Геометрическая волновая инженерия

Упругие волны в псевдогиперболоидах 2-го порядка

Аналитическое проектирование границ, кодирование нагрузок, энергетически нормированное межмодовое рассеяние и пьезоэлектрический съём - расчётное исследование с очерченными границами применимости

Хаустов Игорь Николаевич[1], Хаустов Владимир Игоревич[2]

[1] Кандидат технических наук (ВАК СССР, 1984 г.)

[2] Независимый исследователь; ORCID: 0009-0007-3657-2309

Лаборатория геометрической волновой инженерии https://vihrihaosa.ru/

Лицензия: CC BY 4.0

Дата публикации: 13 ноября 2026 года

DOI: 10.5281/zenodo.23644187

Научно-технический перевод с английского языка.

Редакция, адаптированная для русскоязычного инженера-исследователя.

Оригинал: Khaustov. I. Khaustov. V. Geometric Wave Engineering of Elastic Waves in Pseudohyperboloidal Solids: analytical Boundary Design, Load Encoding, Power-Normalized Multimode Scattering, and Piezoelectric Readout — A Computational Study with Stated Limits. https://doi.org/10.5281/zenodo.23644187

Аннотация

Геометрическая волновая инженерия (ГВИ) рассматривает аналитически заданную внешнюю границу как пассивную проектную переменную: поверхность фиксируется уравнением, а не свободной оптимизацией, поэтому отклик становится дифференцируемым по параметрам формы, а конфигурации — взаимно сопоставимыми. ГВИ не является теорией какой-либо конкретной среды: это среда-независимая методология — аналитическая геометрия → оператор краевой задачи → организация физического состояния, формально Y = S_G[I], — в которой уравнение среды никогда не изменяется, а задаётся только граница, так что выбранная граница изменяет нормали отражения, траектории распространения, дифракцию, радиационную утечку и перекрытие с возбуждаемой областью — и только это. Она не вводит ни дополнительного взаимодействия, ни независимого источника энергии. К настоящему времени методология применена к управлению волнами в газовой динамике, акустике, электромагнитных волнах и оптике. Настоящее исследование применяет её к упругим средам — первое систематическое расширение на трёхмерную эластодинамику и связанную электроупругость — в рамках той же иерархии доказательств и тех же явно очерченных границ утверждений, что и в сопутствующих работах.

Объект — монолитные алюминиевые тела вращения, меридиональные образующие которых суть гиперболы, радиально смещённые и приведённые во вращение (псевдогиперболоидальные тела, РНВ). РНВ сравниваются с равнообъёмными негиперболическими контролями при идентичных тензорах свойств, возбуждении, контактных портах и конфигурации приёмников. Поскольку твёрдое тело несёт связанные продольно-сдвиговые поля, все функционалы вычисляются из трёхмерной линейной эластодинамики и связанной электроупругости, а не из лучевых представлений; резонансный режим требует явного контроля расстройки в единицах полуширины линии.

Результаты делятся на четыре категории. Сравнительные: производные формы, предсказывающие знак изменения канала; калиброванное кодирование нагрузки как обратная задача, снижающее чувствительность к шуму и ошибку многоканальной реконструкции в пределах узкой полосы и калиброванного семейства источников; модальное управление выбранным каналом; пьезоэлектрическое считывание, выгодное только при номинальных потерях. Структурные: модальная локализация по кинетической энергии, сохранение знака ранжирования при измельчении сетки, доля преобразования, разложение отношения мощностей на фактор входной подвижности и фактор преобразования, а также покомпонентный усреднённый по циклу поток Пойнтинга с локальными обращениями знака и балансом величин компонент в выходной области. Методические: протокол сравнения и минимальный набор совместно сообщаемых величин. Верификационные: корректность численной реализации.

Геометрия устанавливается тем самым как дифференцируемая и сопоставимая проектная переменная и как операторно-значная причинная цепь — но не как технологическое превосходство: решающее сравнение с независимо оптимизированным негиперболическим конкурентом при равном бюджете оптимизации остаётся невыполненным условием фальсификации. Утверждения о потоке остаются локальными и зависящими от монитора, перенаправление полной усреднённой мощности не заявляется.

Ключевые слова: геометрическая волновая инженерия, псевдогиперболоидальные тела, векторная эластодинамика, производная по форме, чувствительность к допускам, кодирование механической нагрузки, межмодовая передача, пьезоэлектрический съём, соответствие мод, резонансная отстройка, сеточная сходимость, двухпортовое рассеяние направляемых волн, неосесимметричное управление модами.

Содержание

Аннотация 2
1. Введение: научная задача геометрического проектирования 4
2. Аналитическая геометрия РНВ и сопоставимые контрольные тела 5
3. Уравнения физики и проверяемые функции отклика 10
3.1. Как граница входит в передаточный оператор 11
3.2. Наблюдаемые метрики и критерии сравнения 12
4. Кодирование упругих нагрузок при калиброванном возбуждении 13
4.1. Неизвестные частота и апертура источника 17
4.2. Перенос на некалиброванные пространственные профили силы 20
5. Пассивная передача волновой энергии и импеданс приёмника 21
6. Трёхмерное связанное пьезоэлектрическое сравнение 27
7. Чувствительность к гладким отклонениям от точного профиля РНВ 31
8. Численная верификация и границы доказательства 33
8.1. Целевой повторный расчёт и более сильные геометрические контроли 34
8.2. Расширенная проверка сходимости трёхмерной сетки алюминиевого тела 36
8.3. Отдельное сгущение сетки пьезоэлектрических секторов 37
8.4. Замечания рецензента: сопоставимость конструкций и пределы материальной модели 37
8.5. Согласованный вариационный тест P1/P2 и криволинейная изопараметрическая геометрия 38
8.6. Проверка сохранения заряда и мощности полной блочной системой и методом Шура 40
8.7. Что доказывают новые проверки и что остаётся открытым 41
8.8. Независимый аудит квадратичных элементов с прямолинейной границей при отдельной материальной модели 41
8.9. Проверка соответствия мод и резонансной отстройки на рабочей частоте 43
9. Физическая интерпретация и альтернативные механизмы 45
10. Дополнительные функции геометрического управления упругими волнами 48
10.1. Предсказуемая геометрическая чувствительность девятимодового оператора 49
10.2. Избранный физический канал передачи между гибридными модами 51
10.3. Экваториально локализованная неосесимметричная собственная мода 52
10.4. Реальное возбуждение: собственная локализация ещё не означает полезный приёмник 53
10.5. Технический смысл и границы доказательства 54
11. Энергетически нормированное двухпортовое рассеяние упругих волн и управление неосесимметричными модами в псевдогиперболоидальных телах 55
11.1. Научный вопрос и физическая роль геометрии 55
11.2. Точная геометрия РНВ, допустимые контроли и условия сравнения 55
11.3. Полная векторная эластодинамика в азимутальных фурье-секторах 56
11.4. Механическая мощность, модовые DtN-порты и матрица рассеяния 57
11.5. Осесимметричный сектор m=0: преобразование гибридных меридиональных мод 58
11.6. Сектор m=1: трёхкомпонентные направляемые волны и геометрически зависящее отражение 59
11.7. Старшие неосесимметричные сектора m=2 и m=3 60
11.8. Материальные потери, многокритериальная оценка и смысл границы Парето 62
11.9. Иерархия верификации, отсечки мод и численные ограничения 63
11.10. Физическая интерпретация и технологические перспективы 63
11.11. Выводы и значение для программы ГВИ 64
12. Возможные устройства и решающие экспериментальные проверки 64
12.1. Условные численные преимущества и проверенные свойства расчётной модели 65
12.2. Перспективные архитектуры и заранее заданные измеримые критерии 66
12.3. Критерий перехода от расчётного эффекта к прототипу 68
13. Заключение 68
Приложение А. Перенос энергии у внутренних свободных поверхностей во временных окнах 71
Приложение Б. Сводка расчётных сравнений и границ доказательности 72
14. Литература 75

1. Введение: научная задача геометрического проектирования

Физическая задача. Сила, действующая на конечное упругое тело, возбуждает векторное поле перемещений, а не единственный луч. Даже при одинаковых плотности и упругих константах металла поверхность меняет отражение объёмных волн, участие собственных мод и деформации в области приёмника. Поэтому ставится операционный вопрос: способна ли математически заданная граница повысить различимость входных нагрузок, передачу между определёнными упругими модами или механико-электрический сигнал на заданной нагрузке? Каждое утверждение должно сопровождаться измеряемой величиной, источником, приёмником и сопоставимой контрольной формой [6, 7].

Операционно возбуждение задаётся комплексной тягой на верхнем диске среза, а выходом служат либо компоненты перемещения на внешнем поясе, либо выбранная направляемая мода упругого волновода, либо напряжение пьезоэлектрического электрода с резистивной нагрузкой. Поэтому один и тот же монолитный материал рассматривается в трёх разных прямых задачах, каждая со своим источником, граничными условиями и целевым функционалом. Продольные, сдвиговые и приповерхностные движения описываются совместной векторной задачей, а не одним скалярным фокальным лучом.

Что является новым, а что нет. Зависимость упругих колебаний от формы границы следует из классической эластодинамики и не объявляется новым законом. Предлагаемый вклад состоит в воспроизводимом геометрическом семействе с небольшим числом интерпретируемых параметров, физически определёнными входными и выходными портами и количественно вычисляемыми производными отклика по форме. Принципиально новая технология потребовала бы экспериментально подтверждённой устойчивой функции, превосходящей независимо оптимизированные негиперболические формы и сохраняющейся при неопределённости крепления, потерь и при сеточной сходимости. Именно это является целью программы, а не уже доказанным результатом.

Центральное положение работы — проверяемая инженерно-физическая гипотеза, а не заявление об открытии нового волнового уравнения. При одинаковом материале, заданном источнике и сопоставимых приёмных устройствах способна ли аналитически заданная неквадрическая граница изменить полезное преобразование нагрузки в механический или электрический сигнал сильнее, чем численные погрешности, ошибки описания источника и неопределённость материальных свойств? Ответ требует последовательной цепочки: аналитическая область, корректная векторная краевая задача, измеряемый функционал, физически обоснованные контроли и критерий численной приёмки.

Математическая новизна геометрии и технологическое превосходство — разные утверждения. Точная гиперболическая образующая и её фокальные множества определяют воспроизводимую конструкцию; они не означают существования скалярных лучевых фокусов для поля перемещений в твёрдом теле. Инженерное преимущество — это сравнение измеряемых функционалов полных решений упругодинамической задачи, причём только для явно заданных конкурирующих геометрий и режимов.

Ультразвуковой приём начинается ещё до появления напряжения на входе регистрирующей электроники. Сила, приложенная к одному участку металлического тела, возбуждает продольные и сдвиговые движения; отражения, интерференция, взаимная связь мод и диссипация определяют деформацию, приходящую к удалённому приёмнику. При неизменном материале геометрия может изменить весь путь механической передачи. Поэтому практический вопрос состоит не в том, влияет ли форма на волны, — это известно, — а в том, способна ли аналитически выбранная форма обеспечить измеримое и воспроизводимое преимущество над сопоставимыми альтернативами [7–9].

Мы называем эту исследовательскую стратегию Геометрической волновой инженерией (ГВИ): целенаправленным выбором области и её границы как проектных параметров стандартной волновой краевой задачи. Она не вводит дополнительной силы или нового определяющего закона материала. В работе исследуется конкретное семейство монолитных алюминиевых конструкций, образующие которых представляют собой гиперболы или их контролируемые зеркальные отражения. Полученные срезанные и составные тела называются псевдогиперболоидальными (PHB); их гладкие участки относятся к псевдоповерхностям переменной отрицательной гауссовой кривизны. Математически точные фокусы гиперболических образующих служат геометрическими ориентирами, но сами по себе не доказывают фокусировку связанных конечноволновых P- и SV-волн. Исследования упругих метаповерхностей [1] и связанных пьезоэлектрических моделей [2,3] дают научный контекст, но не устанавливают рассматриваемые здесь характеристики.

$$y = H(G, Z, s; \omega)\, x + n \tag{1}$$

В этом соотношении G обозначает полную геометрию тела и его границы, Z — импедансы приёмника и соединения, s — допускаемое пространственное семейство источника, x — комплексные коэффициенты нагрузки, y — измеряемый отклик, n — измерительный шум. Зависящее от частоты отображение H получается решением уравнений упругости и пьезоэлектричества, а не предположением о фокальном лучевом законе. Изменение приёмника, семейства нагрузок либо проектной цели способно изменить предпочтительную геометрию. Поэтому далее различаются три инженерные функции: восстановление заданных механических воздействий по нескольким каналам перемещений, передача механической волновой энергии к пьезоэлектрическим нагрузкам и управление амплитудами выбранных направляемых мод. Для каждой применимой модели проверяются роль контакта, отклонения от точной гиперболы и численная надёжность.

Отдельная двухпортовая прямая задача расширяет перечень наблюдаемых величин: вместо перемещения или электрического выхода рассматривается нормированная по мощности матрица рассеяния направляемых упругих волн. Двухпортовая конструкция имеет собственную точную геометрию PHB с прямыми цилиндрическими продолжениями; она не совпадает с усечённой геометрией верхнего диска источника или пьезоэлектрической моделью разделов 4–8. Поскольку распространяющиеся каналы и соответствующие механические мощности определены явно, преобразование, отражение и поглощение можно оценивать, не отождествляя локальный максимум смещения с полезной передачей волны. Раздел 11 содержит полную векторную постановку для азимутальных секторов, модовые граничные операторы, численную проверку и допустимые сравнения.

2. Аналитическая геометрия PHB и сопоставимые контрольные тела

Зачем нужна аналитическая поверхность. Граница исходного тела задаётся не набором независимых координат узлов сетки, а аналитическим выражением с параметрами a, b, R и положением верхнего среза. Из одного выражения получаются трёхмерное тело, нормали, кривизна, геометрический объём и допустимые близкие деформации. Следовательно, можно изменить одну физическую проектную переменную, согласованно перестроить область и границу и вычислить изменение передаточной функции, не подменяя вариацию формы произвольным смещением сеточных узлов.

Аналитическое построение существенно потому, что оно задаёт каждую точку границы металл–пустота без аппроксимации подгоняемым сплайном. Параметры a, b, R и верхний срез однозначно определяют область $\Omega(G)$, внешнюю нормаль n(G), диск возбуждения и

экваториальный пояс приёмников. Именно эти величины входят в интегралы массы и жёсткости, а следовательно — в волновой отклик. В этом строгом смысле геометрия становится проектным параметром; никакой особый фокальный закон заранее не предполагается.

Геометрические сравнения выполняются на двух уровнях. Равные объём и плотность материала обеспечивают равную массу металла, а одинаково определённые источник и приёмник устраняют часть внешних различий. Однако собственные частоты, местная кривизна, высота, импеданс порта и эффективные потери от этого не уравниваются. Поэтому каждый вывод относится к указанному семейству контрольных тел. Для проверки необходимости гиперболического профиля обязательны гладкие негиперболические деформации с сохранением объёма; независимо оптимизированное традиционное тело было бы более сильным контролем.

Используются цилиндрические координаты (r, φ, z) с осью вращения r = 0. Горизонтальная РНВ имеет верхнюю меридиональную ветвь z = f(r) и отражённую нижнюю ветвь z = −f(r). Опорный профиль, высота на оси и верхний срез определяются выражениями

$$z^2/a^2 - (r - R)^2/b^2 = 1 \tag{2}$$

$$z \geq a \tag{3}$$

$$0 \leq r \leq R \tag{4}$$

$$f(r) = a\,[1 + ((R - r)/b)^2]^{1/2} \tag{5}$$

$$0 \leq r \leq R \tag{6}$$

$$L = f(0) \tag{7}$$

$$L = a\,[1 + (R/b)^2]^{1/2} \tag{8}$$

$$z_c = L/2 \tag{9}$$

$$f(r_c) = z_c \tag{10}$$

Монолит занимает область, заданную уравнением (11). Верхний срез образует диск радиуса r_c, на который приложен источник; этот радиус не равен a. Область между ограничивающими ветвями полностью заполнена алюминием; внутренней экваториальной перегородки нет. Внешний пояс является частью металлической границы и несёт области приёма. Параметры a, b и R имеют размерность длины; L=f(0) — высота исходного тела по оси, а исследуемый верхний срез задан условием z_c=L/2. Для существования радиуса пересечения требуется a≤z_c≤L. В других конструкциях z_c можно менять независимо, но в представленных расчётах такой скан отдельно не выполнялся. На рисунках 1 и 2 показаны полные меридиональные сечения и фактическое расположение приёмников в трёхмерной модели; последующие графики профилей также относятся к отдельной обратной задаче.

$$\Omega = \{(r,z):\ 0 \leq r \leq R,\ -f(r) \leq z \leq \min[f(r),\ z_c]\} \tag{11}$$

При 0<r<R гладкая верхняя ветвь имеет f′<0 и f″>0, поэтому поверхность вращения обладает отрицательной гауссовой кривизной. При r=R производная профиля равна нулю, и предельная кривизна равна нулю. Меридиональные фокальные точки образующей гиперболы заданы в уравнении (12); при вращении они образуют фокальные кольца. Это

геометрические опорные множества, а не доказанные фокусы упругой энергии. Указанные свойства кривизны относятся только к регулярным гладким участкам графика, но не к оси, краям среза, стыкам или внешнему цилиндрическому поясу.

$$F_{\pm} = (R, \pm\sqrt{(a^2 + b^2)}) \tag{12}$$

Роль отрицательной гауссовой кривизны. Для гладкой верхней поверхности z=f(r) главные кривизны имеют противоположные знаки. Обозначим t=(R−r)/b. Кривизна и производные профиля задаются формулами:

$$K = f'(r)f''(r)/[r(1+f'(r)^2)^2] \tag{13}$$

$$t = (R-r)/b \tag{14}$$

$$f'(r) = -(a/b)t/(1+t^2)^{(1/2)} \tag{15}$$

$$f''(r) = (a/b^2)/(1+t^2)^{(3/2)} \tag{16}$$

Зеркальный псевдогиперболоидальный профиль (ZPHB) строится отражением гиперболической ветви относительно хорды, соединяющей её концы. При $p_0=(R,a)$, $d=(-R,L-a)$ и $Q=2dd^T/(d^Td)-I$ отражённая ветвь имеет вид:

$$p_Z(t) = p_0 + Q[-bt, a(\sqrt{(1+t^2)}-1)]^T \tag{17}$$

$$0 \le t \le R/b \tag{18}$$

Гибрид объединяет неотражённую верхнюю ветвь и отрицательное значение отражённой нижней высоты после нахождения t по радиальной координате. Это определение воспроизводит реализованную конструкцию. Для данного упругого сравнения не требуется предполагать общее внутреннее фокальное кольцо.

Ниже сначала показана геометрия расчётных тел, а не вычисленное волновое поле. Это позволяет до обсуждения сравнения увидеть сплошной монолит, верхний диск источника и четыре раздельных приёмных сектора.

