056065823	602.55164
C00010	M2_b	16	+0.017765228	537.670835
C00015	M2_R	32	+0.107053099	-1676.898355
C00016	M1	38	+0.043706873	5.343797

M1: $\varepsilon_g=\Delta/L_0$; M2_R: $\varepsilon_g=R/R_0-1$; M2_b: $\varepsilon_g=b/b_0-1$. Во всех случаях $a=1$, $b_0=2$ и $R_0=4{,}499425544225889$.

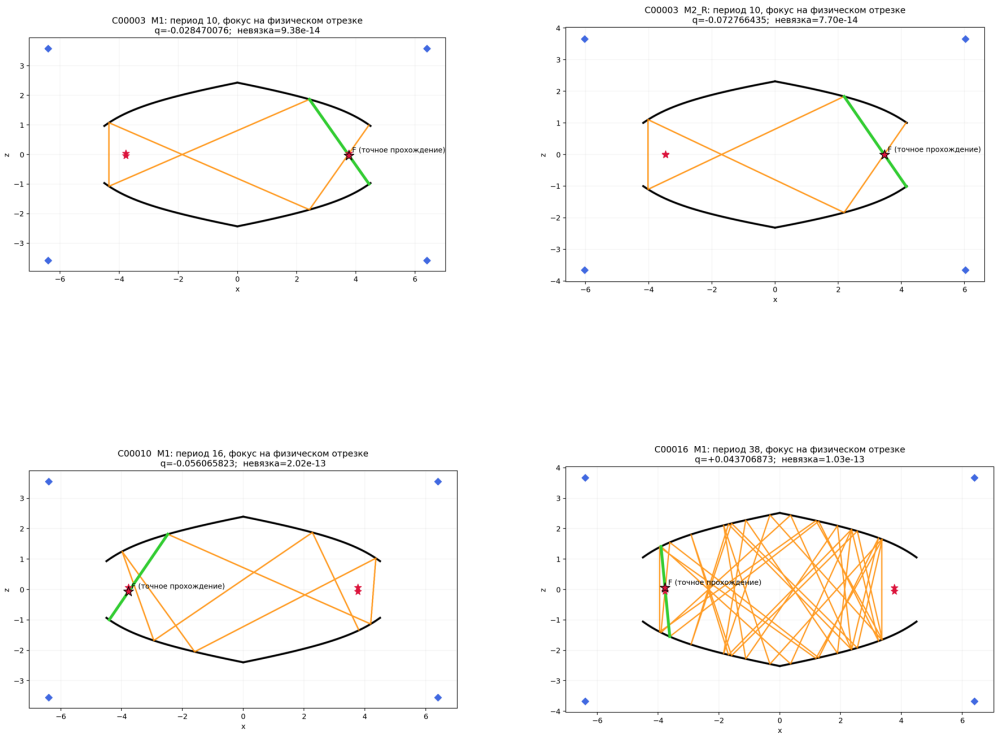

Рисунок 24. Исходные расчётные длинные маршруты фокального прохождения. Выделенные конечные сегменты пересекают отмеченный фокус; промежуточные отражения не обязаны быть локально фокальными. Исходные подписи графика сохранены.

5.5 Пространственные косые циклы и многоточечная постановка

Утверждённый скрипт строит пространственную поверхность вращением того же меридионального профиля. Поэтому найденная двумерная орбита имеет точное пространственное продолжение в любой меридиональной плоскости. Если угол этой плоскости равен φ, пространственные координаты точки записываются как (x, y, z) = (ρ cos φ,

ρ sin φ, z). Здесь ρ остаётся знаковой координатой сечения. При переходе через ось знак ρ меняется, что соответствует переходу на противоположную сторону той же плоскости, а не скачку физической траектории.

$$(x, y, z) = (\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z), \qquad \varphi = \text{const.} \quad (59)$$

На гладкой поверхности вращения нормаль к стенке в меридиональной плоскости принадлежит этой же плоскости. Свободный луч с начальным направлением в ней и его отражение остаются в плоскости. Кроме того, ортогональное вращение всей траектории и всей поверхности сохраняет векторный зеркальный закон. Поэтому вращение рассчитанного цикла даёт однопараметрическое семейство эквивалентных меридиональных пространственных орбит. Это точное следствие симметрии, для которого не требуется отдельное численное моделирование каждой плоскости.

Четыре внутренние фокальные точки двумерного сечения становятся двумя внутренними фокальными кольцами в пространстве: верхние правая и левая точки лежат на одном кольце, нижние на другом. Найденная орбита посещает по две диаметрально противоположные точки каждого кольца. Следовательно, выражение «четыре фокуса» в расчётном сечении не означает четыре изолированные пространственные точки. Такая геометрическая интерпретация существенна при обсуждении возможного распределения интенсивности в трёхмерной системе.

Меридиональное доказательство не переносится непосредственно на произвольный косой луч, который может иметь ненулевую азимутальную составляющую. Приведённый ниже пространственный расчёт относится к выбранным косым циклам. Полная четырёхмерная пространственная матрица возврата не установлена, поэтому указанные выше эллиптическая и гиперболическая классификации относятся только к возмущениям внутри меридиональной плоскости. Поперечная устойчивость остаётся отдельным вопросом.

Косой луч требует полноценного пространственного решателя. На регулярной поверхности $X(u,\varphi) = (\rho(u)\cos\varphi, \rho(u)\sin\varphi, z(u))$ нормаль не имеет азимутальной составляющей. Осевой момент $J_z = xv_y - yv_x$ сохраняется при свободном пролёте и отражении. Для меридиональных лучей $J_z = 0$. Поэтому циклическая пространственная ломаная с $J_z \neq 0$ является отдельным результатом. Многоточечный вариационный метод рассматривает каждую вершину отражения как неизвестную и делает суммарную длину $\mathscr{L} = \Sigma|P_{i+1} - P_i|$ стационарной по обоим касательным направлениям. Его уравнения: $(v_i^- - v_i^+)\cdot\partial P_i/\partial u_i = 0$ и $(v_i^- - v_i^+)\cdot\partial P_i/\partial\varphi_i = 0$. Прохождение кольца задаётся в точке $Q = P_e + t(P_{e+1} - P_e)$, где $0<t<1$, $\sqrt{(Q_x^2+Q_y^2)}=\rho_f$ и $Q_z=z_f$. Следующая вершина должна независимо проверяться как ближайшее физическое столкновение. Возврат направления и проверка собственных делителей являются отдельными условиями допуска.

Восемь локальных вариационных задач дали четыре принятые ломаные после освобождения a/R, b/R и Δ/R. Это четыре изменённые геометрии, а не четыре класса орбит одного бильярда. Две записи имеют примитивный период 16. Две записи с 20 ударами возвращаются после 10 и содержат два обхода. Для верхней кольцевой записи максимальное десятишаговое расхождение вершин равно $7{,}19 \times 10^{-14}$, а направлений — $1{,}69 \times 10^{-14}$. Прямая трассировка из кольца за примитивный период даёт ошибки возврата к прямой и направления $4{,}11 \times 10^{-13}$ и $4{,}74 \times 10^{-13}$. Нижний кольцевой пример периода 10 менее точен: ошибки равны $5{,}95 \times 10^{-10}$ и $1{,}37 \times 10^{-9}$. Оба примера периода 16 возвращаются с точностью порядка 10^{-12} или лучше. Возврат к кольцу происходит на выходящем сегменте до следующего столкновения, а не в последней вершине. Почти постоянные радиусы вершин сосуществуют с прямыми хордами переменного радиуса. Примеры показывают косые замкнутые пути через выбранные кольца,

но не устанавливают повторяемого локального гиперболического сопряжения, общей фокусировки косых лучей или поперечной устойчивости.