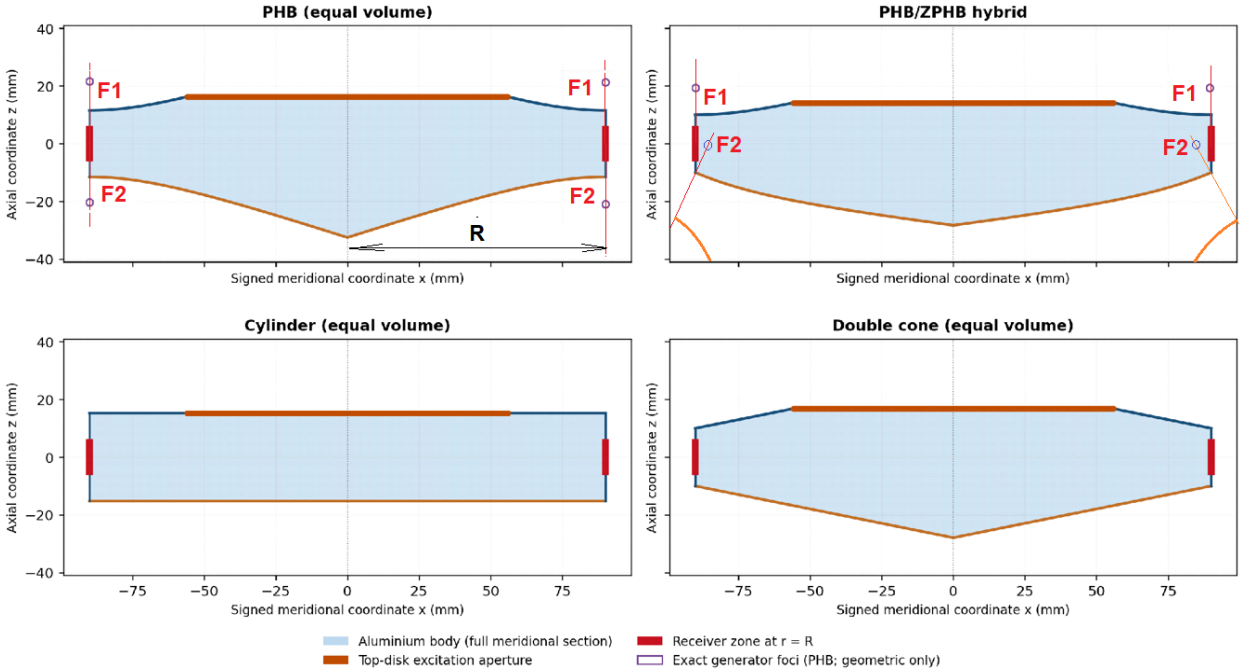

Рисунок 1. Полные меридиональные сечения четырёх равнообъёмных алюминиевых тел по геометрии выполненной трёхмерной конечно-элементной модели: PHB, гибрид PHB/ZPHB, цилиндр и двойной конус. Заливка обозначает сплошной металл; показаны верхний диск возбуждения и внешние зоны приёма. Незакрашенные маркеры PHB

являются фокусами образующей, а не измеренными фокусами упругих волн. Оригинальный геометрический рисунок.

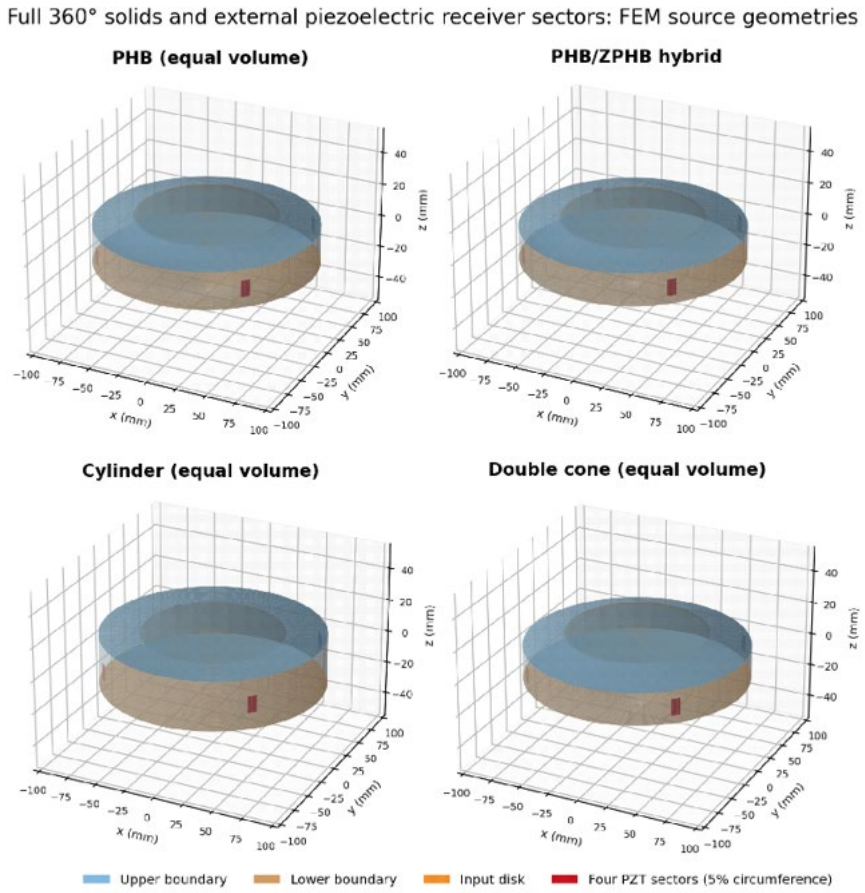

Рисунок 2. Трёхмерные поверхности вращения из выполненной конечно-элементной геометрии с верхним источником и четырьмя отдельными пьезоэлектрическими секторами (суммарный угловой охват 5%). Геометрические изображения не содержат расчётного поля перемещений или энергии. Оригинальный результат рабочего скрипта визуализации; пиксели не изменялись.

Таблица 1. Геометрические и физические параметры двух экспериментов

Величина	**Определение нагрузок**	**Электрический выход**
a, мм	10	10 гибрид; 11,5018027 PHB
b, мм	20	34
R, мм	100	90
Верхний срез	L/2	L/2
Радиус источника r_c, мм	53.096	55.9706
Положение приёмников	r = R; z = 0, ±a/2	r = R; |z| ≤ 5 мм
Частота, кГц	151–153	63–64.2 (зависит от модели)
Алюминий E, ν, ρ	69 ГПа; 0.33; 2700 кг/м³	Те же

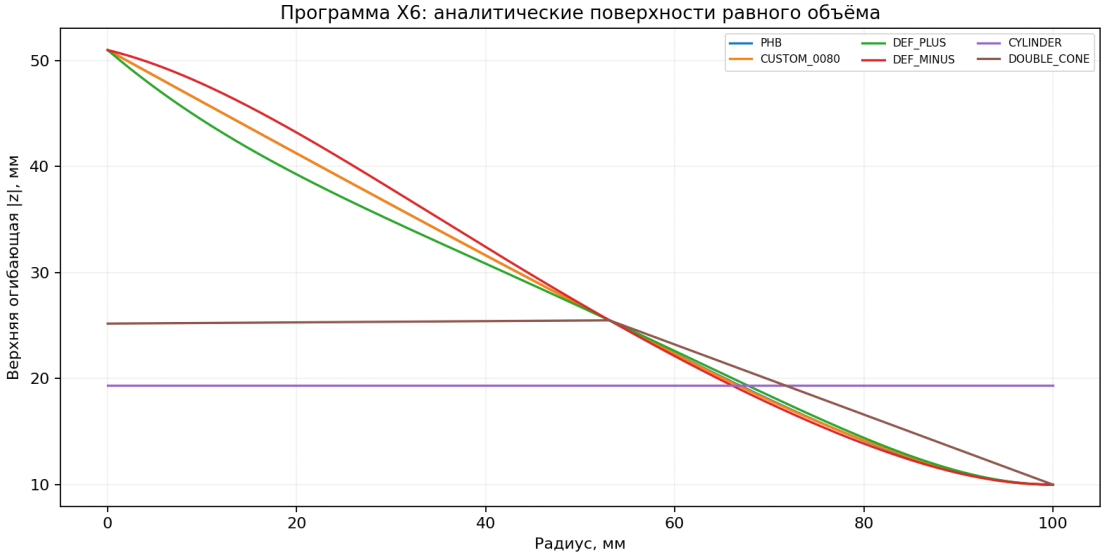

Рисунок 3. Профили задачи определения нагрузок. По вертикали отложена положительная высота образующей, а не поле перемещений. Цилиндр и конус служат равномассовыми контролями.

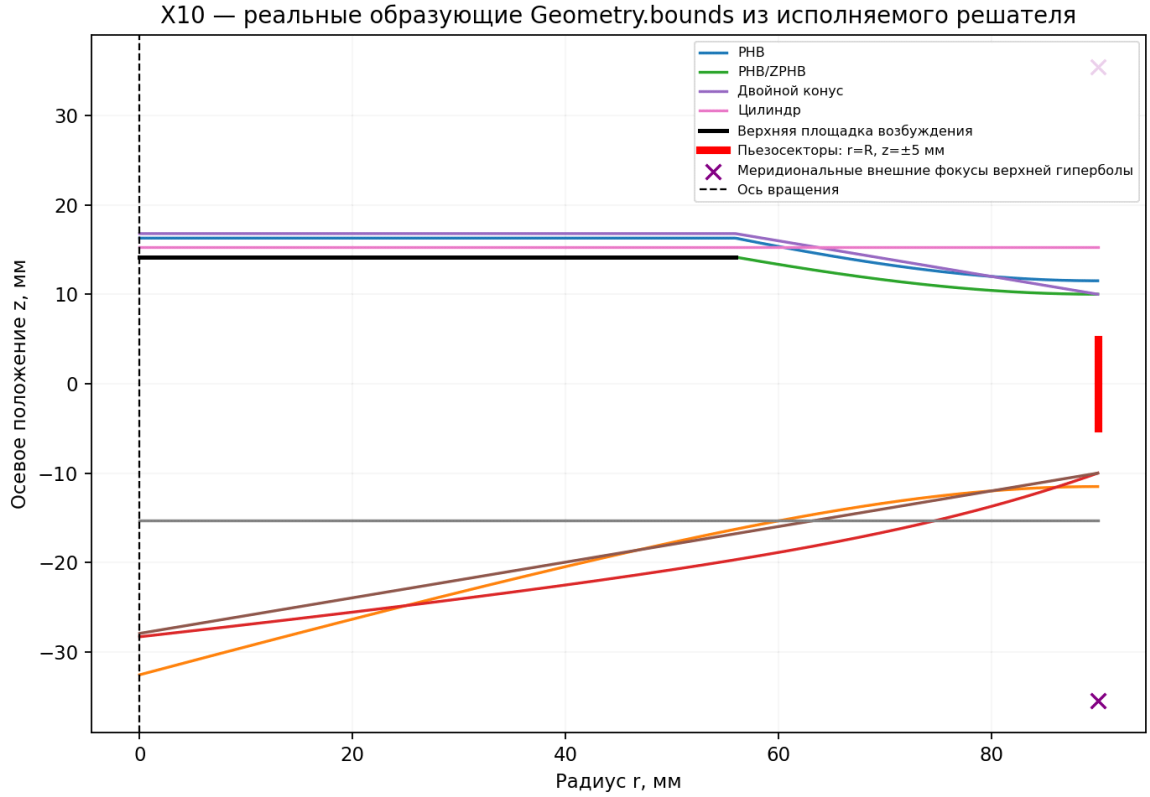

Рисунок 4. Фактические меридианы модели электрического выхода, включая верхний срез, внешний приёмный пояс и геометрические фокусы. Параметр a у PHB изменён для совпадения объёма с гибридом. Исходные русские надписи сохранены; радиус и осевая координата выражены в миллиметрах.

Все четыре геометрии электрического выхода имеют аналитический объём 776,368454 см³, одинаковые внешний радиус, область приложения источника и площадь приёмника. У равномассовой PHB a = 11,5018027042 мм, а у гибрида a = 10 мм. Следовательно,

совпадение объёма не означает совпадения всех размеров или собственных частот. Высота цилиндра и высота вершины конического контроля определяются из интеграла объёма. Эти контроли проверяют преимущество выбранной РНВ над конкретными простыми телами, но не над оптимизированным классом всех цилиндров или конусов.

Смысл согласованных контролей. Равенство аналитического объёма алюминия означает одинаковую номинальную массу при общей плотности. Совпадение внешнего радиуса, области возбуждения и поверхности приёмника ограничивает другие источники смещения результатов. Однако модальная динамика не становится одинаковой: могут различаться наклон стенки, локальная толщина, собственные частоты, податливость входного порта и области максимумов деформации. Поэтому для задачи с фиксированным источником сопоставляется отклик при одинаковой заданной силе, а для эффективности отдельно используется поступающая механическая мощность. Доказательство оптимальности потребовало бы также независимой оптимизации негиперболических контролей при тех же проектных ограничениях.

3. Уравнения физики и проверяемые функции отклика

От геометрии к решаемой полевой задаче. Геометрия задаёт область Ω(G), в которой одновременно решаются баланс импульса, определяющие соотношения напряжений, входная тяга и связь с приёмником. После дискретизации состояние определяется следующей системой:

$$[K(G) + i\omega C_d(G) - \omega^2 M(G) + Z(G, \omega)]u = B(G)f \tag{19}$$

Чтобы отделить распространение упругой волны от её регистрации, введём комплексное трёхкомпонентное перемещение u(x,ω); тензор деформаций, баланс импульса и определяющее соотношение для напряжений заданы уравнениями (20)–(22). Слабая форма получается умножением на пробное перемещение v, интегрированием по Ω(G) и включением приложенной поверхностной тяги. Таким образом, форма задаёт область интегрирования, нормаль к поверхности и место приложения нагрузки, тогда как тензор материала при сравнении форм не меняется.

$$-\omega^2 \rho u = \nabla \cdot \sigma + f \tag{20}$$

$$\varepsilon(u) = \tfrac{1}{2}[\nabla u + (\nabla u)^T] \tag{21}$$

$$\sigma = \mathfrak{C}^* : \varepsilon(u) \tag{22}$$

В пьезоэлектрическом секторе требуется вторая неизвестная величина — электрический потенциал V_e. Электрическое поле, пьезоэлектрические определяющие соотношения и закон Гаусса заданы уравнениями (23)–(26). Резистор является физическим граничным условием и элементом цепи, а не множителем постобработки. Электрическая мощность определяется напряжением на резисторе; принятая механическая мощность — тягой и скоростью на диске источника. Эффективность преобразования нельзя оценить, не сообщив обе величины.

$$\sigma = C^E : \varepsilon(u) - e^T E_e \tag{23}$$

$$D = e : \varepsilon(u) + \kappa^s E_e \tag{24}$$

$$E_e = -\nabla V_e \tag{25}$$

$$\nabla \cdot D = 0 \tag{26}$$

При временной конвенции Re[u exp(iωt)] алюминий описывается линейной эластодинамикой. Стандартная слабая формулировка [4] используется с двумя связанными компонентами перемещения в осесимметричных экспериментах и со всеми

тремя декартовыми компонентами в пространственной модели. На свободных участках границы без источника и приёмника тяга равна нулю; на оси требуется регулярность u_r=0: [6, 11]

$$\sigma \cdot n = t \text{ on } \Gamma_src \tag{27}$$

$$\sigma \cdot n = 0 \text{ on the remaining free exterior boundary} \tag{28}$$

$$u_r = 0 \text{ at } r = 0 \tag{29}$$

В уравнении (22) $\mathfrak{C}^*$ обозначает комплексный определяющий тензор жёсткости, а звёздочка у v — комплексное сопряжение. В модели идентификации нагрузок коэффициент потерь жёсткости равен 0,012. В электрической модели жёсткость алюминия умножается на $1+i\omega\beta\ell$, где $\beta=0{,}010/(2\pi\cdot 30000)$ с, а множитель потерь ℓ равен 1 или 2. Номинальный коэффициент потерь алюминия при 64 кГц составляет около 0,02133. В разных экспериментах использованы разные законы потерь.

$$P_in = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_{\{\Gamma_src\}} t\cdot v^*\, d\Gamma \tag{30}$$

$$v = i\omega u \tag{31}$$

В пьезоматериале механическая деформация связана с электрическим полем согласно уравнениям (23)–(26). Внутренний электрод заземлён, внешний эквипотенциален и соединён с резистором, а поверхности без электродов электрически изолированы. Исходная пространственная серия с линейными элементами P1 использует изотропную суррогатную жёсткость PZT и приближённые коэффициенты связи из заданных d-коэффициентов. Отдельная серия с криволинейными элементами P1/P2 использует номинальную анизотропную полнотензорную модель PZT-5H (разделы 8.4–8.6). Это разные материальные модели; ни одна не основана на измерении параметров конкретной партии керамики.

$$P_el = |V_e|^2/(2R_el) \tag{32}$$

$$\eta_R = P_el/P_in \tag{33}$$

В уравнениях (32)–(33) используются пиковые комплексные амплитуды силы и напряжения, что объясняет множители одна вторая. Электрическая мощность и доля преобразования отвечают на разные вопросы. При заданной амплитуде силы механическая работа зависит от податливости конструкции, поэтому рост η_R не обязательно означает рост P_el. Физический вектор потока механической энергии определяется выражением:

$$J = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\sigma\cdot v^*) \tag{34}$$

Из представленных измерений выходной мощности не выводится модово-разрешённый коэффициент P→S-преобразования или уникальная лучевая траектория.

3.1. Как граница входит в передаточный оператор

Причинная цепь через оператор. В гармоническом эксперименте геометрически зависимый отклик определяется отображением источника, комплексным динамическим оператором и отображением наблюдения. Их производные по форме описывают изменение связи с источником, внутреннего механического оператора и связи с приёмником. Эти вклады явно записаны в уравнениях (35)–(37). Резонанс способен

усиливать малое геометрическое изменение, не предполагая сингулярного инварианта или нового закона материала [12].

Резольвента A_G^{-1} объясняет, почему малые изменения границы или контакта иногда вызывают сильные изменения сигнала вблизи резонанса. Это обычная модовая физика, а не свидетельство новой силы или необходимости точной гиперболы. Установление специального механизма требует отслеживания мод, перекрытия источника с модами и мод с приёмником, а также контроля, нарушающего предполагаемый геометрический инвариант при сохранении остальных условий.

Одна и та же граница задаёт область интегрирования энергии деформации, внешнюю нормаль, распределение инерции и положения возбуждения и приёма. На конечно-элементном уровне эти эффекты входят в зависящие от геометрии жёсткость K_G, массу M_G, отображение источника B_G и отображение наблюдения C_{o,G}. Для линейной нагруженной системы оператор передачи имеет вид:

$$H = C_o\, A^{-1}\, B \tag{35}$$

$$A \equiv K + i\omega C_d - \omega^2 M + Z \tag{36}$$

$$\partial_q\, H = (\partial_q\, C_o)A^{-1}B - C_oA^{-1}(\partial_q\, A)A^{-1}B + C_oA^{-1}(\partial_q\, B) \tag{37}$$

Уравнение (37) получается дифференцированием матричного тождества, связывающего оператор с обратным ему оператором. Оно связывает изменение границы с перераспределением сигнала или энергии без введения новой физики материала. Средний член возрастает вблизи структурного резонанса, а первый и третий описывают изменение перекрытия с приёмником и связи с источником. Поэтому гладкая деформация может улучшать или ухудшать выбранный выход. Один лишь знак гауссовой кривизны не определяет знак изменения. Кроме того, увеличение скалярного выхода не доказывает, что упругая волна наследует фокальную теорему образующей коники.