Таблица 15. Пространственные циклы и проверки примитивного периода.

Кольцо	Записано N	Примитивный период	J_z	Остаток положения	Остаток направления
верхнее	16	16	−2.115126889	1.89e−13	2.16e−13
нижнее	16	16	−2.033845689	4.59e−13	9.04e−13
верхнее	20	10	−1.643367400	4.11e−13	4.74e−13
нижнее	20	10	−1.634247066	5.95e−10	1.37e−9

В таблице 15 v является единичным вектором направления, поэтому J_z имеет размерность длины. Остаток положения — расстояние от исходной точки фокального кольца до возвращающейся прямой свободного пролёта после примитивного числа отражений; он приведён в координатных единицах указанной геометрии. Остаток направления — евклидова разность исходного и возвращённого единичных направлений; он безразмерен. Каждая строка относится к собственной геометрии, перечисленной ниже в том же порядке.

Случай 1: a=1.127975130345, b=1.624643889912, R=4.499425544226, Δ=-0.588730348480.

Случай 2: a=1.144584544733, b=1.567124615650, R=4.499425544226, Δ=-1.018435763034.

Случай 3: a=0.997254834646, b=1.389993318203, R=4.499425544226, Δ=-0.720707526305.

Случай 4: a=1.093384801083, b=1.485423815771, R=4.499425544226, Δ=-0.978980682877.

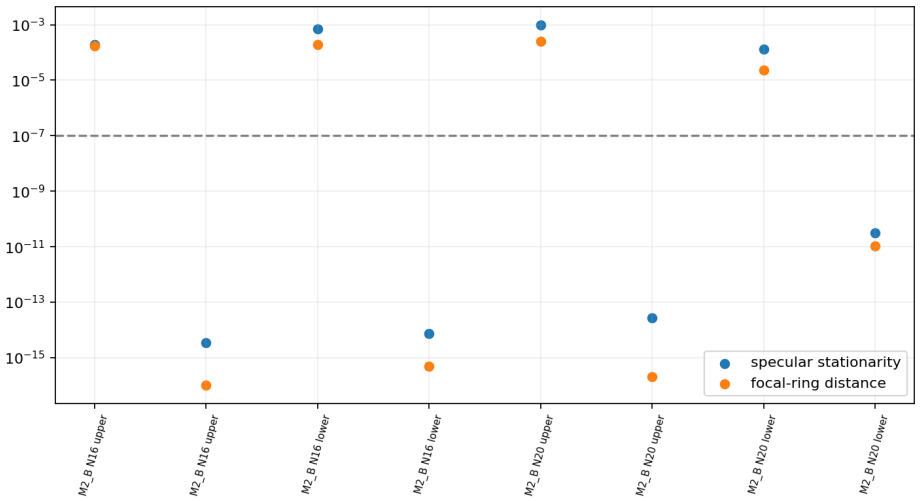

Рисунок 25. Исходные многоточечные остатки для восьми локальных задач. Допуск по остаткам сам по себе не определяет примитивный период.

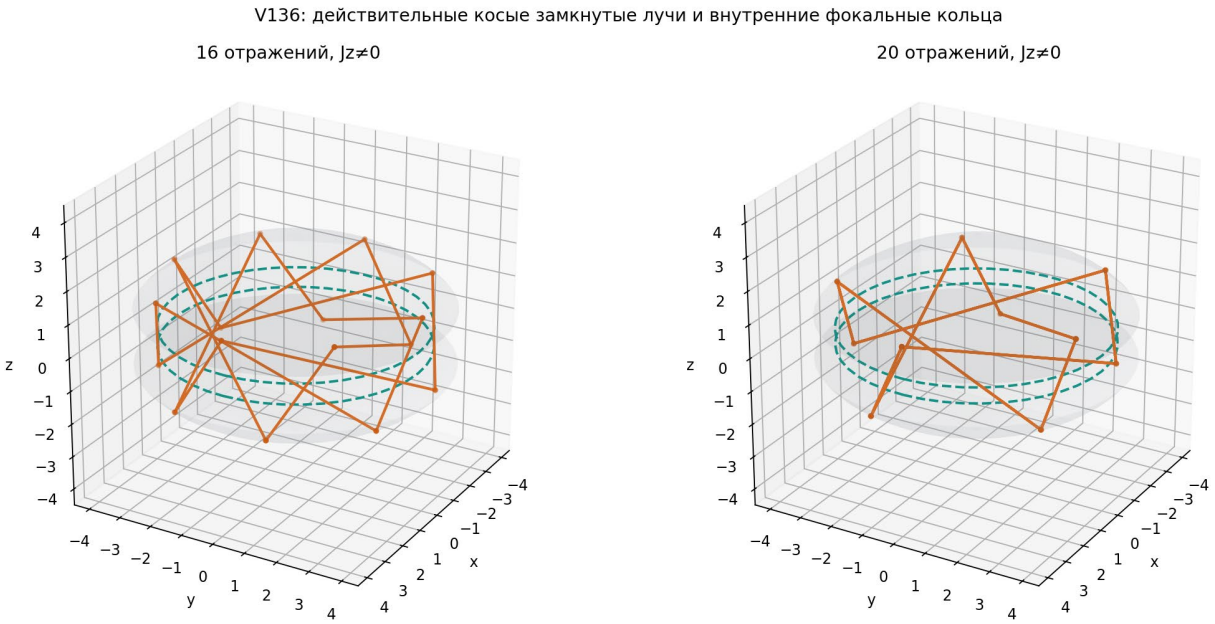

Рисунок 26. Исходные пространственные ломаные столкновений и внутренние фокальные кольца. Слева — примитивный период 16. Справа исходная подпись «20 отражений» обозначает два обхода проверенного примитивного цикла периода 10.

6 Открытый лучевой транспорт

6.1 Выход лучей и концентрация путей

Выживание фокально запускаемых лучей резко немонотонно вдоль точного семейства общего фокуса. Для основных значений k=1.74,1.80,1.90,2.00,2.10,2.20 средние числа отражений на конечном горизонте равны соответственно 254.0, 89.29, 16.54, 9.46, 36.08 и 58.98, а медианы — 447,13,5,3,4 и 41. Уже этот результат исключает простую монотонную зависимость времени удержания от k или R/a.