Модовая интерпретация составляет основу предлагаемого инженерного механизма. Каждый измеренный отклик складывается из перекрытия приложенной нагрузки с возбуждаемыми упругими модами, их зависящей от частоты динамической жёсткости и перекрытия с приёмником. В задаче распознавания нагрузок полезно, чтобы допустимые входы оставались различимыми в зарегистрированных каналах; при отборе энергии полезно, чтобы возникающие деформации эффективно связывались с электрически нагруженной керамикой. Эти различные цели могут выделять разные формы. Отрицательная гауссова кривизна служит воспроизводимым проектным ограничением, а не сама по себе правилом знака преимущества.

Модовая картина. Для достаточно разрешённого слабо затухающего упругого тела отклик можно интерпретировать как сумму модовых вкладов:

$$u(\omega) \sim \Sigma_n\, [(c\cdot\psi_n)(\psi_n\cdot b)/(\omega_n{}^2 - \omega^2 + i\, d_n(\omega))] \tag{38}$$

Здесь ψ_n — нормированная по массе упругая мода, b — её перекрытие с источником, c — перекрытие с приёмником. Это поясняющая модовая запись, а не способ решения, использованный во всех приведённых расчётах. Она объясняет, почему форма может усиливать один измеряемый канал и ослаблять другой и почему преимущество на одной частоте или в одной точке приёма не является универсальным.

3.2. Наблюдаемые метрики и критерии сравнения

Эксперименты решают разные задачи и не могут оцениваться одним процентом. Для обратной задачи, заданной уравнением (1), полезность означает восстановление двух

заданных коэффициентов нагрузки при определённой модели шума и источника. Для пьезопреобразования — реальную электрическую мощность на заданных сопротивлениях при отдельном учёте принятой механической мощности. Для модового исследования — выбранный коэффициент передачи между нормированными направляемыми модами. Эти функционалы не являются взаимозаменяемыми.

Нужно различать три уровня доказательства: (1) правильность дискретных уравнений и их алгебраического решения; (2) устойчивость выбранного наблюдаемого параметра при независимых изменениях дискретизации; (3) преимущество над физически содержательными конкурентами. Малая линейная невязка подтверждает только первый уровень. Результат может точно воспроизводиться на одной сетке, но не выдерживать второго и третьего уровней.

Безразмерный анализ. Сравнение становится прозрачнее при использовании групп ωR/c_S, b/a, R/a, относительных размеров источника и приёмника, отношения толщины пьезокерамики к R, относительной контактной жёсткости по отношению к E_Al/R и безразмерный параметр электрической цепи ωR_el C_e (R_el — электрическое сопротивление, C_e — ёмкость электрода, в отличие от геометрического радиуса R). В проведённых испытаниях часть этих величин фиксирована, но не совпадают полные модальные спектры или входная податливость. Поэтому равнообъёмность определяет ограниченное инженерное сравнение, а не теорему подобия. Для физического прототипа параметры потерь, вязкоупругости клея и электрического нагружения должны задаваться и контролироваться отдельно.

Результаты организованы вокруг трёх независимо проверяемых положений. (i) В заданном калиброванном семействе источников полезный упругий кодировщик должен уменьшать ошибку инверсии при одинаковом числе каналов наблюдения и абсолютном уровне шума. (ii) Пассивное преобразующее тело должно передавать в указанные резистивные нагрузки больше мощности, чем сильнейший явно проверенный согласованный контроль; принятую механическую и выходную электрическую мощности необходимо различать. (iii) Утверждение о необходимости точной формы PHB должно выдерживать сохраняющие объём гладкие деформации и подтверждённую сеточную сходимость. Эти проверки не взаимозаменяемы.

Сингулярные числа σ_k характеризуют усиление изотропного аддитивного выходного шума линейным обратным оператором с полным столбцовым рангом. Уменьшение g_noise полезно, но эта величина не учитывает несовпадение модели источника. В сравнении мощности контролем служит максимальный выход среди явно проверенных альтернатив при одинаковых условиях. Заданный инженерный порог требовал улучшения более 10% и малого сеточного изменения, обычно 2%; это порог проектного решения, а не статистический доверительный интервал или универсальный критерий научной значимости.

4. Кодирование упругих нагрузок при калиброванном возбуждении

Почему кодирование нагрузок Наблюдения описываются моделью, зависящей от семейства источника и апертуры, в уравнении (39). Два столбца H_G представляют отклики на два независимо заданных пространственных профиля тяги; x содержит неизвестные комплексные амплитуды. Обратная задача хорошо обусловлена, если столбцы достаточно различимы относительно заданного шума датчиков. Форма может менять пространственное перекрытие и относительную фазу на приёмниках без увеличения переданной энергии. Улучшение метрики сингулярных значений поэтому

означает лучшее различение внутри калиброванного семейства входов, а не доказательство более эффективного сбора ультразвуковой энергии.

$$y = H_G(f,w_s)x + n \tag{39}$$

Почему форма способна улучшать различение источников? Два независимых распределения тяги возбуждают разные сочетания упругих мод, а датчики на пояске регистрируют различные комплексные амплитуды и фазы. Если столбцы H_G почти параллельны, восстановление плохо обусловлено; более благоприятные сингулярные числа при сопоставимом абсолютном сигнале облегчают определение смеси заданных нагрузок. Но этот критерий относится только к принятому семейству источников и модели шума.

В контролируемом опыте образующая изменяется при сохранении заданного ограничения по массе. Уменьшение ошибки относительно двух выбранных деформированных профилей означает геометрическую чувствительность и условную инженерную пользу. Но гладкая специально подобранная деформация, совпадающая с точной РНВ или немного превосходящая её, имеет столь же важное значение: она проверяет, необходима ли точная гиперболичность, и не позволяет объявлять её оптимальной.

Обратный эксперимент использует два заданных комплексных пространственных профиля тяги на верхнем диске. Их программные обозначения относятся к аналитическим продольноподобной и сдвигоподобной конструкциям, но усечение и огибающая не позволяют считать их калиброванными чистыми входящими P- и SV-модами конечного тела. Каждый столбец источника нормирован на квадратный корень из отдельно рассчитанной вводимой мощности. Произвольные когерентные смеси могут содержать перекрёстные члены, поэтому такая нормировка не уравнивает полную входную мощность всех смесей. Измеряются u_r и u_z на внешнем поясе.

При 152 кГц точная РНВ уменьшает шумовую метрику обратной задачи на 12,81% относительно лучшей из двух заданных широких деформаций на сетке Q3 16×32. Результат резко зависит от частоты: преимущество составляет −0,41% при 151 кГц и +0,61% при 153 кГц. Локальная сохраняющая объём поправка 0,08 мм улучшает ту же метрику на 3,58–4,85% относительно лучшей из РНВ и исходных контролей на трёх проверенных частотах. Рисунки показывают как узкое спектральное предпочтение точного профиля, так и возможность дополнительной гладкой настройки.

Опорные тяги используют функции Бесселя J_0 и J_1 и радиальной огибающей, определённой уравнениями (40)–(42). Волновые числа и скорости упругих волн, используемые при построении источника, заданы уравнениями (43)–(46). Приложение такого профиля напряжений к конечному диску задаёт возбуждение, но не измеряет чистое падающее модовое состояние. Гармоническая задача решается прямой разреженной факторизацией; временное интегрирование и окна переходного процесса не используются в этих частотных данных.

$$k_r = 0.6k \tag{40}$$

$$k_z = -0.8k \tag{41}$$

$$g_s(r) = \exp[-(r/w_s)^8] \tag{42}$$

$$k_P = \omega/c_P \tag{43}$$

$$k_S = \omega/c_S \tag{44}$$

$$c_P = \sqrt{[(\lambda + 2\mu)/\rho]} \tag{45}$$

$$c_S = \sqrt{(\mu/\rho)} \tag{46}$$

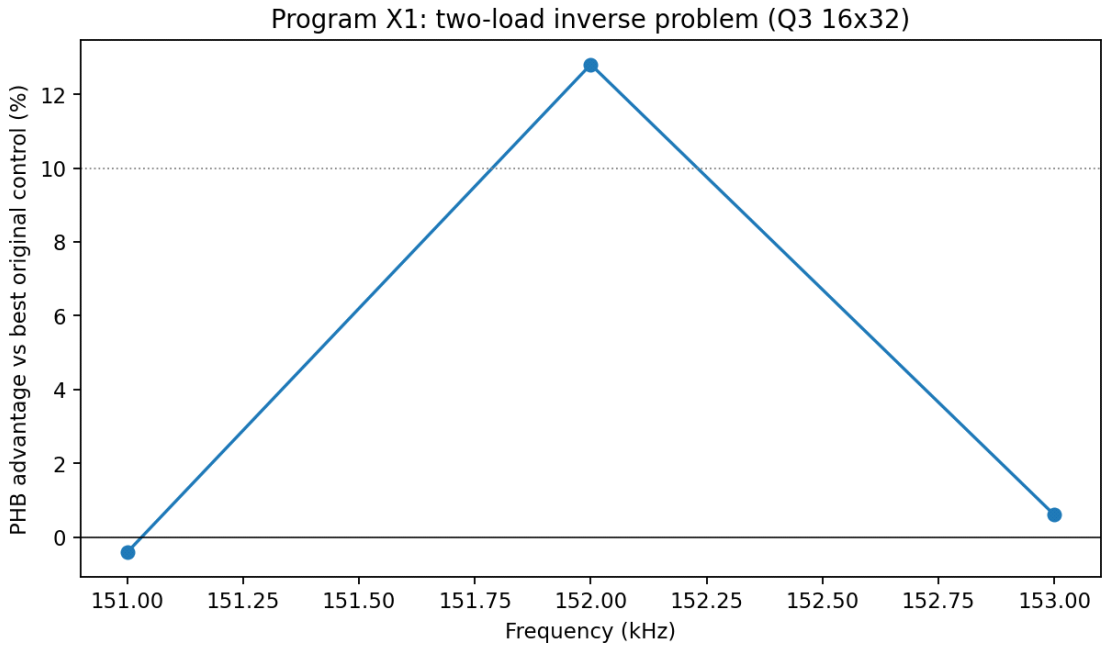

Рисунок 5. Частотная избирательность точной PHB в обратной задаче двух нагрузок. Положительные значения означают улучшение относительно лучшего исходного деформированного контроля.

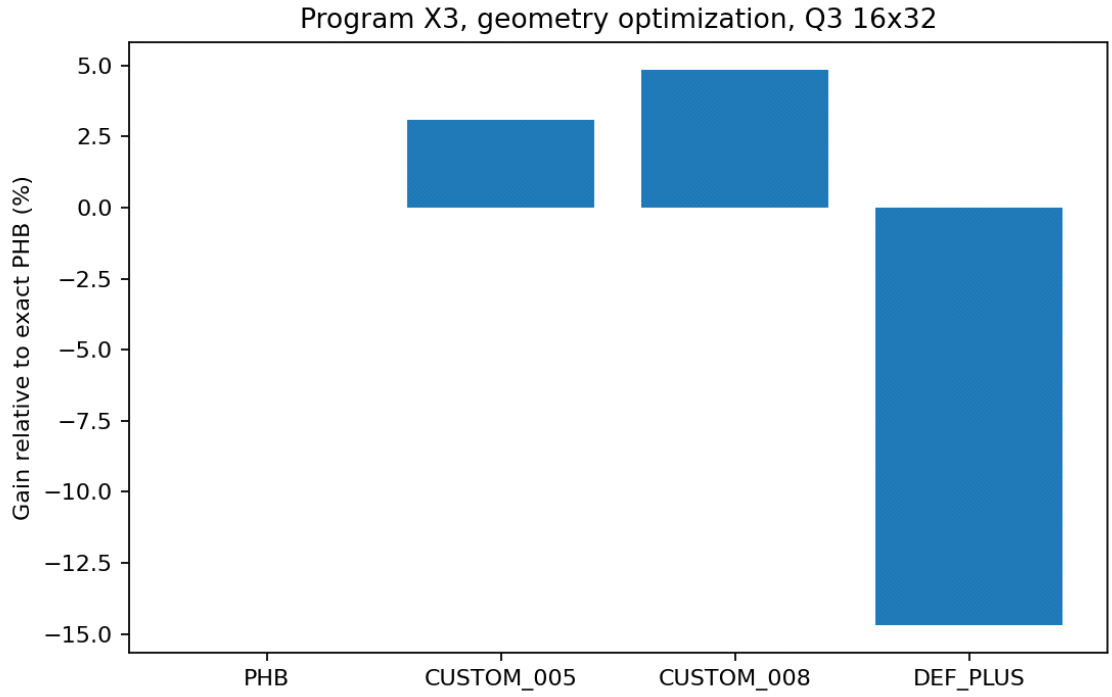

Рисунок 6. Локальная настройка профиля при 152 кГц. Малые гладкие поправки превосходят точный профиль по данной шумовой метрике, тогда как исходная более крупная положительная деформация — нет.

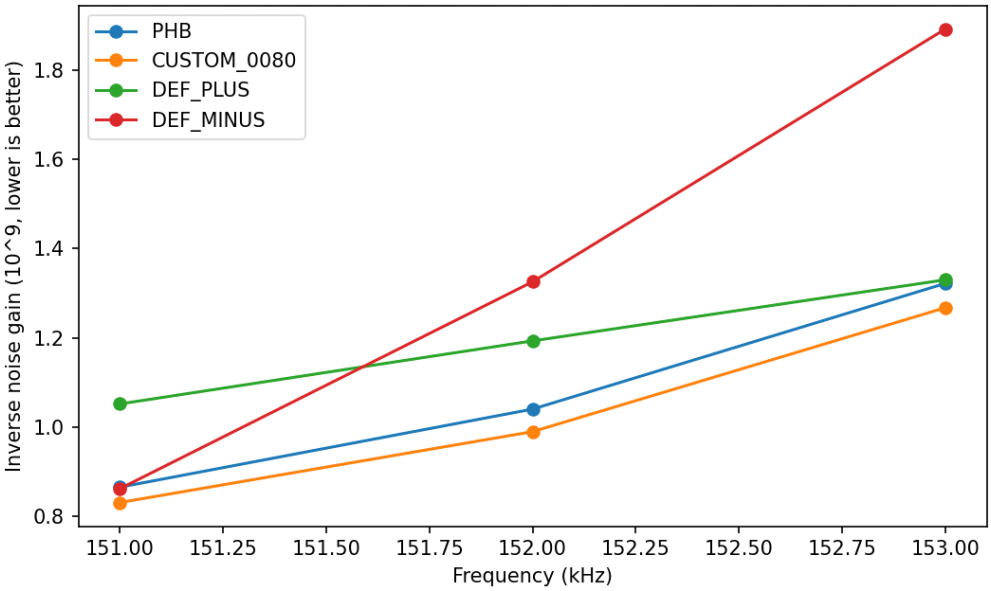

Рисунок 7. Абсолютная шумовая метрика обратной задачи для четырёх профилей. Она учитывает масштаб сигнала и обусловленность и не является КПД преобразования мощности.

Синтетическая проверка использует 4096 новых комплексных смесей на частоту, общие реализации шума и одинаковую абсолютную дисперсию шума. При 151, 152 и 153 кГц ошибки PHB составляют 8,32%, 10,05% и 12,80%, а изменённого профиля — 7,99%, 9,56% и 12,28%. Улучшение согласуется с метрикой сингулярных чисел, но невелико. Применение калибровки 152 кГц на соседних частотах может давать ошибку более 100%, показывая, что хороший обратный оператор на одной частоте не является широкополосным декодером. Малые отклонения профиля ±2 мкм дали лишь около 0,12–0,18% ошибки несовпадения в проверенных случаях номинальной частоты; это локальный результат по допуску, а не производственная квалификация.

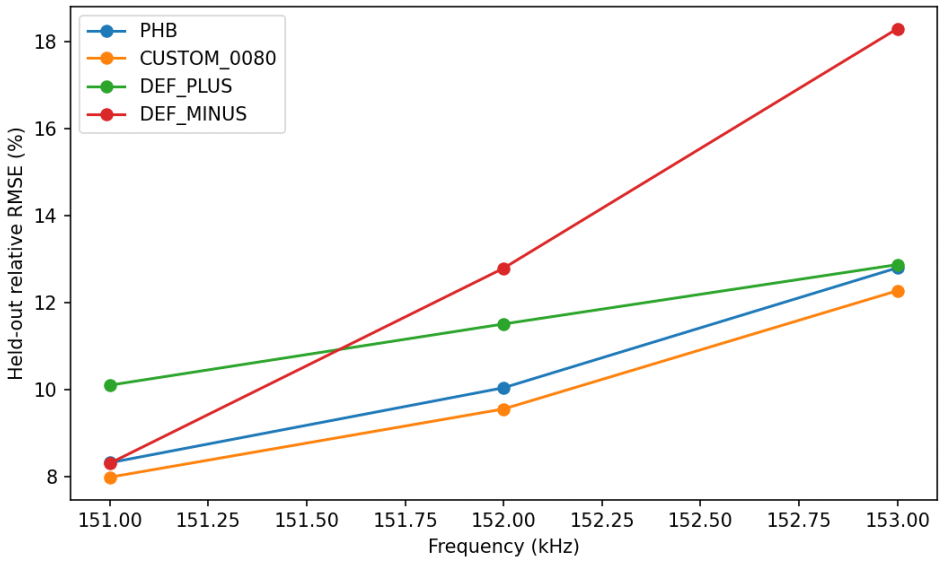

Рисунок 8. Ошибки восстановления на тестовых смесях при отдельной калибровке каждой частоты. Все формы используют одинаковый абсолютный синтетический шум; физическая шумовая модель датчика отсутствует.

4.1. Неизвестные частота и апертура источника

Приёмник, откалиброванный для заданной частоты и пятна контакта, не становится автоматически универсальным классификатором источников. При изменении частоты, апертуры или профиля реальный оператор равен H_G+ΔH, а обращается прежняя матрица. Тогда в ошибку восстановления входит член, зависящий от произведения обратного оператора на ΔH; высокое значение показателя сингулярных чисел не устраняет ошибку модельного рассогласования. Поэтому исследования частоты и апертуры измеряют переносимость калибровки.

Зачем необходимы дополнительные каналы. Если число комплексных измерений совпадает с числом свободных комплексных амплитуд нагрузки, обратимая матрица H способна точно интерполировать наблюдения при многих пробных частотах. Тогда один только остаток не позволяет определить частоту: её изменение поглощается перенастройкой x. Дополнительные независимые датчики меняют размерность и геометрию пространства допустимых сигналов; частота и апертура становятся различимы по той части наблюдений, которую неверная модель не может воспроизвести. Это совместное свойство прямого оператора и схемы измерений, а не только границы PHB.