Таблица 16. Транспорт лучей фокального запуска на конечном горизонте.

k	Вышли	Цензурированы	Доля выхода	Среднее N	Медиана N
1.74	200	196	0.5051	254.0	447
1.80	384	12	0.9697	89.29	13
1.90	396	0	1.0000	16.54	5
2.00	396	0	1.0000	9.46	3
2.10	372	24	0.9394	36.08	4
2.20	396	0	1.0000	58.98	41

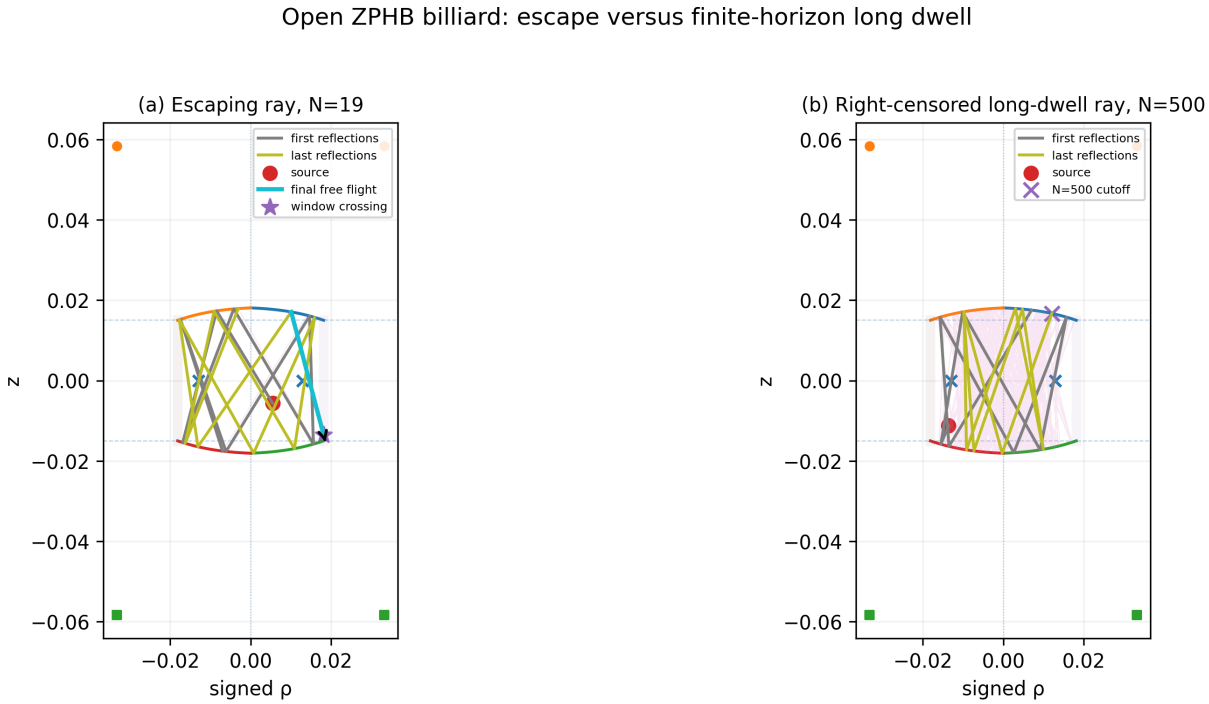

Рисунок 27. Физический выход через экваториальное окно и правосторонне цензурированная долгоживущая траектория.

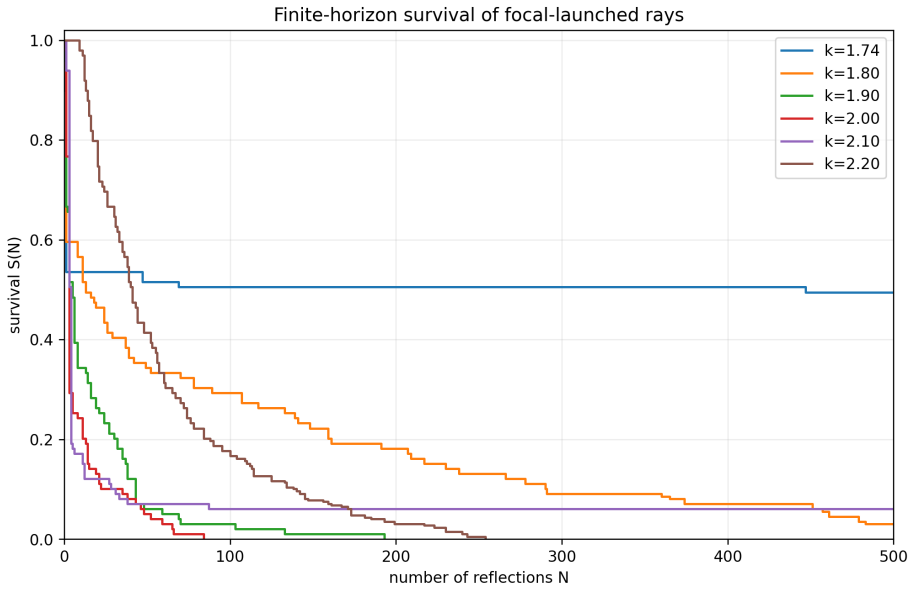

Рисунок 28. Кривые выживания на конечном горизонте для фокально запускаемых лучей при шести основных k.

Координата выхода несёт дополнительную информацию о транспорте. В уточнённом ансамбле состояний на стенке распределение выхода изменяется от выраженной концентрации у краёв при малых k к почти равномерному заполнению экваториального отверстия при больших k. Доля выходов во внешних полосах $|z|/a>0.8$ уменьшается с 0.490 при k=1.74 до 0.254 при k=2.00 и 0.216 при k=2.24. Дивергенция Кульбака–Лейблера относительно равномерного бинового распределения уменьшается соответственно с 0.324 до 0.026 и 0.006. Эта гомогенизация апертуры является транспортной характеристикой точной

геометрии и не интерпретируется как энергетическая эффективность или коэффициент усиления.

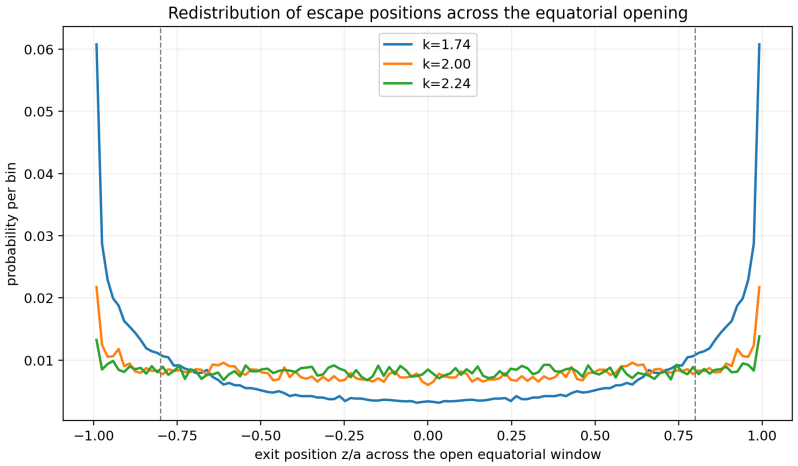

Рисунок 29. Сгенерированные скриптом распределения координаты выхода для уточнённого ансамбля состояний на стенке. При малом k распределение сильно смещено к краям, тогда как при большом k оно приближается к равномерному заполнению открытого экваториального интервала.

Поскольку часть траекторий достигает N=500, выживание рассматривается с правым цензурированием. Кривые Каплана–Майера и ограниченное среднее время выживания используются как характеристики конечного горизонта, а не как доказательство вечного захвата. При k=1.74 196 из 396 фокально запускаемых лучей достигают горизонта; при k=1.90,2.00 и 2.20 все лучи выходят до N=500.

Плотность длины пути после первого отражения также изменяется немонотонно. Для некоторых k максимум находится около области общего фокуса, а для многих других геометрий — нет. Этот отрицательный результат принципиален: общее фокальное кольцо не является универсальным максимумом инвариантной плотности бильярда ZPHB. Это геометрическая структура, селективно возбуждаемая некоторыми протоколами запуска, тогда как долговременная плотность полного бильярда определяется возвратным транспортом.

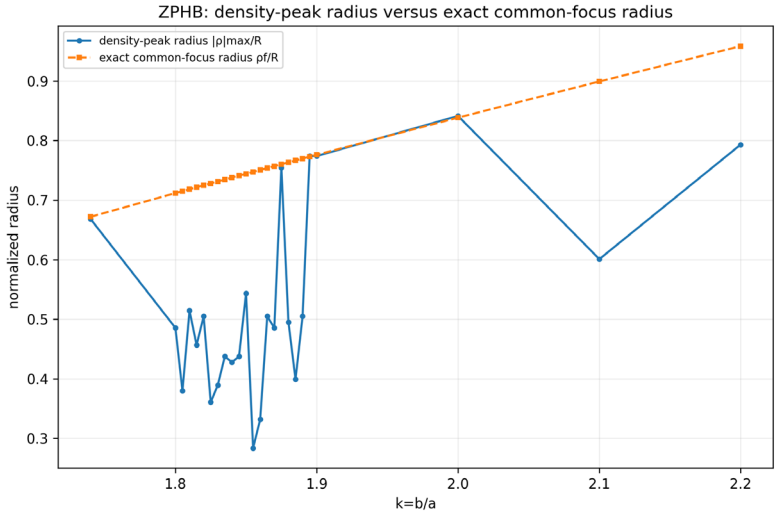

Рисунок 30. Сгенерированное скриптом сравнение нормированного радиуса максимума плотности пути с точным радиусом общего фокуса. Совпадение наблюдается только для отдельных геометрий.

Карты плотности после первого отражения при k = 1,90 и k = 2,00 показывают сведения, которые теряются при использовании одной координаты максимума: полосчатые распределения путей, концентрацию возле экваториальной области и симметрию знакового меридионального сечения. Определения маркеров и рассчитанные карты сохранены из генерирующих скриптов. Эти карты описывают выборочный пространственный транспорт, а не сингулярную каустику или инвариантную плотность вероятности.

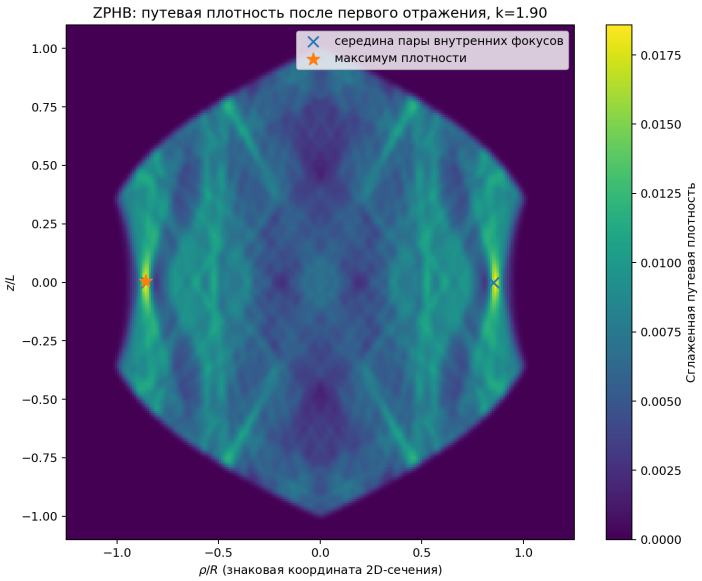

Рисунок 31. Карта путевой плотности после первого отражения для k=1.90, воспроизведённая из раннего проверенного скрипта плотности. Синий × отмечает середину пары внутренних фокусов, а оранжевая звезда — максимум сглаженной путевой плотности; цветовая шкала показывает сглаженную, взвешенную длиной сегментов путевую плотность в знаковом меридиональном сечении.

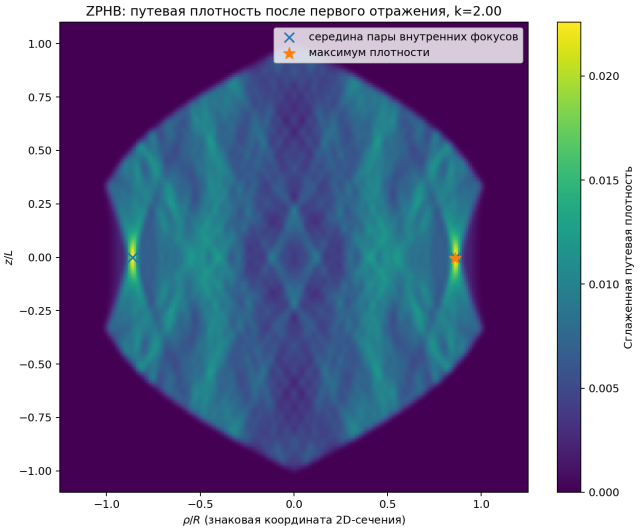

Рисунок 32. Карта путевой плотности после первого отражения для k=2.00, воспроизведённая из раннего проверенного скрипта плотности. Карта непосредственно показывает пространственную структуру концентрации и дополняет скалярное сравнение координат максимумов.

Карты плотности в сохранённом корпусе взвешены длиной сегмента, но используют конечное число точек дискретизации вдоль сегментов. Поэтому они надёжно выявляют

крупномасштабные зоны концентрации и их перемещение, но не позволяют утверждать сингулярные показатели каустик или бесконечно малую ширину пика.

6.2 Канонический транспорт и структура фазового пространства

Архивная независимая повторная трассировка всех 2 033 044 состояний даёт точное совпадение целого числа столкновений и конечного класса для 98,5898 процента состояний; 28 670 исходов различаются. Это диагностика чувствительности при конечной точности, а не сертификат совпадения траекторий. При k=2,24 невзвешенное среднее ансамбля со стенки меняется с 143,0669 до 142,5529 глобально и с 220,6505 до 221,1695 при уточнении — менее чем на 0,4 процента. Канонические средние ниже используют первичные массивы. Совпадение общих статистик не доказывает точного воспроизведения каждого длинного маршрута. Счётчик выходов включает обычные выходы без последующей стенки и не является числом ложных событий в отверстии.

Чтобы определить, не является ли обнаруженная динамика следствием специального фокального запуска, вторая независимая программа просканировала собственное фазовое пространство стенок и широкий ансамбль внутренних источников на точном семействе общего фокуса. Глобальный этап охватывал 51 геометрию от k=1.74 до 2.24 с шагом 0.01 и содержал 1 007 964 начальных состояния на стенке и 171 360 состояний внутренних источников. Уточняющий этап для 14 выбранных k добавил 684 376 состояний на стенке и 169 344 состояния внутренних источников. Итого обследование включает 2 033 044 начальных лучевых состояния. В завершённом архиве отсутствуют численные отказы и нефизические терминальные классы.