Два комплексных выхода не позволяют определить две произвольные комплексные амплитуды источника и дополнительную неизвестную частоту: для обратимой квадратной матрицы H(f) точное решение при каждой проверяемой частоте задаётся уравнением (47). Добавление второй точки двухосевого измерения переопределяет систему и позволяет различать частоты по невязке вне столбцового пространства H. Для PHB средняя ошибка при известной частоте уменьшается с 8,90% при двух каналах до 3,28% при четырёх. При оценке частоты на отложенных значениях ошибка составляет 8,72%. Для изменённого профиля она равна 8,60%, то есть относительное снижение составляет лишь 1,29%.

$$x(f) = H(f)^{-1}\, y \tag{47}$$

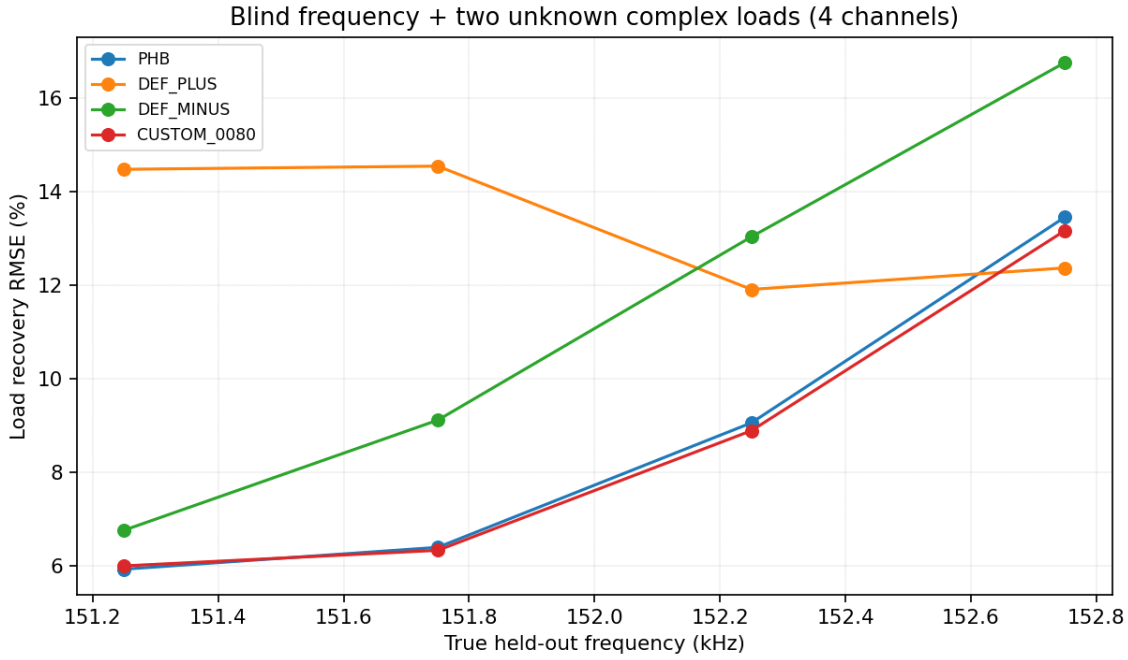

Рисунок 9. Совместное восстановление двух комплексных нагрузок и неизвестной тестовой частоты по четырём каналам. Частотная зависимость относится к обратной задаче, а не к отдельному измерению преобразования упругих мод.

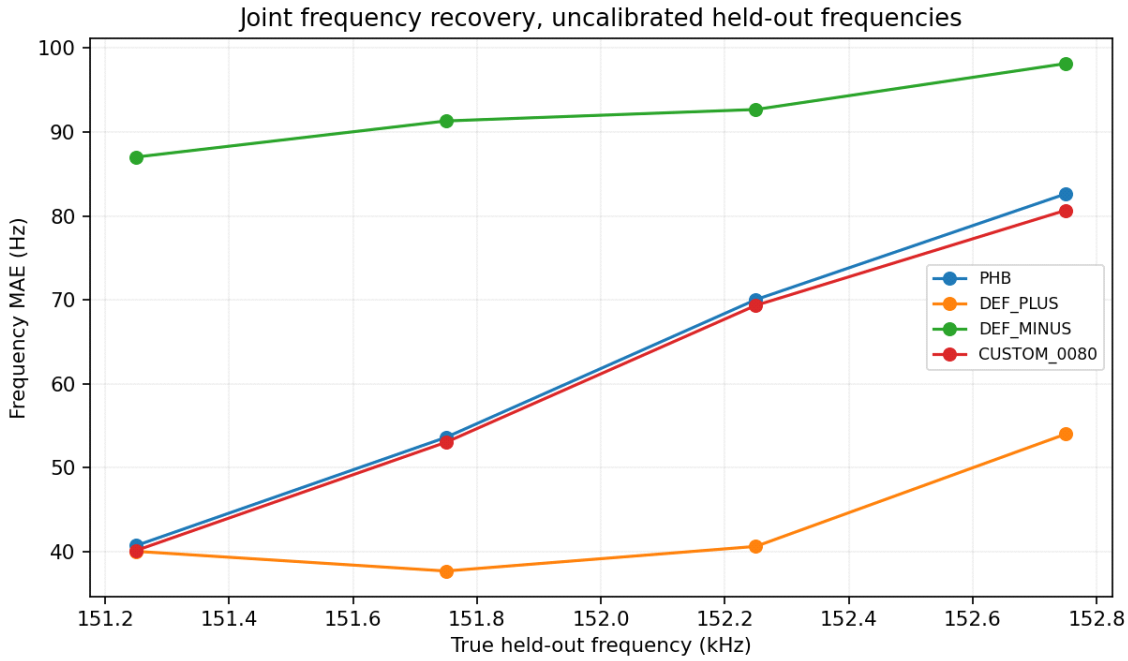

Рисунок 10. Средняя абсолютная ошибка частоты для той же четырёхканальной проверки. Геометрия с меньшей ошибкой частоты не обязательно имеет меньшую ошибку амплитуд нагрузок.

Третья двухосевая точка при z = −a/2 даёт шесть комплексных каналов и позволяет совместно оценивать апертуру источника и частоту. Калибровка охватывает 151–153 кГц и апертуры 39, 42 и 45 мм. Независимые конечно-элементные тесты используют 151,25 и 152,25 кГц и апертуры 40,5, 41,5, 42,5 и 43,5 мм. Каждый тест содержит 512 комплексных смесей нагрузок. При гауссовом априорном распределении апертуры с центром 42 мм и шириной 1,5 мм ошибка PHB составляет 8,87% на Q3 12×24 и 9,31% на Q3 16×32. Соответствующие ошибки DEF− равны 10,97% и 11,44%, что даёт снижение на 19,14% и 18,62%; ошибки DEF+ равны 23,09% и 22,07% и не являются знаменателем для заявленного преимущества. Для CUSTOM 0,08 мм ошибка составляет 8,82% и 9,25%, то есть немного меньше, чем у PHB на обеих сетках. Следовательно, ранжирование PHB–DEF− сохраняется на этих двух сетках в рамках заданной калибровки, однако точный PHB не является лучшим из проверенных профилей.

Таблица 2. Восстановление при неизвестных частоте и апертуре источника

Профиль	**RMSE 12×24**	**RMSE 16×32**
PHB	8.87%	9.31%
CUSTOM 0.08 мм	8.82%	9.25%
DEF+	23.09%	22.07%
DEF−	10.97%	11.44%

В каждом испытании вектор x определяется методом комплексных наименьших квадратов для проверяемых частоты и апертуры. Профилированная целевая функция содержит слагаемое невязки данных из уравнения (48), а при использовании априорного ограничения на апертуру — штраф из уравнения (49); символ † обозначает псевдообратную матрицу. Абсолютный масштаб шума $\sigma_n=8{,}8542319\times10^{-11}$ задан в

нормированных единицах отклика; сохранённое начальное значение генератора случайных чисел для исследования апертуры — 261108. Ошибки агрегированы по синтетическим смесям и отложенным параметрическим случаям; число смесей не является числом независимых физических образцов. Доверительный интервал, учитывающий неопределённость сетки и материала, отсутствует.

$$J_{data} = \|y - H(f,w_s)H(f,w_s)\dagger y\|^2/\sigma_n^2 \quad (48)$$

$$J_{prior} = ((w_s - 42\ mm)/(1.5\ mm))^2 \quad (49)$$

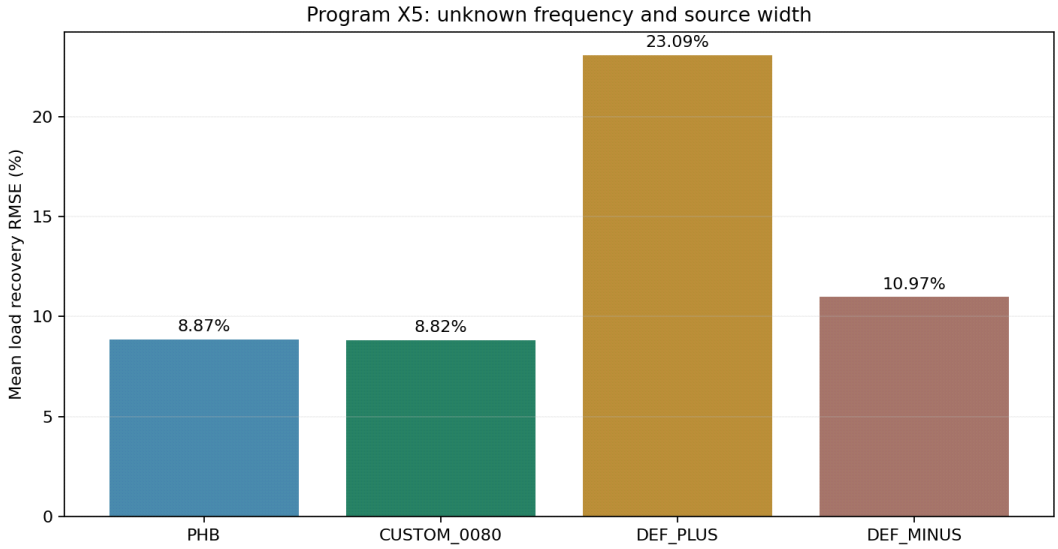

Рисунок 11. Шестиканальная инверсия при совместно неизвестных частоте и апертуре с указанным априорным распределением. Это синтетические ошибки амплитуд нагрузок, а не измеренные характеристики прибора.

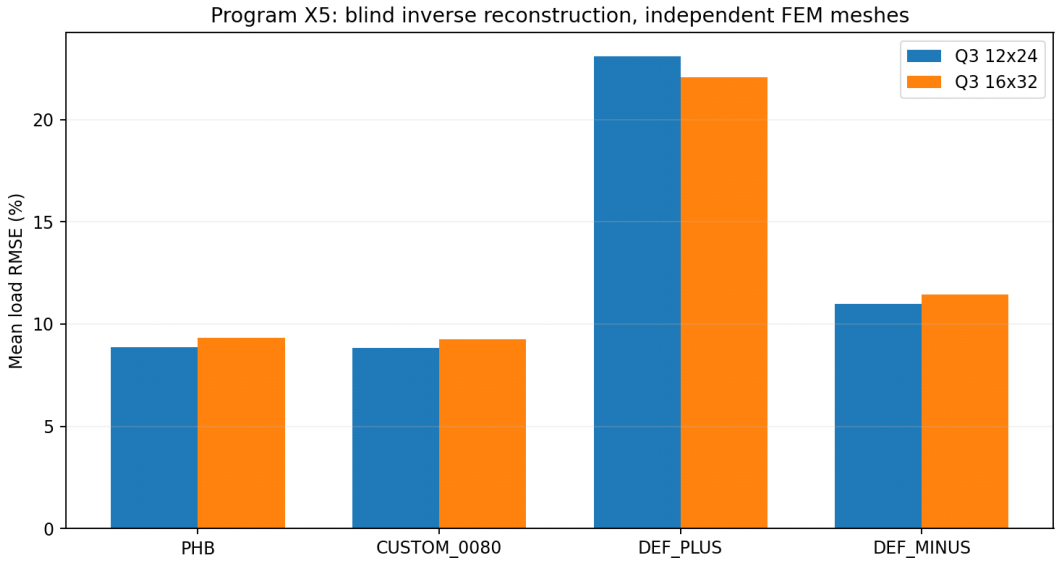

Рисунок 12. Повтор полной слепой проверки на двух независимо собранных сетках. Видно сохранение сравнительного ранжирования, однако две сетки не устанавливают асимптотическую сходимость.

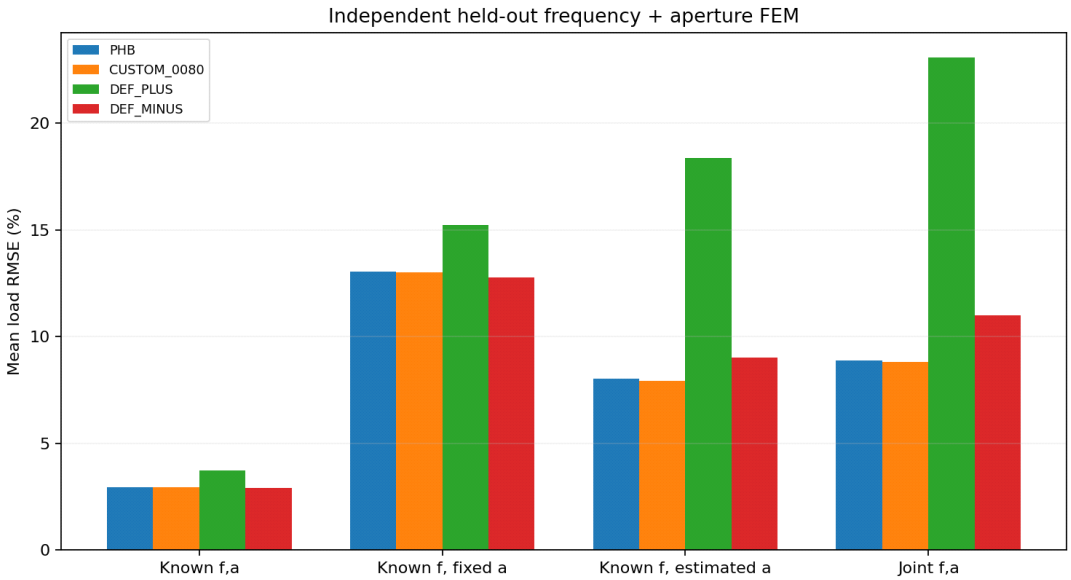

Рисунок 13. Зависимость ошибки восстановления от обращения с мешающими параметрами. Известные частота и апертура, фиксированная апертура, её оценивание и совместная оценка — разные условия доступной информации.

Причинная интерпретация ограниченна, но содержательна. В данном семействе источников точная PHB сохраняет более благоприятное измерительное отображение, чем две заданные деформации. Она не является единственным оптимумом, поскольку близкий гладкий профиль работает практически так же или немного лучше. Улучшение при переходе от четырёх к шести каналам также нельзя приписывать геометрии: изменён измерительный ресурс. Без априорного ограничения апертуры ошибка PHB возрастает до 10,15%, а идеализированный алгоритм со знанием частоты и апертуры достигает 2,93%; разница характеризует практическую цену мешающих параметров.

4.2. Перенос на некалиброванные пространственные профили силы

Зачем нужны незнакомые источники. Успешное восстановление может отражать лишь хорошее совпадение испытательных данных с калибровочным семейством. Чтобы отделить геометрическое кодирование информации от хрупкой настройки, нужно независимо изменять пространственную форму тяги, а не только её комплексную амплитуду. Поэтому проверки с гауссовым, кольцевым, плосковершинным и модулированным профилями отвечают на другой вопрос, чем точность для двух калиброванных нагрузок. Их большие ошибки характеризуют область применимости датчика, а не коэффициент преобразования P→SV.

Обобщающая способность проверяется на профилях источника, отсутствовавших при калибровке, при неизменном алгоритме восстановления. Это более строгий тест, чем тысячи шумовых реализаций по двум тем же столбцам матрицы передачи. Синтетические смеси оценивают условную шумовую устойчивость, но не являются независимыми FEM-проверками или доверительным интервалом для континуального решения.

Устойчивый кодировщик должен переносить и такой профиль источника, который нельзя представить изменением одной лишь ширины. Поэтому номинальная радиальная огибающая $\exp[-(r/42\ \text{мм})^8]$ сохранена для калибровки, а гауссова, кольцевая, плосковершинная и модулированная огибающие использованы только в тестах. Шесть форм сравнивались при 152 кГц с одинаковыми объёмом, внешним радиусом, площадью источника, шестью каналами и абсолютным шумом. Двойной конус и цилиндр здесь

особенно важны: они проверяют перенос преимущества обратной задачи за пределы близких деформаций PHB.

Таблица 3. Средняя ошибка для четырёх неизвестных пространственных семейств силы

Профиль	**Q3 12×24**	**Q3 16×32**	**Q3 20×40**
PHB	81.37%	82.88%	83.06%
CUSTOM 0.08 мм	81.27%	82.74%	82.92%
DEF+	67.42%	69.46%	69.86%
DEF−	95.55%	95.99%	96.02%
Цилиндр	64.83%	64.97%	64.99%
Двойной конус	63.85%	64.70%	64.76%

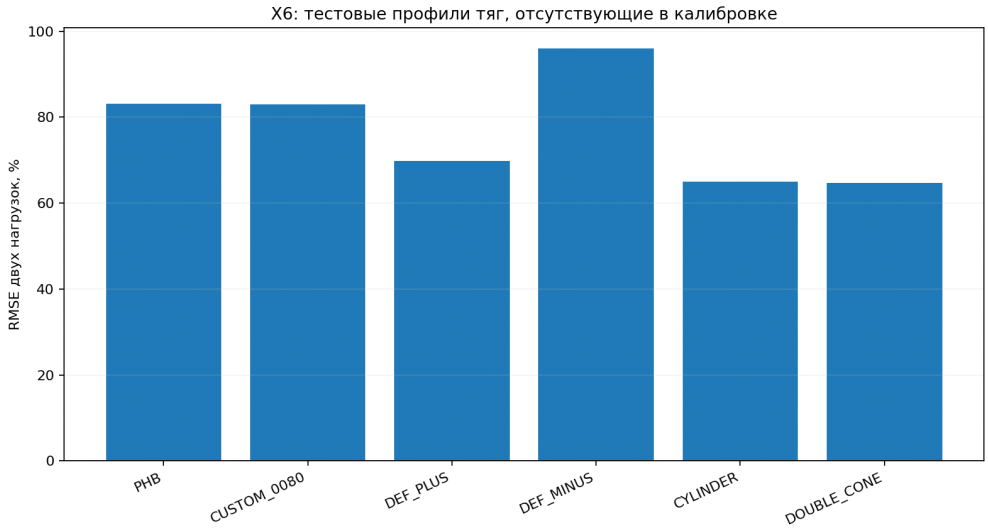

Рисунок 14. Ошибки при пространственном несовпадении источника на наиболее подробной проверенной сетке Q3. Исходная надпись обозначает RMSE нагрузок для профилей, отсутствовавших в калибровке.