Исходная сетка состояний на стенке была равномерной по $\chi = u/U$ и α. Для представления результатов в канонической мере бильярда начальные состояния перевзвешивались по $d\mu \propto d\ell\, d(\sin\alpha) = J(\chi)\cos\alpha\, d\chi\, d\alpha$, где $J(\chi) = |d\Gamma/d\chi|$. Если не указано иное, приведённая ниже статистика граничного ансамбля использует это перевзвешивание. Оно изменяет абсолютные средние значения, сохраняя основные транспортные режимы.

Главное разложение — на захват и время жизни после захвата. При k=1.74 лишь 17.66% канонической начальной меры дают хотя бы одно последующее столкновение, но при условии захвата среднее время жизни достигает около 708 отражений на горизонте N=1000, а медиана цензурирована на 1000. При k=2.24 доля захвата возрастает до 98.48%, а условное среднее составляет около 255. Поэтому режим малого k режим представляет собой узкое окно захвата, питающее чрезвычайно липкую динамику, тогда как режим большого k режим допускает почти всю исследованную каноническую меру к многократному транспорту.

Таблица 17. Статистика граничного ансамбля с каноническим взвешиванием.

k	Захват	Среднее N	Среднее при захвате	Падение	Одна половина	Энтропия бит
1.74	0.177	125.0	708.1	0.993	0.001	0.982
1.80	0.482	159.5	330.6	0.977	0.002	1.000
1.90	0.690	153.2	221.9	0.962	0.003	1.018
2.00	0.814	57.6	70.8	0.936	0.010	1.073

k	Захват	Среднее N	Среднее при захвате	Падение	Одна половина	Энтропия бит
2.10	0.900	116.1	129.0	0.894	0.009	1.064
2.20	0.963	111.1	115.3	0.834	0.037	1.184
2.24	0.985	251.1	255.0	0.796	0.078	1.260

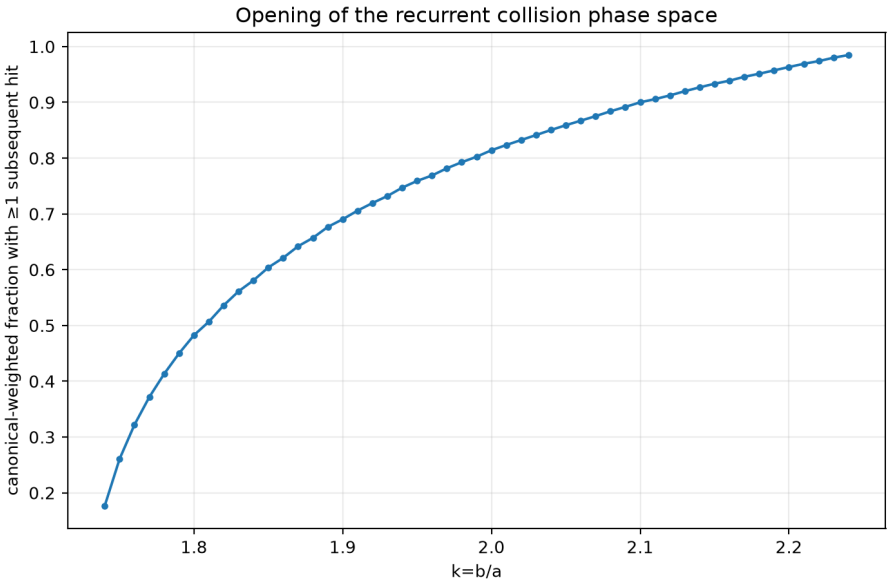

Рисунок 33. Каноническая доля захвата вдоль точного семейства общего фокуса. Доступность многоотражательной динамики резко возрастает с k.

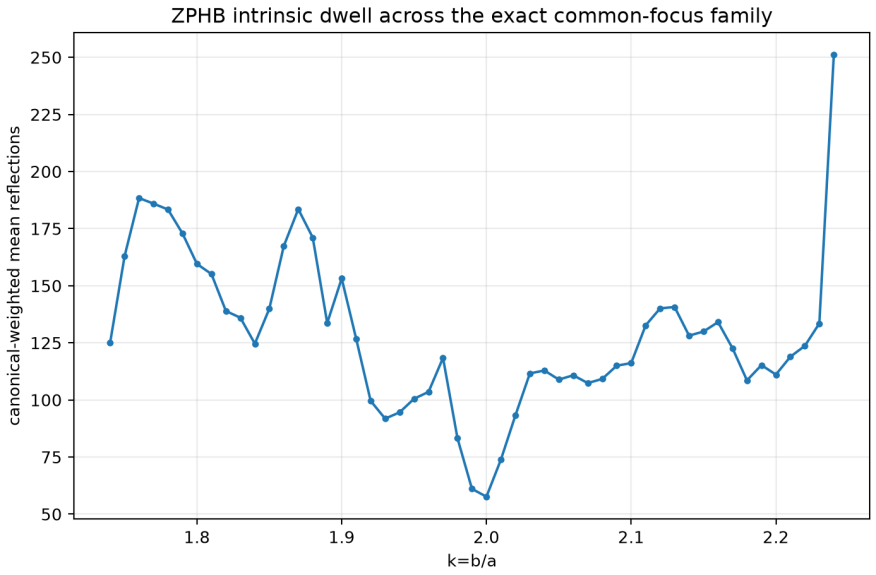

Рисунок 34. Канонически взвешенное среднее время удержания вдоль точного семейства общего фокуса. Минимум около k≈2 и повторный рост при больших k сохраняются после коррекции меры.

Безусловное каноническое среднее время удержания остаётся резко немонотонным: примерно 125, 160, 153, 57.6, 116, 111 и 251 отражение при k=1.74,1.80,1.90,2.00,2.10,2.20,2.24. Минимум около k=2 сохраняется после канонического перевзвешивания и после уточнения сетки. На общем горизонте N=1000 средние значения основной и уточнённой сеток различаются лишь на 2.1% при k=2.00 и на -1.3% при k=2.24. Для 14 уточнённых значений различия в основном составляют несколько процентов, что подтверждает устойчивость крупномасштабной структуры транспорта.

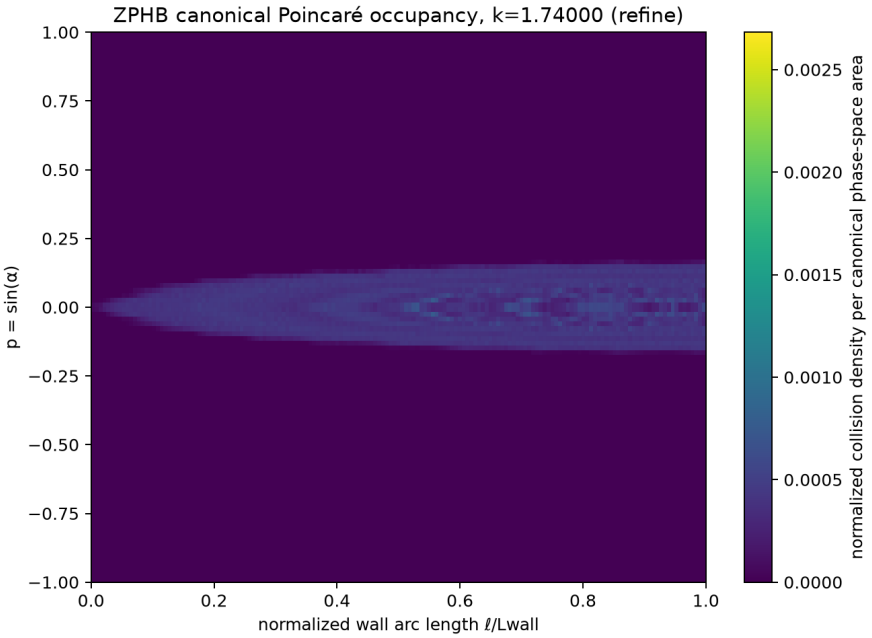

Рисунок 35. Каноническое заполнение сечения Пуанкаре на уточнённой сетке при k=1.74: узкая околонормальная возвратная структура.