Ошибка PHB стабилизируется около 83%, тогда как двойной конус достигает примерно 65%. Эффект намного больше последнего сеточного изменения и сохраняется при добавленном разбросе усиления датчиков 1% и фазы 1°. Поэтому преимущество в ограниченном семействе апертур не обосновывает универсальный декодер механических источников. Этот результат также не является проверкой произвольной локализации трещин: неизвестными остаются два коэффициента заданных профилей тяги. Отдельная повторная обработка архивных таблиц локализации показала преимущество прямых датчиков над PHB во всех пяти перечисленных сценариях, но она не содержит нового конечно-элементного расчёта трещины и не используется как доказательство механизма данного преобразователя.

5. Пассивная передача волновой энергии и импеданс приёмника

Энергетический учёт до заявления об эффективности. Для пиковых комплексных амплитуд поступающая механическая мощность определяется как $P_{in}=(1/2)\mathrm{Re}\int_{\Gamma_s} t\cdot v^* d\Gamma$, а мощность электрической нагрузки — как $P_{el}=|V|^2/(2R_{el})$. Это разные физические величины: первая измеряет работу, поступающую в конструкцию, вторая — работу,

переданную цепи. Одинаковая сила 1 Н не означает одинаковую P_in, поскольку входная механическая податливость зависит от геометрии. Поэтому доля мощности, принятая идеальной диссипативной полосой, не равнозначна электрическому КПД. Именно этим обоснована последовательность от механического приёмника к распределённой керамике и далее к отдельным трёхмерным секторам.

Исследование передачи энергии отвечает на иной вопрос, чем распознавание нагрузок: какая часть заданного гармонического механического воздействия достигает необратимого рассеяния в приёмнике? Принятая механическая мощность определяется выражением P_in=(1/2)Re∫_{Γ_s}t·v* dS, где v=iωu при принятой фазорной конвенции. На резисторе P_R=|V_peak|²/(2R). Отношение P_R/P_in характеризует преобразование только тогда, когда обе мощности извлечены из одного и того же решения и согласованно определённого источника.

Равенство приложенной силы корректно для устройства, работающего от заданной силы, но не эквивалентно равенству принятой механической мощности: входная подвижность тел различается. Поэтому в практическом сравнении нужно указывать и абсолютную мощность при фиксированной силе, и выход на единицу принятого ватта, желательно по заранее заданной частотной полосе. Вблизи узкого резонанса ранжирование способно изменяться при изменении потерь, нагрузки и клеевого соединения.

Эксперимент передачи энергии использует осевой источник 1 Н и проверяет, какая часть подводимой механической мощности поступает к приёмнику на внешнем поясе. Идеальная радиальная диссипативная нагрузка даёт контролируемую исходную проверку импеданса приёмника. При индивидуальной настройке такой нагрузки для каждого тела гибрид превосходит равномассовую PHB по доле принятой мощности на 16,63% при 63,5 кГц и номинальных потерях на сетке P2 18×36. Удвоение потерь меняет сравнение на −4,04%. Смена знака показывает, что выгодный настроенный режим не является внутренним КПД самой геометрии.

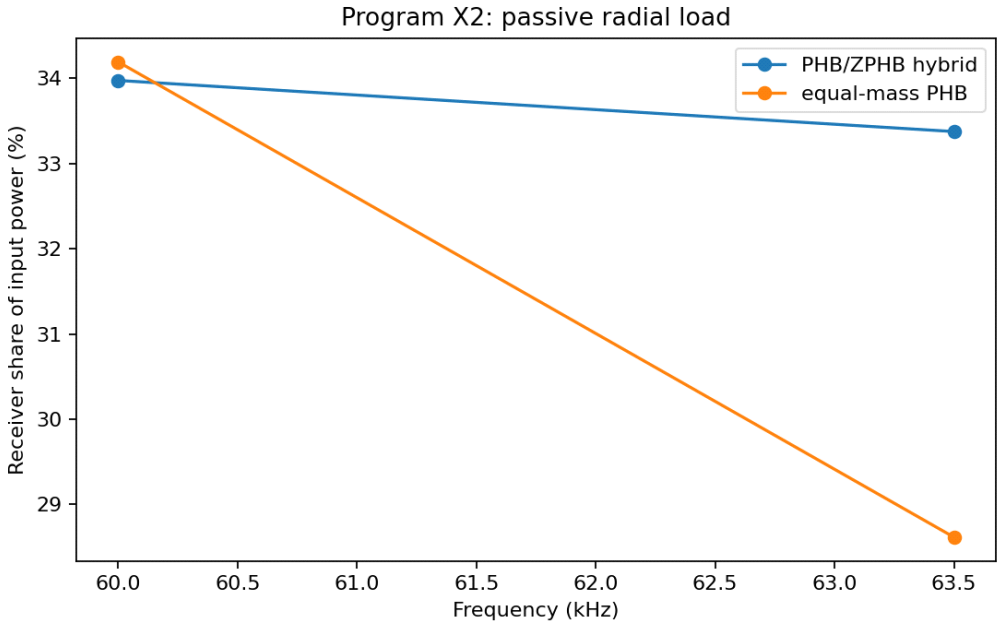

Рисунок 15. Доля принятой механической мощности при индивидуально настроенных идеальных диссипативных нагрузках. Показанная доля не является КПД электрического преобразования.

Фиксация одинакового параметра нагрузки γ для обеих форм усиливает сравнение. При γ = 1 и номинальных потерях гибрид даёт на 57,72% и 103,39% больше принятой мощности при 63,5 и 64 кГц соответственно. При 63 кГц и удвоенных потерях его абсолютная мощность примерно на 0,70% ниже, несмотря на более высокую принятую долю. При γ = 3,4 гибрид проигрывает по доле мощности во всех трёх точках сканирования. Эти наблюдения выделяют согласование импеданса и модальное перекрытие как необходимые части физического объяснения.

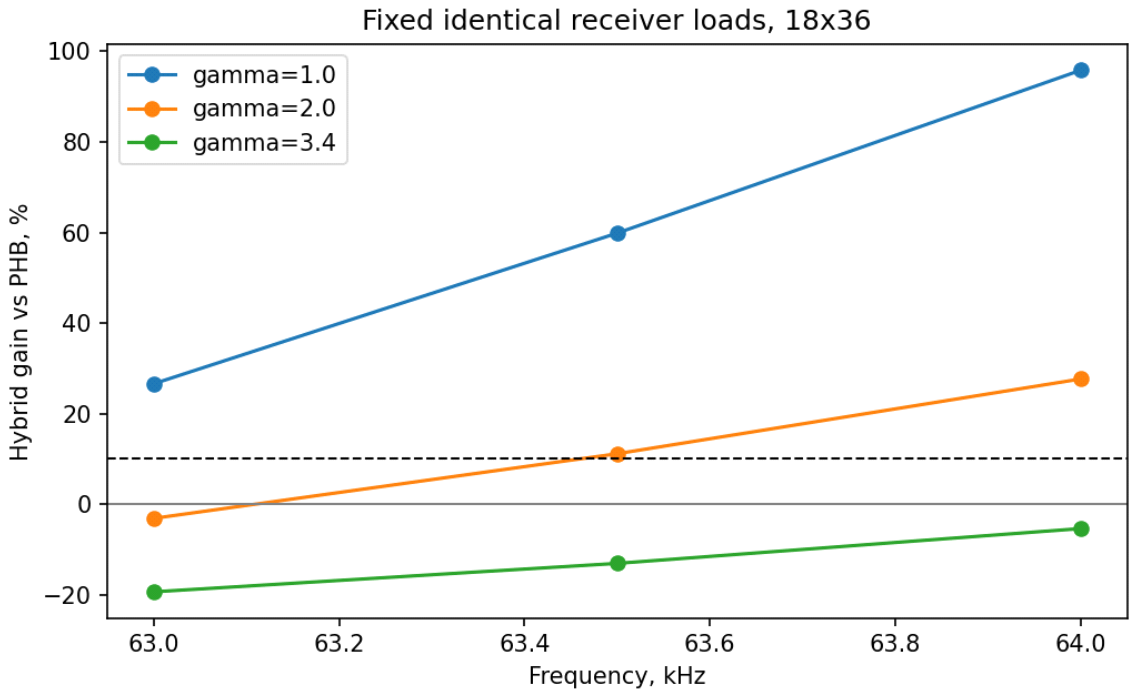

Рисунок 16. Общая фиксированная нагрузка приёмника для гибрида и PHB. Вертикальная ось сравнивает доли принятой мощности; изменение γ меняет ранжирование.

Распределённый тонкий радиальный пьезослой затем позволяет получить электрический выход при предположении жёсткой внешней опоры. При 64 кГц и номинальных потерях гибрид даёт 346,26 нВт на 750 Ом против 244,82 нВт у двойного конуса, то есть рост 41,43%. При 1500 Ом соответствующий рост составляет 17,77%, а при 3000 Ом — лишь 0,84%. Таким образом, одна геометрия не имеет единственного усиления, независимого от нагрузки. Эта модель описывает распределённый по окружности эквивалентный приёмник с активной площадью 5%, а не четыре независимо разрешённые трёхмерные накладки.

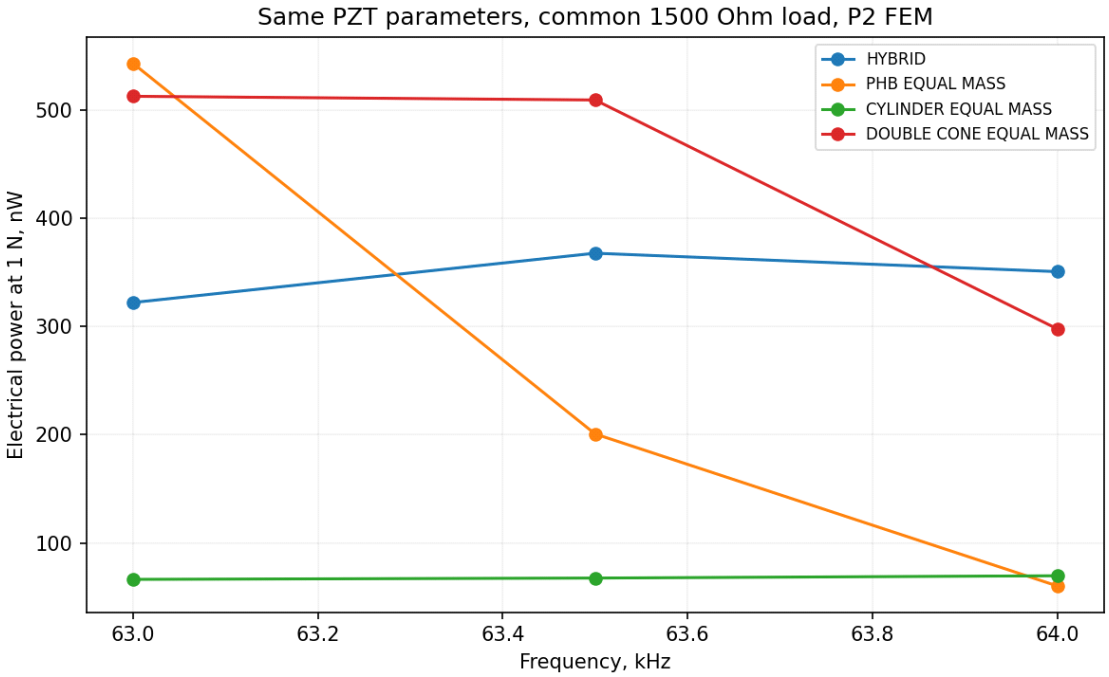

Рисунок 17. Электрическая мощность распределённого тонкослойного приёмника при общей нагрузке 1500 Ом. Относительный порядок зависит от частоты даже при одинаковых параметрах PZT.

Податливое соединение и рабочее частотное окно

Граница раздела накапливает и рассеивает упругую энергию деформации через скачок перемещения Δu между алюминием и керамикой. Энергия связи в принятой линейной модели и масштаб её жёсткости заданы уравнениями (50) и (51); мнимая часть комплексной жёсткости описывает потери в клеевом слое. Даже небольшое изменение зазора или жёсткости крепления может менять связанные моды и перекрытие с приёмником. Поэтому чувствительность к клеевому слою является частью граничных условий задачи преобразования и необходима для корректного сравнения форм.

$$U_b = \tfrac{1}{2}\int_{\Gamma_b} k_b |\Delta u|^2 \, d\Gamma \tag{50}$$

$$k_b \propto E_b / t_b \tag{51}$$

Контакт — часть физической системы, а не второстепенной особенностью сетки. Для перемещений алюминия u_A и керамики u_P пружинная модель штрафует их разность посредством функционала контактной энергии в уравнении (52). Жёсткость клеевого слоя меняет передачу деформации и способна сдвигать связанные резонансы. При смене порядка FEM-аппроксимации необходимо сохранять одни и те же физические функционалы контактной энергии и виртуальной работы, а не один и тот же набор узловых сил.

$$U_{contact} \propto \int_{\Gamma_b} (u_A - u_P) \cdot K_b (u_A - u_P)^* \, dS \tag{52}$$

Выбранный контакт нулевой толщины — контролируемое приближение, а не измеренные свойства затвердевшего клея. Толщина, вязкоупругость и пространственная неоднородность реального соединения остаются источниками неопределённости. Следовательно, преимущество при одной заданной модели клея нельзя переносить на изготовленный образец без экспериментальной характеризации контакта.

Для проверки работы приёмника при податливом соединении вводится независимое перемещение интерфейса. Редуцированная модель использует локальную жёсткость на единицу площади, пропорциональную E_b/t_b, и коэффициент потерь. При 64 кГц, 750 Ом и номинальных потерях выход гибрида уменьшается с 346,26 нВт при идеальном соединении до 201,88 нВт для тонкого эпоксидного слоя, 25,46 нВт для контакта средней податливости и примерно 0,22 нВт для мягкого толстого слоя. Большие проценты выигрыша относительно контроля могут сосуществовать с ничтожным абсолютным выходом. Поэтому контакт следует считать частью оператора, а не второстепенной деталью крепления.

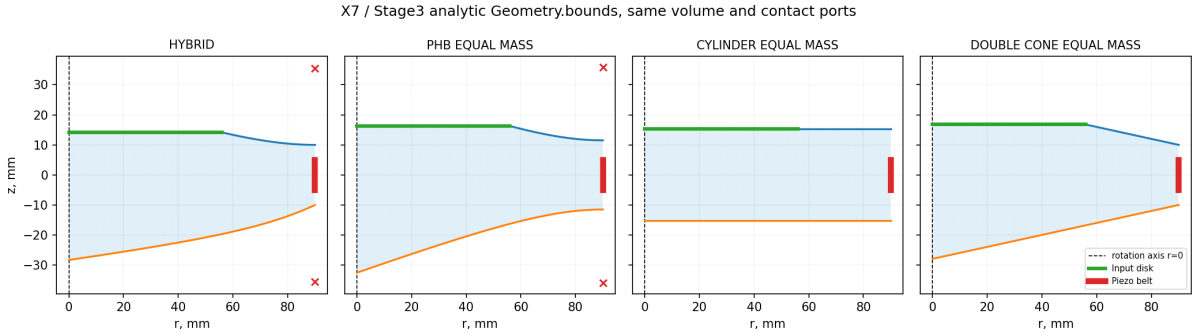

Рисунок 18. Геометрия и границы приёмника в эксперименте с податливым контактом. Приёмник по-прежнему является осесимметричным эквивалентным слоем. Во всех панелях сохранены аналитический объём и общие контактные области.

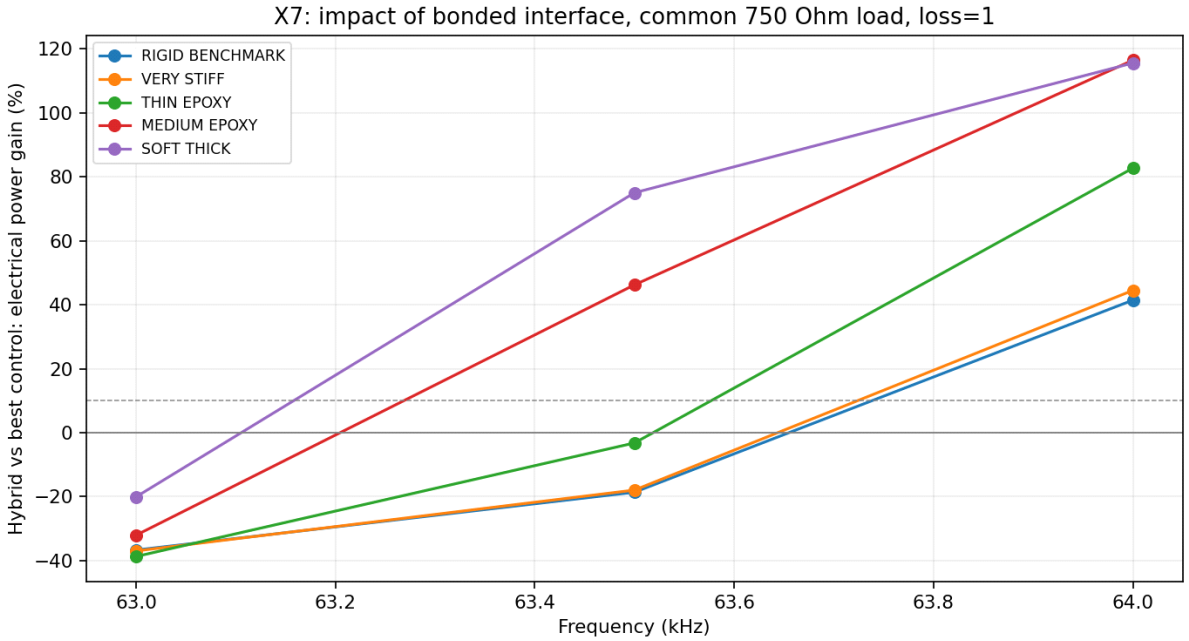

Рисунок 19. Зависящий от контакта выигрыш электрической мощности относительно лучшего проверенного равномассового контроля. Ни один показанный контакт не даёт равномерно положительного преимущества на всём интервале 63–64 кГц.

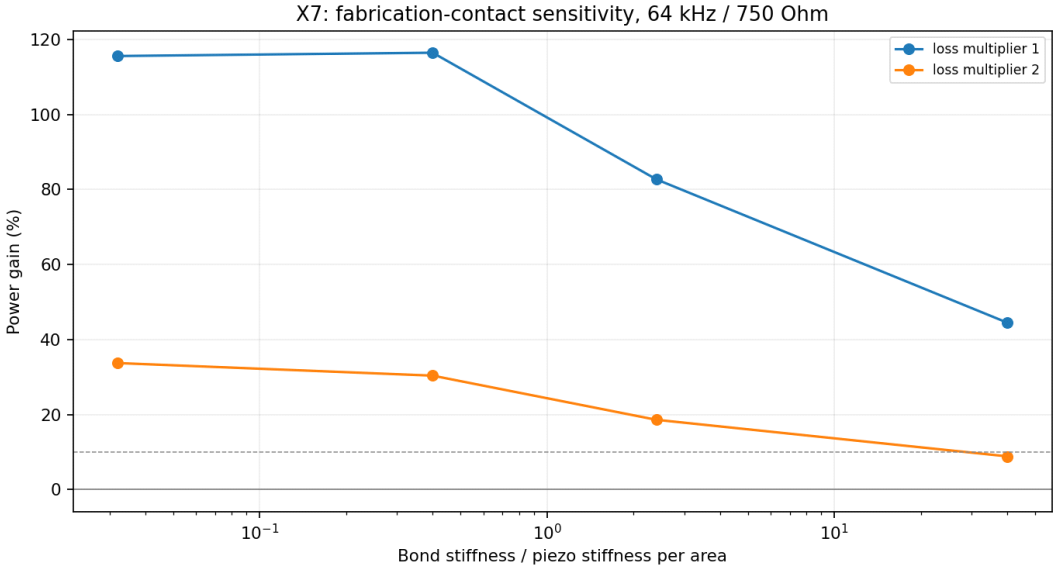

Рисунок 20. Чувствительность к жёсткости интерфейса при 64 кГц. Сравнение выполнено при двух множителях потерь алюминия; один процент преимущества не определяет полезную мощность.

В более узком частотном окне проверены толщины клея 35–65 мкм, пять частот от 63,8 до 64,2 кГц, два уровня потерь и три резистивные нагрузки. Во всём окне худший выигрыш мощности составляет от 1,83% до 8,90%, ниже порога 10%. Ограничение проверенных частот диапазоном 64,0–64,2 кГц и независимый выбор лучшего сопротивления каждой формы из одинакового набора дают минимальный выигрыш 13,97% в 30 проверенных сочетаниях толщины, потерь и частоты. Это положительный результат редуцированной модели распределённого приёмника, а не гарантия непрерывной полосы и не результат пространственно разрешённого керамического сектора.

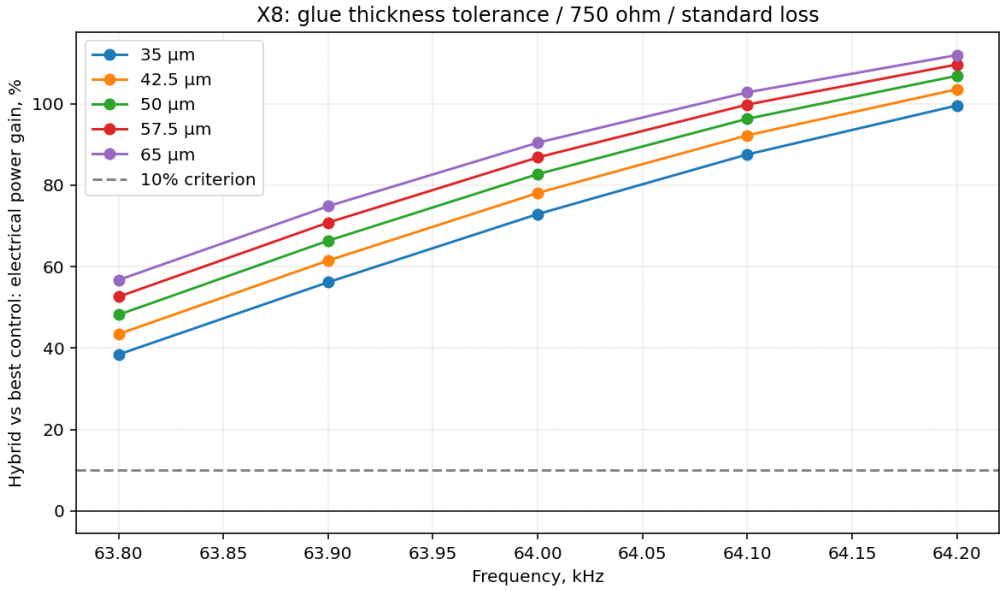

Рисунок 21. Совместная зависимость от частоты и толщины клея в модели распределённого приёмника при номинальных потерях. Штриховая линия обозначает проектный порог отбора 10%.

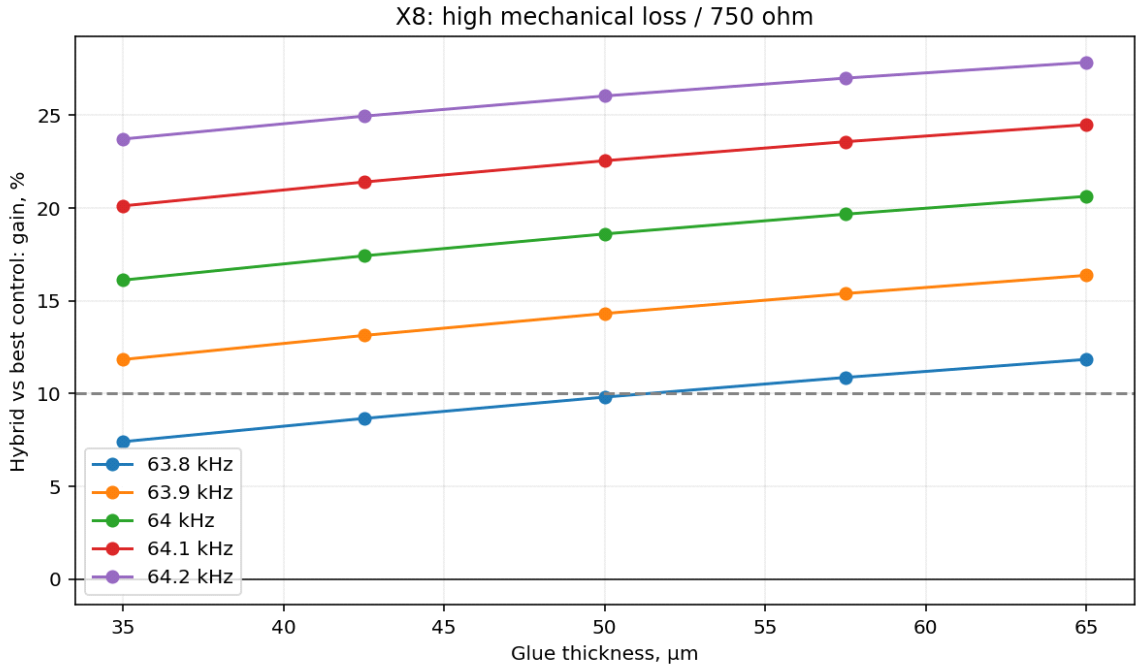

Рисунок 22. Тот же класс приёмника при удвоенных потерях алюминия. Частоты и толщины являются дискретно проверенными значениями, а не сертифицированной непрерывной рабочей областью.

Для строго однородного по углу поля деление эквивалентного кольца на N одинаковых электрических секторов сохраняет общий выход, если каждый сектор имеет C/N, связь θ/N и сопротивление NR. Это алгебраическое тождество не сохраняет краевые напряжения накладок, локальный сдвиг или трёхмерное рассеяние. Поэтому перед переносом преимущества распределённого слоя на отдельные накладки пространственная модель должна разрешать механику керамики и электрический потенциал. Промежуточная дискретизация с сосредоточенными секторами не разрешала их ширину и исключена из физических выводов о ранжировании.

При 64 кГц, толщине связующего слоя 50 мкм и номинальных механических потерях распределённый осесимметричный пьезоэлектрический приёмник сравнивался на гибриде PHB/ZPHB и равнообъёмном двойном конусе при общем сопротивлении 750 Ом. Двойной конус был лучшим контролем в этой рабочей точке. Сгущение от 24×48 до 30×60 изменило расчётную мощность на 0,59% для гибрида и на 0,96% для конуса. Электрическая мощность гибрида осталась примерно на 83% выше. Результат относится к распределённому приёмнику и указанным потерям, слою и нагрузке. Сходимость трёхмерной модели с отдельными секторами проверяется отдельно в разделах 6 и 8.

Таблица 4. Электрическая мощность гибрида и двойного конуса с распределённым приёмником.

Сетка	Гибрид (нВт)	Двойной конус (нВт)	Перевес гибрида (%)
24×48	201,88	110,48	+82,73
30×60	200,68	109,42	+83,41

6. Трёхмерное связанное пьезоэлектрическое сравнение

Почему трёхмерная модель — новый физический эксперимент. Замена непрерывного осесимметричного приёмного слоя четырьмя конечными накладками — не просто

сгущение сетки. Раздельные накладки вносят окружную неоднородность, неосесимметричное движение, градиенты напряжений у краёв, отдельные электрические потенциалы и контакт конечной податливости. В связанной задаче деформация создаёт электрическое смещение D, электродное условие интегрирует заряд, а сопротивление преобразует напряжение в рассеиваемую действительную мощность. Поэтому предпочтительная геометрия может измениться между распределённым и секторным приёмниками без внутренней алгебраической ошибки любой из моделей.

Трёхмерная задача электрического преобразования связывает четыре процесса: возбуждение алюминиевого тела, передачу сил и перемещений через контакт, анизотропную электроупругую связь в конечном пьезосекторе и рассеяние энергии во внешнем резисторе. Поэтому полная алгебраическая система содержит перемещения двух материалов, электрические потенциалы и схемные ограничения. Выходная мощность вычисляется из совместного решения, а не из одной амплитуды смещения алюминия.

Материальная модель определяет физический смысл такой мощности. Изотропный суррогат PZT с приближёнными константами связи допустим для разработки кода, но его результаты нельзя объединять в один ряд h-сходимости с расчётами, использующими номинальный трансверсально-изотропный тензор PZT-5H. При смене тензора изменяется сама математическая задача, а не только точность её аппроксимации. Эти две серии рассматриваются раздельно.

Пространственная модель содержит тетраэдральные поля перемещений P1 в алюминии и PZT и поле электрического потенциала P1 внутри каждого сектора PZT. Четыре сектора занимают 5% внешней окружности в пределах $|z| \le 5$ мм; угловая ширина каждого равна 4,5°. Общая площадь интерфейса составляет 2,8274 см², радиальная толщина — 2 мм. В расчёте использована периодическая четверть окружности для симметричного осевого возбуждения и одинаковых цепей четырёх секторов; этим вводится ограничение симметрии по углу 90°. Это обеспечивает трёхкомпонентный пространственный расчёт, но не проверяет асимметричное возбуждение или все классы азимутальных мод.

Соединение представлено безразмерной по толщине векторной пружинной границей с комплексной жёсткостью, заданной уравнением (53), действующей на относительные перемещения во всех трёх направлениях. Параметры: E_b=3 ГПа, t_b=50 мкм и η_b=0,025. Это не объёмная модель клеевого слоя с измеренным анизотропным или вязкоупругим определяющим законом. Равенство жёсткости по направлениям и билинейная интерполяция поверхности являются дополнительными приближениями. Эти детали важны, поскольку податливость границы изменяет деформацию, передаваемую пьезоматериалу.

$$k_b^* = (E_b/t_b)(1 + i\eta_b) \tag{53}$$

Таблица 5. Материальные и электрические параметры пространственной модели

Параметр	**Значение**
Модуль Юнга PZT; коэффициент Пуассона	50 ГПа; 0.30
Плотность PZT	7600 кг/м³
d33; d31; d15	600; −274; 740 пКл/Н
Относительная проницаемость κ^T/ε_0	3400
Механическая добротность Qm	65
Тангенс диэлектрических потерь	0.017

Приближение связи	e33=d33E; e31=d31E; e15=d15μ
Приближение проницаемости	$\kappa^s=3400\varepsilon_0-d33^2E$
Общее эквивалентное сопротивление R_eq	750 or 1500 Ω
Сопротивление каждого сектора	4R_eq = 3000 or 6000 Ω
Амплитуда силы на всё тело	1 N

В исходной пространственной P1-модели с упрощённой пьезокерамикой при 64 кГц и эквивалентном сопротивлении 750 Ом PHB имеет наибольшую рассчитанную мощность среди четырёх заданных тел на представленных сетках. На 8×10×36 дискретные выходы составляют 0,382620 нВт (PHB), 0,231674 нВт (двойной конус), 0,160784 нВт (гибрид) и 0,131573 нВт (цилиндр). Часто цитируемые 65,15% — арифметическое отношение на ОДНОЙ P1-сетке, а не оценка континуального выигрыша. Отдельная серия h/p-расчётов с полнотензорной моделью PZT-5H и криволинейными элементами также даёт несошедшуюся мощность и смену ранжирования PHB/конуса на сетке P2 6×8×20 (раздел 8.5). Она не является очередным уровнем сгущения исходной серии с изотропной суррогатной моделью керамики. Поэтому ни исходный, ни противоположный результат не сертифицирован как физический эффект устройства. Сравнение с распределённым пьезослоем относится к другой задаче и не является независимым воспроизведением данного результата.

Как читать таблицы мощности. Величина 0,382620 нВт — решение определённой дискретной краевой задачи при 64 кГц с указанными упрощёнными константами керамики, контактным законом, сеткой и заданной силой. Процент отличия от конуса является корректным арифметическим описанием этих вычислительных условий. Он превращается в инженерный выигрыш лишь при стабилизации абсолютных мощностей, модальных частот и нормированной доли преобразования при независимом h/p-сгущении и реалистичной неопределённости материала. Именно это, более сильное, утверждение проверяют последующие тесты.

Таблица 6. Электрическая мощность при 64 кГц и эквивалентном сопротивлении 750 Ом

Сетка тела	**PHB нВт**	**Конус нВт**	**Выигрыш**
4×6×24	0.302921	0.166493	81.94%
6×8×36	0.252510	0.150020	68.32%
6×8×72	0.257130	0.156620	64.18%
8×10×36	0.382620	0.231674	65.15%
10×12×36	0.54638	0.31075	75.83%

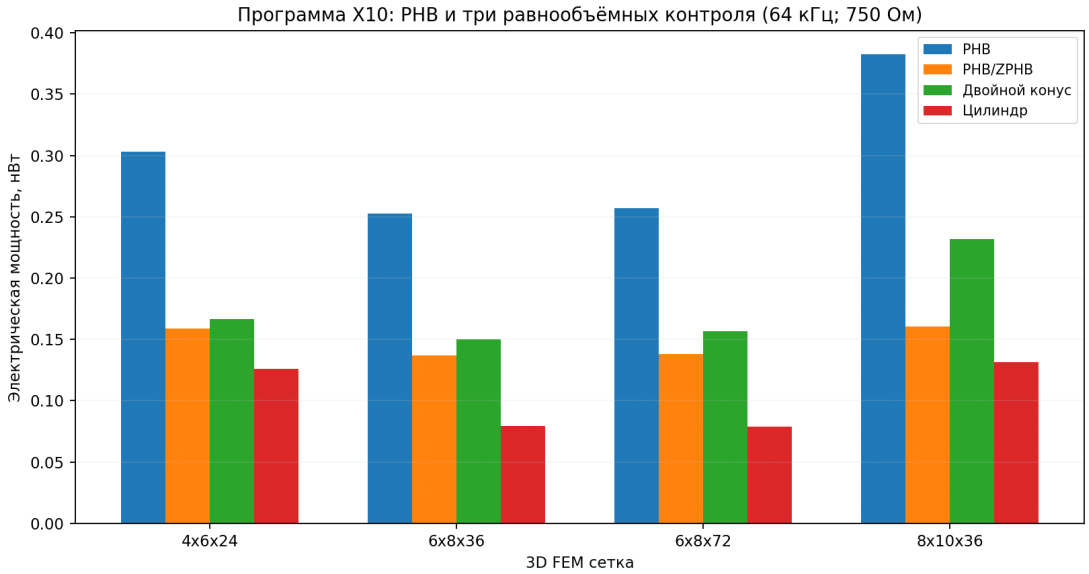

Рисунок 23. Мощность четырёх равнообъёмных тел с пространственно разрешёнными полями керамики и электрического потенциала. Исходные обозначения: PHB; гибрид PHB/ZPHB; двойной конус; цилиндр. Сетки задают числа радиальных, осевых и угловых ячеек четверти области.

Угловое сгущение с 36 до 72 ячеек в четверти области меняет выход PHB примерно на 1,83%, а конуса — примерно на 4,40%; сравнительный выигрыш остаётся положительным. Сгущение сетки PZT с 4×4×2 до 6×6×3 при той же грубой сетке тела даёт 0,29730 нВт для PHB и 0,16417 нВт для лучшего контроля, сохраняя выигрыш 81,10%. Это полезные направленные проверки. Однако радиальное и осевое сгущение с 6×8×36 до 8×10×36 увеличивает мощность PHB примерно на 51,5%, а дальнейшее сгущение продолжает существенно её менять. Эти данные не дают континуально точной абсолютной мощности или процента преимущества с границей ошибки 2%. В последующей серии сгущения на 10×12×36, 12×14×36 и 14×16×36 сравнивались только PHB и двойной конус; эти сетки не подтверждают ранжирование всех четырёх тел (раздел 8.2).

Пятиточечное сканирование на сетке тела 4×6×24 даёт выигрыши 42,06%, 83,48%, 81,94%, 80,55% и 79,29% при 63,8, 63,9, 64,0, 64,1 и 64,2 кГц. Выход PHB относительно слабо меняется в этом грубо разрешённом дискретном интервале, тогда как отклик гибрида заметно изменяется. Наблюдение обосновывает гипотезу узкополосной конструкции, но до заявления непрерывного рабочего окна требуется уточнённое сканирование. Абсолютные мощности имеют субнановаттный масштаб при указанной нормировке 1 Н; практическая эффективность сбора энергии не установлена.

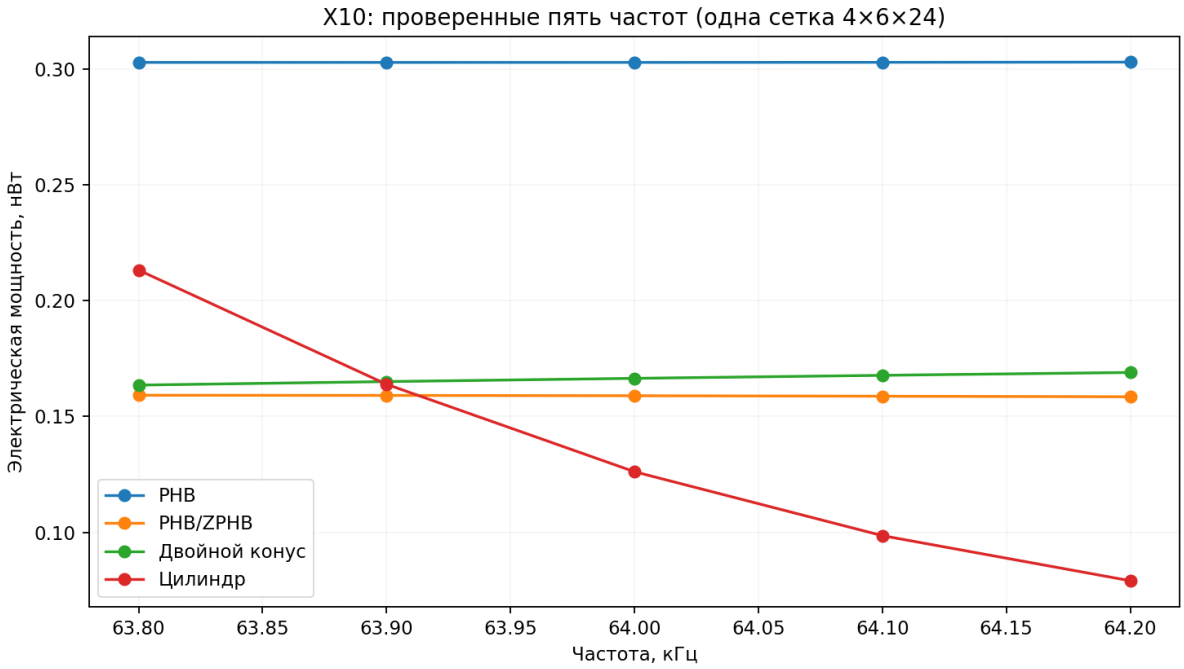

Рисунок 24. Пять проверенных частот пространственной модели на одной грубой сетке тела. Исходный график подтверждает дискретное сравнение и не удостоверяет широкополосную работоспособность.