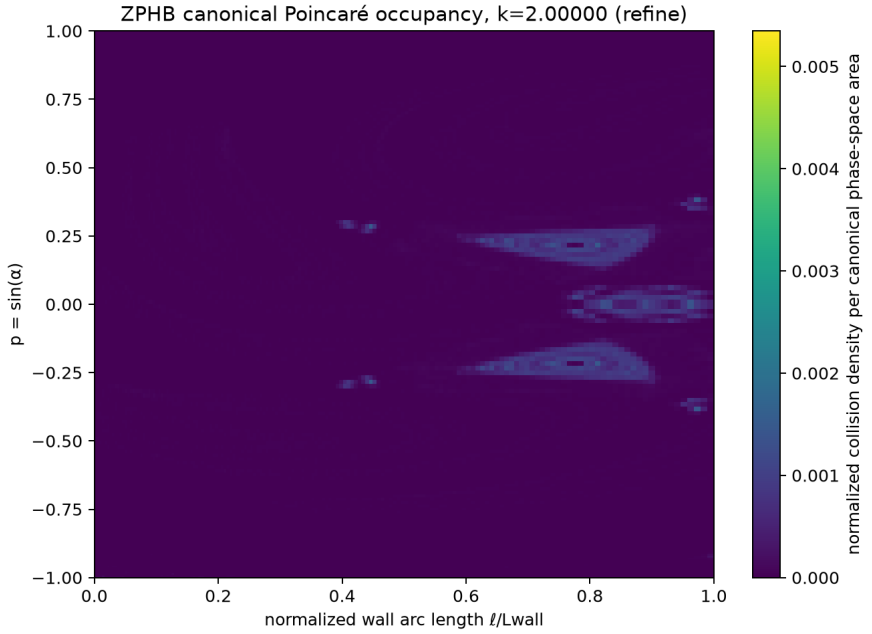

Рисунок 36. Каноническое заполнение сечения Пуанкаре на уточнённой сетке при k=2.00: разреженные фрагментированные возвратные структуры в режиме быстрого выхода.

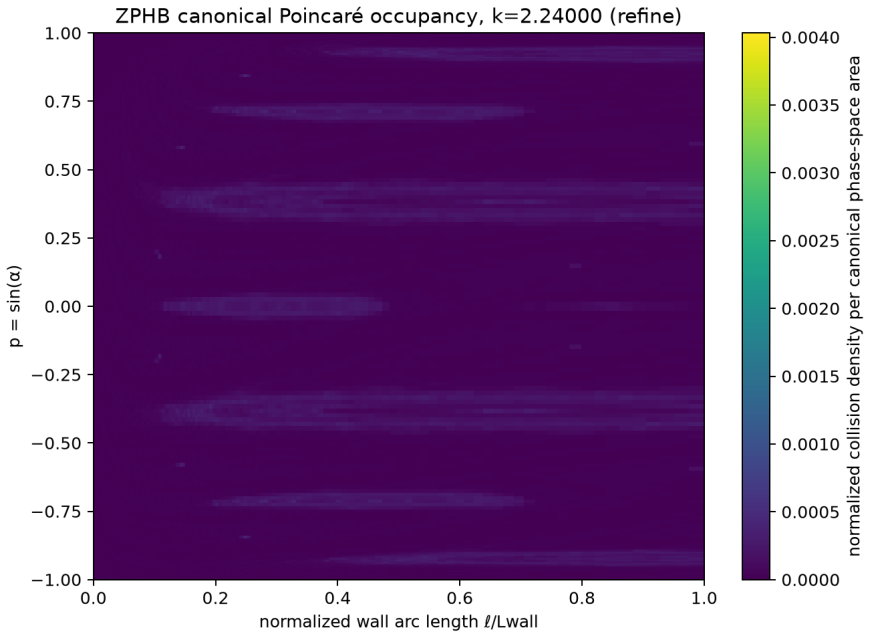

Рисунок 37. Каноническое заполнение сечения Пуанкаре на уточнённой сетке при k=2.24: широкоугольная полосчатая возвратность, отличная от режим малого k морфологии.

Каноническое заполнение сечения Пуанкаре даёт фазовую интерпретацию. При малом k повторно посещаемое множество сосредоточено в узкой околонормальной полосе. Около k=2 долгоживущие возвратные структуры становятся редкими и фрагментированными. При k=2.24 заполнение перестраивается в несколько широкоугольных полос. Анализ связных компонентов длительного пребывания карт усиливает это различие: на уточнённой сетке при k=1.74 условие N≥500 занимает 3864 ячейки всего в 8 крупных компонентах, тогда как при k=2.00 — 872 ячейки в 40 компонентах; при k=2.24 длительного пребывания популяция возрастает до 4432 ячеек, но распределена по 272 компонентам. Следовательно, режим малого k и режим большого k длительное удержание поддерживаются качественно различной конечносеточной морфологией.

Средний фактор нормальности удара <|d·n|> почти монотонно уменьшается от 0.993 при k=1.74 до 0.796 при k=2.24, тогда как занятая доля collision histogram расширяется примерно от 12% до 89% исследованных ячеек. Значит, рост k раскрывает всё более широкий угловой диапазон столкновений. Однако время жизни остаётся немонотонным, поэтому одна только доступная площадь фазового пространства не определяет выход; существенна связность транспортных каналов.

Четырёхстеночный символический анализ выявляет эту связность. Переходы внутри одной половины почти отсутствуют при малых k и затем постепенно открываются: их доля впервые превышает 0.5% при k=1.92, 1% при 2.07, 2% при 2.18 и 5% при 2.23, достигая 7.84% при k=2.24. Относительное предпочтение между по одной радиальной стороне и диагональными между верхней и нижней половинами маршрутами дважды меняет знак; линейно интерполированные кандидаты равны k≈1.93423 и k≈2.04879. Режим быстрого выхода около k=2 расположен между этими двумя инверсиями маршрутизации, что задаёт конкретный механизм для будущего локального продолжения.

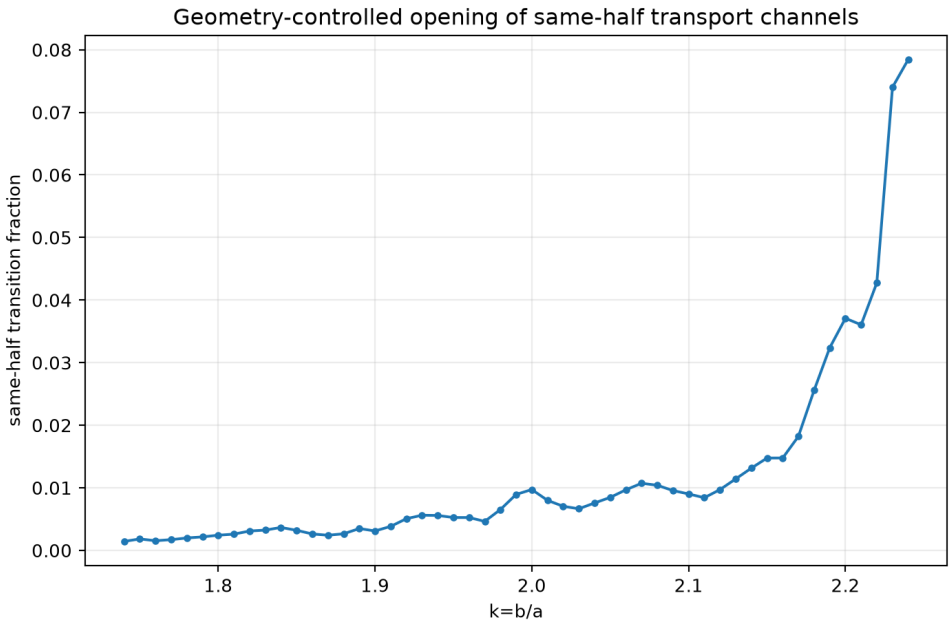

Рисунок 38. Открытие транспортных каналов внутри одной половины при росте k.

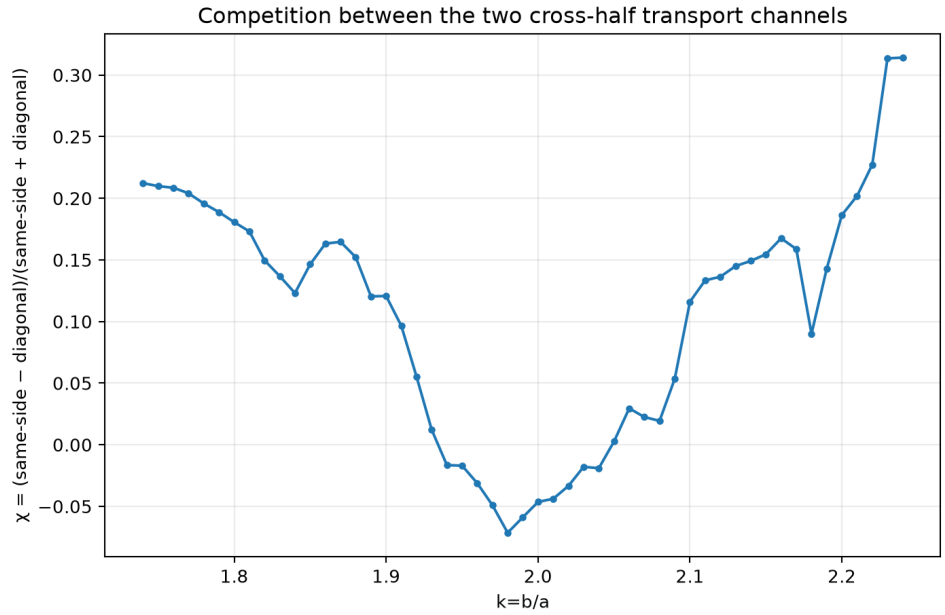

Рисунок 39. Конкуренция между по одной радиальной стороне и диагональными между верхней и нижней половинами маршрутами. Две смены знака ограничивают интервал, содержащий минимум быстрого выхода.

Таблица 18. Статистика основной и уточнённой сеток на общем горизонте N = 1000.

k	**Глобальное среднее**	**Уточнённое среднее**	**Изменение**	**Глобальный выход**	**Уточнённый выход**
1.74	125.05	124.58	-0.37%	0.880	0.878
1.78	183.35	181.86	-0.81%	0.872	0.874

k	Глобальное среднее	Уточнённое среднее	Изменение	Глобальный выход	Уточнённый выход
1.80	159.53	160.54	+0.64%	0.901	0.897
1.83	135.97	134.87	-0.81%	0.909	0.911
1.85	139.92	142.81	+2.07%	0.890	0.885
1.86	167.38	167.69	+0.19%	0.860	0.860
1.88	171.06	175.40	+2.54%	0.866	0.859
1.90	153.16	156.98	+2.49%	0.882	0.878
2.00	57.63	58.82	+2.07%	0.961	0.960
2.10	116.12	111.79	-3.73%	0.900	0.904
2.17	122.63	127.82	+4.23%	0.901	0.893
2.20	111.09	113.17	+1.87%	0.923	0.920
2.23	133.49	140.33	+5.13%	0.921	0.915
2.24	251.14	247.91	-1.29%	0.821	0.816

Хвосты выживания в доступном конечном диапазоне обычно неэкспоненциальны: сравнение по информационному критерию часто предпочитает степенной кандидат, а для части геометрий — растянутую экспоненту; простая экспонента выигрывает редко. Это свидетельство структурированного липкого выхода, но не доказательство асимптотического степенного закона. Конечный горизонт, цензурирование и отсутствие траекторно-разрешённого анализа инвариантных многообразий не позволяют формулировать такую теорему.

Глобальное обследование также даёт почти возвратные начальные приближения с расстояниями в пространстве состояний порядка 10^-8. На уточнённой сетке при k=1.83 80 из 100 ближайших сохранённых кандидатов имеют период возврата 20; при k=1.86 сильно представлен p=8; при k=2.20 получено почти возвратное начальное приближение периода p=24; при k=2.23 лучший сохранённый возврат равен 4.14×10^-8 и присутствуют несколько высокопериодных мотивов. Эти объекты остаются начальными приближениями, а не новыми точными периодическими классами, пока независимо не решено T^p(X)=X и не исключены делители примитивного периода.

7 Физическая интерпретация и приложения

7.1 Физическая интерпретация и научный вклад

Центральный результат — совместимость локальной геометрии на составной открытой границе. Отражённая гипербола сохраняет классический закон, но задаёт фокальные координаты, которые можно согласовать с другими сегментами. Ограничение общего фокуса

обеспечивает непрерывный перенос; определитель разнесённых фокусов выделяет физический периодический путь из обычного возвратного движения; многочлен допускает два пространственных радиуса для одной формы коники. Фокальное согласование, возвратность, выживание и концентрация плотности остаются самостоятельными наблюдаемыми величинами. Гиперболическая орбита может точно замыкаться и усиливать ошибку запуска, эллиптический цикл — выживать на конечной трассировке без доказательства неограниченного удержания, а максимум плотности — находиться вне фокального кольца. Периодичность в конусе исключает утверждение исключительности замкнутых лучей для ZPHB. Пространственное прохождение кольца слабее повторяемого меридионального двухфокусного сопряжения. Вклад состоит в точном проектировании фокальной связности с контролируемыми численными подтверждениями получаемой динамики.

Равномерное масштабирование a, b, R и Δ сохраняет безразмерное лучевое отображение и изменяет фокальные координаты и длины пролётов в тот же масштаб. Главные кривизны изменяются обратно пропорционально длине, а гауссова кривизна — квадрату длины. Физическая волновая реализация дополнительно должна учитывать длину волны относительно апертуры и шероховатости поверхности, дифракцию, поляризацию и потери при отражении. Аналитическое лучевое построение даёт геометрическую основу такого исследования, но не является решением полевой задачи при конечной длине волны.