7. Чувствительность к гладким отклонениям от точного профиля PHB

Проверка особой роли гиперболы. Нужно отделить две конкурирующие причины. Общая геометрическая чувствительность проявляется в плавном изменении передаточного функционала при деформации профиля; специальный механизм точной гиперболы потребовал бы отдельного инварианта, экстремума или разрыва, отсутствующего у строго согласованных негиперболических контролей. Поэтому возмущение сохраняет положения источника и приёмника, сопряжения профиля и аналитический объём, но нарушает точное уравнение коники. Полученные малые различия не подтверждают исключительный оптимум точной формы при имеющейся численной точности.

Необходимость точной гиперболы проверяется на семействе гладких границ с сохранением объёма, принимая точную PHB за исходную форму. Особый геометрический закон должен количественно предсказывать отклик и его чувствительность первого порядка относительно исходной формы, отличая PHB от негиперболических конкурентов. Само наличие локального максимума или положительной разницы относительно двух произвольно выбранных деформаций не доказывает необходимость точной гиперболичности. В независимом исследовании восьми профилей получена эмпирическая аппроксимация по уравнению (54), где φ — доля массы цилиндрического пояса, а R^2=0,94. В статье не заданы нормировка и единицы s, поэтому заявленное снижение разброса резонансной частоты на 20% и масштаб 20 ppm на 0,01 мм проверить нельзя. Это предварительные результаты для указанного семейства профилей, а не универсальный закон кривизны и не доказательство исключительности гиперболы.

$$s \approx 0.0067(1-\varphi)^{1.56} \tag{54}$$

Близость результатов точной PHB и гладкой пользовательской коррекции ограничивает физическую интерпретацию. Она подтверждает локальную чувствительность к форме в заданной системе, но не подтверждает сингулярный инвариант передачи, связанный с

аналитическим фокальным соотношением. Особенно важно не выдавать геометрические фокальные кольца за доказанные зоны преобразования энергии P↔SV.

Чтобы отделить общий эффект формы от особой роли точной гиперболы, PHB деформируется только между радиусом верхнего среза и внешним краем. Нормированная координата и поправка заданы уравнениями (55) и (56); шесть граничных условий на концах приведены отдельно в уравнениях (57)–(62).

$$x = (r - r_c)/(R - r_c) \tag{55}$$

$$\delta f(x) = c \cdot \psi(x) \tag{56}$$

$$\psi(0) = 0 \tag{57}$$

$$\psi'(0) = 0 \tag{58}$$

$$\psi''(0) = 0 \tag{59}$$

$$\psi(1) = 0 \tag{60}$$

$$\psi'(1) = 0 \tag{61}$$

$$\psi''(1) = 0 \tag{62}$$

$$\int_0\text{^}1\ r(x)\ \psi(x)\ dx = 0 \tag{63}$$

$$\Delta V = 4\pi \int_0\text{^}R\ r\ \delta f\ dr \tag{64}$$

$$4\pi \int_0\text{^}R\ r\ \delta f\ dr = 0 \tag{65}$$

Определение с обеспечивает условие сохранения объёма и аналитическое выражение его изменения, приведённые в уравнениях (63)–(65). Верхняя и нижняя внешние ветви смещаются симметрично. Проверены амплитуды ±0,04 и ±0,08 мм; знаки кривизны численно проверены на гладком интервале. Это ограниченное локальное семейство, а не глобальная оптимизация; оно построено для электрической геометрии и не перенесено из отдельной модели идентификации нагрузок.

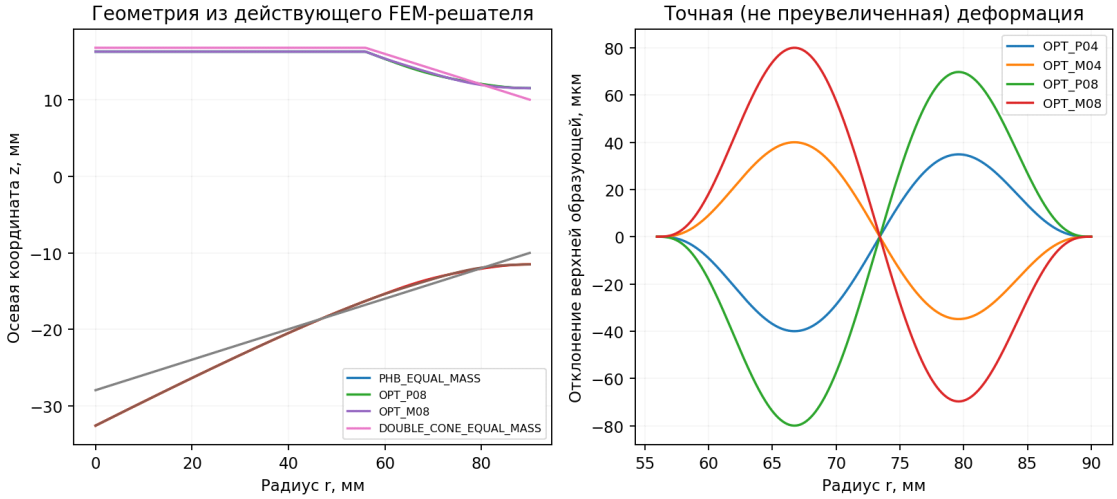

Рисунок 25. Фактические деформированные меридианы и неувеличенные поправки профиля из выполненного решателя. Правая вертикальная ось показывает изменение профиля в микрометрах. Поправки сохраняют объём и геометрию концов.

Таблица 7. Изменение электрической мощности относительно точной PHB

Поправка	**4×6×24**	**6×8×36**	**8×10×36**
−0.08 мм	+0.0606%	−0.3178%	−0.3672%
−0.04 мм	+0.0303%	−0.1606%	−0.1861%
+0.04 мм	−0.0303%	+0.1639%	+0.1910%
+0.08 мм	−0.0606%	+0.3312%	+0.3870%

В основной рабочей точке профиль +0,08 мм даёт 0,384101 нВт на 8×10×36, лишь на 0,3870% выше PHB. На самой грубой сетке знак этого малого эффекта противоположен. Двенадцать сочетаний частоты, потерь и сопротивления на 6×8×36 дают для той же поправки положительный диапазон 0,2365–0,3363%. Следовательно, измеренный отклик согласуется с гладкой локальной чувствительностью оператора. Он не даёт свидетельства разрывного или сингулярного преимущества точного гиперболического равенства, а доступного численного разрешения недостаточно для превращения столь малого улучшения в подтверждённую проектную рекомендацию.

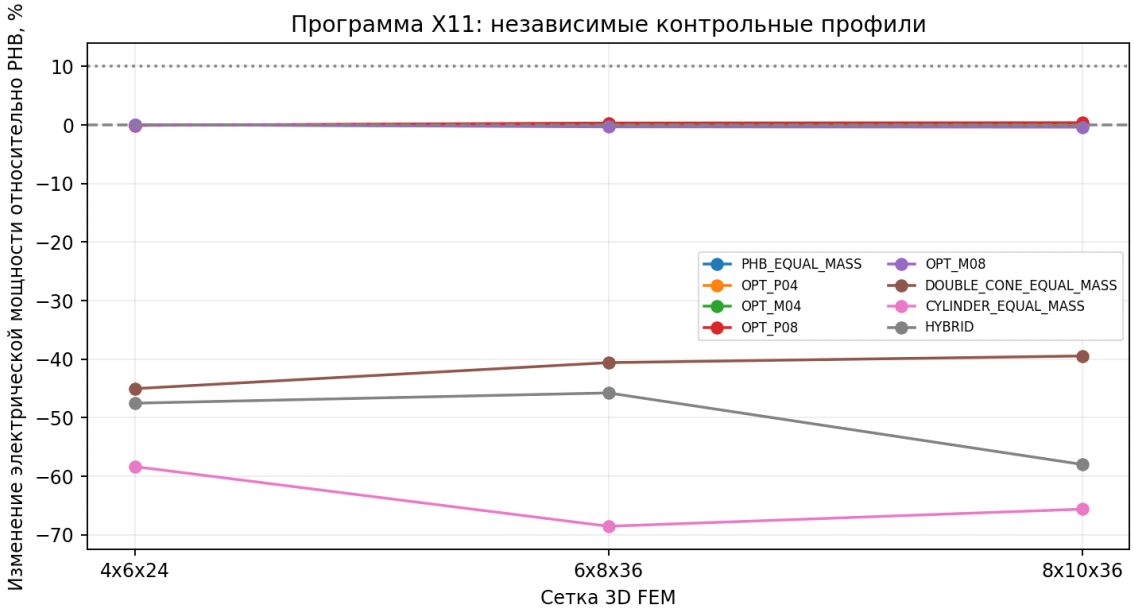

Рисунок 26. Сравнение близких деформированных профилей и простых контролей с точной PHB на трёх сетках. Ось показывает изменение относительно PHB, поэтому отрицательные значения конуса численно не равны выигрышу PHB относительно конуса.

8. Численная верификация и границы доказательства

Что означает верификация. Необходимо различать четыре уровня. (1) Алгебраическая согласованность показывает, что собранная дискретная система действительно решена. (2) Вариационная согласованность проверяет слабые формы инерции, жёсткости, электроупругой связи, тяги и работы контакта. (3) Континуальная сходимость требует стабилизации результатов при улучшении представления геометрии и аппроксимации полей. (4) Физическая валидация сопоставляет прогноз с изготовленным образцом и измеренными свойствами материалов. Прохождение одного уровня не заменяет следующий. В данной задаче чрезвычайно малые энергетические невязки сосуществуют с крупными изменениями электрической мощности при сгущении алюминиевой сетки.

Численная верификация устроена иерархически, поскольку её тесты выявляют разные ошибки. Patch-test проверяет воспроизведение элементом точного низкопорядкового поля; проекция P2→P1 — согласованность билинейных форм на общем полиномиальном подпространстве; балансы механической и электрической энергии и алгебраические невязки — правильность сборки и решения выбранной дискретной системы. Ни один из этих тестов сам по себе не ограничивает погрешность резонансной выходной мощности.

Приёмка континуального результата требует неизменных тензора материала, тяги источника, электродов и схемы, контактного функционала и отображения геометрии при последовательном сгущении сеток металла и керамики. Необходимо отслеживать абсолютную электрическую мощность, принятую механическую мощность, их отношение и соседние моды минимум на трёх последовательных уровнях. Задача — получить устойчивую физическую величину, а не подобрать сетку, где выбранная форма выигрывает.

Верификация разделена на алгебраическую согласованность, представление геометрии, чувствительность дискретизации и физическую валидацию. Пространственная серия имеет нормированные линейные невязки менее $2{,}55\times10^{-13}$ и внутренние невязки электрического закона Гаусса менее $3{,}69\times10^{-14}$. Максимальная зарегистрированная ошибка энергетического баланса равна $1{,}85\times10^{-13}$. Эти значения показывают взаимную согласованность собранных уравнений и энергетического учёта, но не оценивают ошибку континуального решения. Независимая проверка аффинного поля для архивной формулы тетраэдральных градиентов даёт норму ошибки $3{,}27\times10^{-16}$ в двойной точности; это лишь проверка реализации на уровне элемента.

Аналитические объёмы равны, однако фасетные сетки аппроксимируют кривые границы с зависящими от формы ошибками. Максимальная сообщённая ошибка объёма составляет примерно 0,775% в основной пространственной серии и 0,792% в серии деформаций. Поэтому равенство аналитического объёма нельзя представлять как точное равенство дискретных масс. Большое радиально-осевое изменение мощности остаётся главным нерешённым численным ограничением. Малое угловое изменение, отличная невязка или кажущаяся стабильность отношения его не устраняют.

В реестре вычислительных свидетельств встречается повторная упаковка одинаковых выходных данных. Побайтно совпадающие файлы исключены из инвентаризации различных первичных записей. Для двух авторских мастер-архивов и их вложений ранее учтены 276 различных неархивных файлов, включая 130 таблиц CSV, семь контейнеров NPZ и 38 графиков PNG. Это количество файлов, а не независимых физических экспериментов или сошедшихся численных решений. Происхождение количественных утверждений задают исходники, первичные данные и параметры соответствующих сценариев.

8.1. Целевой повторный расчёт и более сильные геометрические контроли

Непосредственно по первичным вычислительным архивам выполнена повторная проверка воспроизводимости. Заново решён 31 выбранный FEM-режим: девять высокопорядковых осесимметричных задач кодирования нагрузок, шесть трёхмерных связанных пьезоэлектрических задач и шестнадцать задач пассивного приёмника на квадратичных треугольных элементах. Повторные результаты совпали с соответствующими первичными таблицами; независимое восстановление комплексных матриц 2×2 и их сингулярных чисел дало согласие в пределах машинной точности. Это целевое повторение доступных исходников и численных метрик, а не независимая реализация всех исторических решателей и не окончательная пересертификация всей двухмесячной программы.

В калиброванной задаче распознавания двух нагрузок при 152 кГц точная PHB снижает шумовой показатель обратной задачи на 13,54% относительно лучшего из двух первоначально заданных деформированных контролей на сетке Q3 28×56 (13,41% при Q2 56×112). Дополнительно проверенный сохраняющий объём гладкий негиперболический контроль с максимальным отклонением 0,08 мм даёт показатель на 4,79% ниже точной PHB на Q3 28×56. Следовательно, геометрия в этой модели представляет полезную настраиваемую структуру кодирования, но необходимость или оптимальность именно точной гиперболы не доказана. Отдельное снижение ошибки слепого восстановления параметров источника на 18,62% относится к другому шестиканальному критерию и не должно смешиваться с показателем передаточной матрицы.

В иной осесимметричной задаче пассивного приёма при 63,5 кГц независимо собранная треугольная P2-модель на сетке 36×72 даёт долю принятой механической мощности 33,14055% для зеркального гибрида PHB/ZPHB и 28,29043% для равнообъёмной PHB, то есть относительное отличие 17,14%. Для геометрий использованы заданные соответствующие настройки импеданса приёмника. При удвоении структурного демпфирования с сохранением исходных настроек разность на сетке 18×36 меняет знак до −4,04%. Этот результат зависит от потерь и нагрузки и характеризует механический порт, а не электрическую мощность отдельной трёхмерной модели.

Исходные P1-пересчёты воспроизводят положительное ранжирование PHB относительно двойного конуса на отдельных сетках. На 8×10×36 получено 0,38262 против 0,23167 нВт, но мощность PHB изменяется приблизительно на 51,53% при переходе от 6×8×36; расширенная серия из семи сеток также не имеет предела. Отдельный полосовой расчёт по 33 частотам при повышенных потерях даёт точной PHB примерно на 1,835% меньше принятой мощности, чем гладкому сохраняющему объём кубическому контролю. Последующие согласованные расчёты P1/P2 с полным тензором PZT и криволинейными элементами исключают вывод о сеточно-независимом ранжировании из первоначальной P1-серии; см. разделы 8.4–8.6. Не установлены ни глобальная оптимальность, ни особый фокальный механизм упругих волн.

Численный аудит исключает количественные утверждения по историческим Q1-полям с ошибочным транспонированием градиентов якобиана. Эти поля нельзя объединять с Q3, P2, пространственными P1 либо последующими криволинейными P1/P2-моделями. Последние проверены на уровне операторов, однако их электрический выход при 64 кГц пространственно не верифицирован; см. разделы 8.4–8.7 и реестр первичных архивов.

Расширенная серия на семи сетках и отдельное сгущение сетки пьезокерамики представлены ниже как дополнительные проверки ранее заданной рабочей точки. Они не являются новой оптимизацией частоты или сошедшимся расчётом устройства.

В расширенном гармоническом сканировании все три профиля рассчитывались на сетке Q3 24×48. На каждой частоте коэффициент усиления шума PHB сравнивался с меньшим из значений для двух заданных профилей DEF. Положительное значение означает меньшее усиление шума у PHB. На этой сетке наибольшее снижение получено при 152 кГц. На более подробных сетках Q3 28×56 и Q2 56×112 снижение на этой частоте составило соответственно 13,54% и 13,41%. Дискретные точки не устанавливают непрерывной полосы преимущества. Гладкий контроль с отклонением 0,08 мм дополнительно снижает показатель на 4,79% относительно точной PHB при 152 кГц на Q3 28×56.

Таблица 8. Частотная чувствительность относительно лучшего из двух заданных контролей DEF (Q3 24×48).

Частота (кГц)	**Снижение коэффициента усиления шума (%)**
151,0	−1,02
151,5	+8,38
152,0	+13,49
152,5	+3,04
153,0	+2,64
154,0	+8,29

8.2. Расширенная проверка сходимости трёхмерной сетки алюминиевого тела

Связанная трёхмерная электроупругая задача повторно решена исходной трёхмерной связанной конечно-элементной моделью при частоте 64 кГц, заданной амплитуде силы 1 Н, эквивалентном сопротивлении 750 Ом и номинальных потерях алюминия. Для тела использованы семь дискретизаций. Сетка PZT первоначально сохранена 4×4×2. Серия содержит четыре новые конечно-элементные сборки для двух более подробных сеток алюминия 12×14×36 и 14×16×36, по два сравниваемых тела на сетку. Источник, материальные допущения, области приёма и симметрия четверти трёхмерной области сохранены. Значения первичных PRIMARY.csv приведены в таблице 9.

Таблица 9. Семь сеток при сравнении PHB и равнообъёмного двойного конуса, 64 кГц (PZT 4×4×2; электрическая мощность на нагрузках)

Сетка тела	**PHB (нВт)**	**Конус (нВт)**	**Прирост PHB**
4×6×24	0.302921	0.166493	+81.94%
6×8×36	0.252510	0.150020	+68.32%
6×8×72	0.257132	0.156620	+64.18%
8×10×36	0.382620	0.231674	+65.15%
10×12×36	0.546384	0.310754	+75.83%
12×14×36	0.609762	0.396466	+53.80%
14×16×36	0.835924	0.340433	+145.55%

На всех семи проверенных сетках электрическая мощность PHB больше, чем у двойного конуса, однако величина относительного отличия нестабильна. Последнее сгущение сетки алюминия с 12×14×36 до 14×16×36 увеличивает мощность PHB на 37,09%, уменьшает мощность конуса на 14,13% и изменяет расчётный выигрыш с 53,80% до 145,55% (+91,75 процентного пункта). Последовательность немонотонна и не допускает достоверной экстраполяции к непрерывной краевой задаче. Положительный порядок двух дискретных решений нельзя выдавать за доказанное технологическое преимущество на 145,55% или 65,15%.