7.2 Перспективные технические приложения

Отражающая полость задержки может использовать эллиптический цикл с разнесением. Точные профили зеркал сохраняются, а расстояние задаётся как Δ*. Ввод через боковое отверстие должен обеспечивать запуск лучей в проверенной фазовой окрестности; слабо пропускающее зеркало или малый порт обеспечивает считывание. Металлическое либо диэлектрическое покрытие, соответствующее длине волны, задаёт отражение. Установленная геометрическая характеристика — геометрическая длина периода и конечное сохранение близких начальных состояний. При энергетическом коэффициенте отражения одного столкновения η мощность после n идеальных периодов умножается на η^{4n} до учёта утечки через апертуру. Полезная задержка требует измерения отражения, дифракционных потерь и пространственной устойчивости. Решающее сравнение — распределения времени прихода и утечки настроенных и отклонённых по Δ границ при одинаковых апертуре и возбуждении. Добротность и порог лазера из идеальной лучевой модели не следуют.

Устройство связи с фокальными кольцами размещает кольцевые либо локальные приёмники возле двух предсказанных внутренних колец. Меридиональные циклы пересекают противоположные точки колец, а косые примеры проходят через выбранное кольцо при ненулевом J_z. Размещение приёмников должно следовать фактическому распределению источника, а не предполагаемой равномерной кольцевой интенсивности. Наблюдаемые величины — доля перехваченных лучей и время прихода, затем амплитуда и фаза в полевом эксперименте. Электромагнитная реализация требует модели Максвелла для выбранного отражающего материала; акустика — давления, скорости и импеданса стенки. Настроенные и отклонённые формы должны иметь одинаковые мощность источника, площадь приёмников и апертуру. Многоисточниковая пеленгация и модовая избирательность остаются проверяемыми гипотезами устройства.

Пассивный угловой селектор может использовать гиперболический цикл согласования формы: малые ошибки запуска создают предсказуемое локальное экспоненциальное отклонение и различные окна прихода или выхода. Передаточная функция — вероятность перехода из входной фазовой ячейки во временную либо пространственную выходную ячейку. Управляемая апертура источника, полированное зеркало и детектор с временным

разрешением задают экспериментальную архитектуру. Локальный логарифмический рост предсказывает чувствительность, но не неограниченное угловое разрешение или усиление мощности.

Построение H/V допускает сравнение кольцевой и осевой пространственной маршрутизации с физически различными границами при одинаковых масштабе, материале и входной энергии. Наблюдаемая величина — матрица между управляемыми входами и областями приёмников. Упругое применение требует явно определённого твёрдого тела или оболочки, плотности, параметров Ламе и свободных либо связанных границ с измерением энергии деформации; преобразование продольных и поперечных мод не выводится из скалярного оптического отражения. Сингулярную осевую вершину нужно явно усечь или скруглить и повторно проверить инженерную границу.

7.3 Область применимости и ограничения

Точные утверждения относятся к зеркальному построению, многообразию общего фокуса, двухотражательному отображению на допустимой апертуре, знаку кривизны указанного класса H-ZPHB и необходимому и достаточному четырёхотражательному согласованию с законами сдвига и формы. Численные остатки орбит не являются интервальными сертификатами существования. Конечные каталоги не исключают других периодов и не устанавливают глобальную интегрируемость. Линейная меридиональная эллиптичность не доказывает нелинейную или поперечную пространственную устойчивость. Посещаемость конечной сетки не устанавливает инвариантные торы, асимптотический степенной выход, сингулярные каустики или постоянное удержание. Кольцевые множества — меридиональные фокальные множества, а не стигматические фокусы произвольных косых лучей. Дифракция, интерференция, поляризация, дисперсия и потери отсутствуют. Эффективность устройств и мировой приоритет относительно всех сборок коник не установлены.

8 Заключение

Зеркальный псевдогиперболоид задаёт точное построение составной отражающей поверхности, фокальные связи которой можно выбирать аналитически. Отражение конечных гиперболических образующих с последующим вращением вокруг заданной оси создаёт пространственную геометрию, в общем случае не являющуюся квадрикой, и сохраняет классическое локальное свойство коники. Общий внутренний фокус обеспечивает непрерывный двухотражательный перенос; разнесённые внутренние фокусы допускают заданный примитивный четырёхотражательный цикл при выполнении явных законов переноса и согласования формы. Соответствующие опорные циклы различаются меридиональной линейной устойчивостью; одной форме коники могут соответствовать два радиуса согласования. Более длинные меридиональные пути, пространственные косые циклы и результаты ансамблевого транспорта показывают сосуществование этих фокальных структур с обычным периодическим движением и выходом лучей. В рамках геометрической волновой инженерии полученный принцип проектирования состоит в совместном задании геометрии границы и фокальных связей с последующим анализом полного отображения лучевых состояний. Отражающая задержка, связь с фокальными кольцами и пассивная селекция лучей представляют конкретные направления развития. Их практическую ценность следует проверять на сопоставимых настроенных и расстроенных геометриях с помощью моделей при конечной длине волны и измерений связи, потерь и пространственной устойчивости.

Литература

1. Birkhoff, G. D. On the periodic motions of dynamical systems. Acta Mathematica 50, 359–379 (1927).

2. Tabachnikov, S. Geometry and Billiards. Student Mathematical Library 30. American Mathematical Society (2005).

3. Chernov, N. & Markarian, R. Chaotic Billiards. Mathematical Surveys and Monographs 127. American Mathematical Society (2006). doi:10.1090/surv/127.

4. Sinai, Ya. G. Dynamical systems with elastic reflections: ergodic properties of dispersing billiards. Russian Mathematical Surveys 25(2), 137–189 (1970).

5. Bunimovich, L. A. On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards. Communications in Mathematical Physics 65, 295–312 (1979).

6. Gutzwiller, M. C. Chaos in Classical and Quantum Mechanics. Springer, New York (1990).

7. do Carmo, M. P. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall (1976).

8. Kaplan, E. L. & Meier, P. Nonparametric estimation from incomplete observations. Journal of the American Statistical Association 53, 457–481 (1958).

9. Born, M. & Wolf, E. Principles of Optics, 7th ed. Cambridge University Press (1999).

10. Poet, D. A. & Poet, R. R. W. Confocal conic billiards. Physics Letters A 271, 277-284 (2000). doi:10.1016/S0375-9601(00)00377-7.

11. Stachel, H. The geometry of billiards in ellipses and their Poncelet grids. Journal of Geometry 112, 40 (2021). doi:10.1007/s00022-021-00606-2.

12. Torras, J.-P. Mirror-centered representation of a focusing hyperbolic mirror for X-ray beamlines. Journal of Synchrotron Radiation 31, 1464-1468 (2024). doi:10.1107/S1600577524009603.

13. Goldberg, K. A. and Sanchez del Rio, M. Off-axis representation of hyperbolic mirror shapes for X-ray beamlines. Journal of Synchrotron Radiation 30, 514–518 (2023). doi:10.1107/S1600577523001492.

14. Khaustov, V. Focal–Transport Ray Law in Pseudohyperboloidal Cavities with Variable Negative Gaussian Curvature: Exact Focal Contraction, Event-Order Transport, Skew-Ray Unfolding, and Finite-Wavelength Computational Tests. Zenodo preprint (2026). doi:10.5281/zenodo.21969312.