Нормированные дефекты баланса механической энергии на сравниваемых сетках имеют порядок не более 10^{-13}. Малые алгебраические невязки подтверждают согласованность собранной дискретной системы, но не ограничивают пространственную ошибку. Объёмы совпадают аналитически, но не в каждой гранёной сеточной аппроксимации; линейные тетраэдры P1, сдвиги резонансов, конечная податливость контакта и приближённые

материальные параметры остаются возможными источниками количественной погрешности. На сетке 14×16×36 доли электрической мощности от принятой механической составляют 0,04139% для PHB и 0,01345% для конуса; это доли преобразования, а не проценты прироста электрического выхода.

8.3. Отдельное сгущение сетки пьезоэлектрических секторов

Для выявления главного источника численной неопределённости исходный решатель повторно запускался при неизменной сетке алюминия и более подробной сетке конечного пьезосектора. На 8×10×36 переход от PZT 4×4×2 к 8×8×4 изменяет электрический выход PHB на −0,1356%, а конуса — на +0,8983%. На сетке тела 10×12×36 доступное сгущение PZT до 6×6×3 изменяет эти мощности на +0,4823% и +1,9094% соответственно. В таблице 10 приведены расчётные мощности.

Таблица 10. Сгущение сетки PZT при неизменной сетке алюминиевого тела (64 кГц; мощность в нВт)

Сетка тела	Сетка PZT	PHB (нВт)	Конус (нВт)
8×10×36	4×4×2	0.382620	0.231674
8×10×36	6×6×3	0.382610	0.233542
8×10×36	8×8×4	0.382101	0.233755
10×12×36	4×4×2	0.546384	0.310754
10×12×36	6×6×3	0.549020	0.316688

Проверки сгущения PZT в исходной P1-модели с упрощёнными константами локально устойчивее, чем сгущение алюминиевой сетки. Позднее проведены более строгие эксперименты с полным тензором PZT и криволинейной P1/P2-геометрией (разделы 8.4–8.6). Теперь доступны согласованные поверхностные интегралы и квадратичные поля, но электрическая мощность по-прежнему не достигла сходимости. Незавершённый расчёт 14×16×36 с PZT 6×6×3 остаётся исключённым. Локально устойчивая сетка керамики не равнозначна сертификации непрерывной связанной задачи.

Идентификаторы первичных расчётных данных и ключи воспроизводимости приведены в приложении B; численные условия и результаты проверки изложены выше.Идентификаторы первичных расчётных данных и ключи воспроизводимости приведены в приложении B; численные условия и результаты проверки изложены выше.

Сгущение алюминиевой сетки, угловые проверки и сгущение пьезокерамических элементов имеют раздельные первичные CSV, энергетические балансы и невязки. Эти данные проверяют воспроизводимость и чувствительность указанной P1-постановки, а не независимую континуальную или экспериментальную валидацию. Полные имена трёх пакетов указаны выше; сведения о происхождении расчётов приведены в описании соответствующих пакетов.

8.4. Замечания рецензента: сопоставимость конструкций и пределы материальной модели

Для электрической задачи общими заданы алюминий, внешний радиус R = 90 мм, пятно верхнего источника, аналитический объём 776,368454 см³, площадь приёмника и указанные электрические цепи. Однако это не фиксирует все безразмерные группы подобия: отношения b/a и R/a различаются у PHB (a = 11,5018027 мм, b = 34 мм) и гибрида (a = 10 мм, b = 34 мм), а для цилиндра и двойного конуса эти отношения не определены. При 64 кГц скорость сдвиговой волны из E = 69 ГПа, ν = 0,33 и ρ = 2700 кг/м³

составляет приблизительно 3100 м/с; длина волны около 48,4 мм, поэтому диаметр 180 мм содержит примерно 3,72 длины волны. Передачу с выраженной модовой зависимостью и электрическим импедансом следует исследовать в конечноволновой эластодинамике, а не по лучевой фокусировке. Равенство аналитических объёмов и приложенных сил не гарантирует равной подведённой мощности или оптимальности контрольных тел.

Исходная таблица 5 сохранена как документальный источник упрощённой изотропной модели керамики (E = 50 ГПа и приближение e = d·E). Её нельзя отождествлять с материальной моделью последующих проверок. Там использованы номинальные анизотропные константы PZT-5H: $C^E_{11} = 126$, $C^E_{12} = 79{,}5$, $C^E_{13} = 84{,}1$, $C^E_{33} = 117$, $C^E_{44} = 23$ и $C^E_{66} = 23{,}3$ ГПа; $e_{31} = -6{,}5$, $e_{33} = 23{,}3$, $e_{15} = 17$ Кл/м²; $\varepsilon^s_{11} = 1{,}503\times10^{-8}$, $\varepsilon^s_{33} = 1{,}300\times10^{-8}$ Ф/м с поворотом оси поляризации по локальному радиусу. Значения взяты из опубликованного набора параметров PZT-5H [5]; C^E_{66} округлена с 23,25 до 23,3 ГПа. Это номинальные литературные значения, а не измерения конкретных пьезоэлементов. Поэтому различие старого и нового электрического выхода связано одновременно с изменением аппроксимации и модели материала; это не чистое исследование сходимости исходной модели.

8.5. Согласованный вариационный тест P1/P2 и криволинейная изопараметрическая геометрия

Что проверяет чистое сравнение P1/P2. Повышение степени полинома не должно незаметно менять физический эксперимент. Согласованное сравнение использует одно аналитическое тело, одинаковое криволинейное отображение элементов, один интеграл контактной энергии и одинаковую виртуальную работу приложенной тяги. Продолжение линейного подпространства в P2 позволяет проверить строгое операторное равенство ещё до сравнения физических откликов. Успешный проекционный тест подтверждает, что обе дискретизации задают одинаковые билинейные и линейные формы на общем подпространстве, но не требует сеточной сходимости вычисленной околорезонансной мощности.

Для контактного оператора согласованность на линейных пробных полях выражается через продолжение P из P1 в P2: $P^T K_contact,P2$ P должно совпадать с соответствующей билинейной формой P1 при одинаковых непрерывной контактной энергии и геометрии. Для нагрузки проверяется виртуальная работа: $f_P1^T v_P1$ должна совпадать с $f_P2^T(Pv_P1)$. Прямое сравнение евклидовых норм узловых векторов силы не имеет самостоятельного континуального смысла, поскольку степени свободы различаются.

Криволинейное изопараметрическое отображение устраняет иную составляющую погрешности. Замена аналитически кривой границы плоскими гранями меняет массу и интегралы упругой жёсткости. Малое расхождение объёма — полезный, но недостаточный критерий точности собственных частот и электрической мощности: существенно также положение геометрической ошибки относительно распределения энергии моды.

В исправленном h/p-тесте используются функционал контактной энергии из уравнения (52), функционал виртуальной работы тяги из уравнения (66) и общая квадратичная геометрическая карта из уравнения (67) с одинаковой квадратурой по физической поверхности. Проекция следов P2 на линейное подпространство P1 даёт относительные ошибки контактного функционала и тяги порядка 10^{-16} и 10^{-15}; проверки матриц жёсткости, массы, пьезоэлектрической связи и диэлектрической матрицы также пройдены. Это подтверждает дискретную согласованность, а не сходимость физического решения.

$$L_t(v) = \int_{\Gamma_src} t_z v_z d\Gamma \quad (66)$$

$$x(\xi) = \Sigma_{i=1}^{10} N_i(\xi)x_i \quad (67)$$

Таблица 11. Электрическая мощность P1/P2 на одинаковой криволинейной геометрии при 64 кГц, полном номинальном тензоре PZT-5H и согласованных контакте/тяге (нВт; расчётные, не сертифицированные мощности)

Сетка	PHB P1	PHB P2	Конус P1	Конус P2
3×4×12	0,631225	1,063485	0,453458	0,511372
4×6×16	0,296292	1,800894	0,164847	0,614699
5×7×18	0,234769	2,273290	0,134960	0,654210
6×8×20	0,205122	0,371993	0,118967	0,891647

При сгущении P2 меняет знак сравнения с благоприятного для PHB на трёх более грубых сетках на благоприятный для конуса на 6×8×20, тогда как P1 остаётся благоприятным для PHB на тех же разбиениях. Следовательно, ни прежние +65,15% P1, ни противоположное ранжирование на последней P2-сетке не являются сеточно-независимым результатом. Смену знака нельзя объяснить только прежним различием контактных и нагрузочных функционалов P1/P2; остаются вопросы разрешения объёмных полей, резонансов и модовой связи.

Криволинейные десятиузловые тетраэдры уменьшают абсолютную ошибку объёма PHB примерно с 2,62% на прежней прямолинейной грубой сетке до 0,02222% на 3×4×12 и 0,000624% на 6×8×20; соответствующие ошибки конуса — 0,000674% и 0,0000677%. В точках интегрирования не обнаружено инверсии якобианов. Повышение объёмной квадратуры с 11 до 64 точек меняет мощность менее чем на 0,05% на двух проверенных сетках; одна лишь квадратура не объясняет большой дрейф. Проверка пяти частот 63,8–64,2 кГц подтверждает только численное интегрирование по частоте на фиксированной сетке, а не физическую полосовую сходимость после сгущения.

Таблица 12. Низшие собственные частоты свободного алюминиевого тела в криволинейной P2-модели (Гц); не являются собственными частотами связанного пьезоприёмника около 64 кГц

Сетка	PHB первая, Гц	PHB следующая, Гц	Конус первая, Гц	Конус следующая, Гц
3×4×12	9133,92	14895,39	9191,42	15345,70
4×6×16	9110,64	14752,36	9169,55	15218,57
5×7×18	9108,09	14726,98	9167,47	15197,47
6×8×20	9101,66	14710,42	9162,35	15183,01

Низшие ненулевые собственные частоты демонстрируют тенденцию к стабилизации, но идентичность собственных форм на последовательных сетках ещё не проверена критерием MAC. Диапазон этих мод (около 9–15 кГц) далёк от рабочей частоты 64 кГц. Поэтому частичная сходимость низших частот не доказывает сходимость электрической мощности, зависящей от релевантных связанных резонансов, возбуждаемости и отклика электродов.

8.6. Проверка сохранения заряда и мощности полной блочной системой и методом Шура

Независимые способы решения и независимая физическая модель. Прямая факторизация собранной механико-электрической блочной матрицы и исключение внутренних электрических неизвестных дополнением Шура — два независимых алгебраических способа решения одних и тех же дискретных полевых уравнений. Совпадение перемещений, потенциалов и электрического выхода почти до машинной точности является необходимой проверкой реализации. Но это не две независимые континуальные модели, поскольку в обоих случаях используются одна геометрическая сетка, те же материальные матрицы и контактная энергия. Энергетический аудит затем сравнивает мощность источника со всеми неотрицательными потерями и полезной мощностью нагрузки.

Решение одной и той же связанной блочной системы прямой факторизацией и алгебраически эквивалентным исключением по Шуру проверяет путь вычисления и учёт электрического заряда. Совпадение особенно полезно для комплексной мощности, но это не независимая физическая модель и не подтверждение континуального предела. Поэтому проверка реализации отделяется от проверки h/p-сходимости.

Отдельный строгий алгебраический аудит решил одни и те же собранные связанные FEM-уравнения двумя путями: прямой разреженной факторизацией полной системы неизвестных (механические перемещения, внутренние потенциалы, напряжения электродов) и редукцией методом дополнения Шура. Для воспроизводимого совпадения физических неизвестных потребовалось восемь шагов диагонального уравновешивания строк и столбцов; масштабирование не изменяет физическую матрицу в исходных единицах. Двенадцать первичных записей охватывают обе формы, два порядка полей, две сетки и частоты P2 63,8; 64,0; 64,2 кГц. Оба способа используют одинаковые собранные матрицы, поэтому совпадение является независимым алгебраическим маршрутом, но не независимой реализацией физической FEM-модели континуума.

Таблица 13. Максимальные относительные QA-показатели по 12 случаям полной системы и метода Шура (первичный COUPLED_QA_PRIMARY.csv)

Проверка	**Макс. относительная ошибка**
Сохранение заряда / тока	$2{,}976\times10^{-13}$
Невязка полной блочной системы	$2{,}542\times10^{-13}$
Баланс полной мощности	$8{,}250\times10^{-14}$
Полная система / Шур: напряжение	$8{,}258\times10^{-14}$
Полная система / Шур: перемещения	$1{,}742\times10^{-13}$
Проекция контакта P2→P1	$2{,}700\times10^{-16}$
Проекция тяги P2→P1	$1{,}268\times10^{-15}$

Все зарегистрированные случаи прошли заданные пороги QA. Нулевой тест отключения пьезосвязи выполнен в отдельных опорных случаях, а не самостоятельно на каждой из 12 комбинаций частоты и сетки. Энергетический баланс проверяет сохранение в дискретной постановке; он не даёт оценки отличия сеточного решения от непрерывной задачи.

Таблица 14. Показатели передачи энергии при 64 кГц, сетка 4×6×16/P2 (номинальный PZT-5H; результаты не сошлись)

Показатель	**PHB**	**Двойной конус**
Поступающая мощность, нВт	5482,830	2772,086
Мощность нагрузки, нВт	1,800894	0,614699
Мощность нагрузки / вход, %	0,032846	0,022175
Диссипация в алюминии, нВт	5479,648	2770,708

Большая электрическая мощность PHB на указанной сетке отчасти связана с большей поступающей механической мощностью при одинаковой силе. В нагрузку поступает приблизительно 0,032846% механического входа PHB против 0,022175% у конуса. В данной модели около 99,94% входа PHB рассеивается в алюминии; это указывает на важность согласования источника и перекрытия с приёмником, а не на сертифицированный КПД. Малые дефекты баланса и заряда не доказывают сеточную сходимость этой доли.

8.7. Что доказывают новые проверки и что остаётся открытым

Методологическая проверка выявила большой дрейф при сгущении корпуса, отсутствие независимо оптимизированного негиперболического конкурента, несовпадение семейств сил в обратной задаче, неопределённость клеевого контакта и необходимость отличать равные силы от равных входных мощностей. Новая работа устранила один недостаток реализации — несогласованность функционалов контакта и тяги P1/P2, — но не основную неопределённость континуальной электрической мощности при 64 кГц. Исходный гладкий контроль CUSTOM 0,08 мм показывает такой же либо немного лучший результат, чем точная PHB, поэтому оптимальность точной гиперболы не заявляется.

Вывод, что реальные потери алюминия обязаны сузить наблюдаемое относительное рабочее окно до заранее указанного числа герц, нельзя получить только из $Q=1/\eta$, как задано уравнением (72): устройство имеет потери керамики, контакта, электрической цепи и порта, а окно сравнительного выигрыша двух тел не обязательно совпадает с шириной одного резонанса. Нужны измеренные частотно-зависимые потери и температурный тест. Аналогично отношение жёсткостей нельзя называть акустическим импедансом: направленный импеданс определяется как ρc, где c зависит от жёсткости и плотности. Две малые сетки и узкая полоса не подтверждают стабильность изготовленного устройства, непрерывную ширину полосы или конкурентоспособность энергоотборника.

$$Z_dir = \rho c \tag{68}$$

Следующий критерий приёмки должен быть объявлен заранее: одинаковые физические границы источника и приёмника, несколько независимо оптимизированных негиперболических контролей, измеренные свойства PZT и контакта, отслеживание мод около 64 кГц с MAC и не менее трёх последовательных h/p-сеток со стабильными абсолютной электрической мощностью, поступающей механической мощностью и их отношением при указанном допуске. Эти требования относятся к сертификации эффективности; успешный 12-случайный аудит заряда и энергии их не заменяет.

8.8. Независимый аудит квадратичных элементов с прямолинейной границей при отдельной материальной модели

Отдельный аудит рассматривает реализацию квадратичных тетраэдров с прямолинейными гранями и суррогатным изотропным тензором пьезокерамики. Следующее сравнение

выполняется только внутри этой материальной модели. Его нельзя присоединять к ряду криволинейных расчётов с полным тензором, поскольку изменение геометрического отображения или тензора PZT меняет саму задачу. Назначение аудита — проверить, сохраняется ли предпочтительное ранжирование при сгущении сетки при неизменных условиях.

Аудит включает три независимые проверки: согласованность контактного функционала при проекции, точность виртуальной работы поверхностной тяги и парное сравнение электрической мощности на одинаковых сетках. Первая проверка может проходить до машинной точности, даже если полное связанное решение сильно зависит от сетки; улучшение квадратуры может изменить мощность на фиксированной сетке, не определяя её континуального предела.

После приведённых выше расчётов с согласованной криволинейной геометрией и полным тензором PZT был выполнен дополнительный аудит прямолинейной реализации P2 с прямолинейными тетраэдрами и упрощённой изотропной моделью пьезокерамики. Эти расчёты не являются следующими уровнями h-сгущения таблиц 9–12: в них отличаются геометрическое отображение и материальная модель. Поэтому их мощности нельзя объединять с криволинейной полнотензорной серией или экстраполировать совместно. Единый контактный функционал V5 прошёл тест согласованности P1/P2 при проекции с точностью порядка машинной, но воспроизвёл прежний оператор P2 и не устранил дрейф полных решений. В тесте квадратуры поверхностной нагрузки V6 получены расхождения дискретного вектора сил 3,55%, 3,75% и 1,93% на сетках 3×4×12, 4×6×16 и 6×8×20 соответственно. Это чувствительность дискретизации, а не непосредственная оценка ошибки электрической мощности.

Таблица 15. Смена ранжирования PHB и конуса по электрической мощности на двух сетках тела. Квадратичные элементы с прямолинейными гранями, упрощённая изотропная модель PZT, подсетка PZT 6×6×3, исходная квадратура поверхностной нагрузки, частота 64 кГц. Приведена электрическая мощность на нагрузках, нВт. Эта пара относится к самостоятельной серии и не образует уровень сгущения для криволинейной полнотензорной серии из таблиц 9–12. Мощность PHB снижается на 81,03%, а мощность конуса возрастает на 59,91%. Сходимость мощности ни для одного тела не установлена.

Сетка тела	**PHB (нВт)**	**Конус (нВт)**	**PHB к конусу**	**Изменение к предыдущей строке**
4×6×16	2,801678	0,948320	+195,44 %	—
6×8×20	0,531512	1,516490	−64,95 %	**−260,4 п.п.**

Данные таблицы 15 получены на подсетке PZT 6×6×3. Значения 2,776897 и 2,889877 нВт, приведённые выше для сетки тела 4×6×16, относятся к подсетке 4×4×2 до и после уточнения квадратуры поверхностной нагрузки соответственно.

На сетке 3×4×12 при PZT 4×4×2 уточнённое интегрирование тяги изменило электрическую мощность PHB с 1,286869 до 1,329705 нВт (+3,33%), конуса — с 0,646670 до 0,665966 нВт (+2,98%). На сетке 4×6×16 уточнённая мощность PHB составила 2,889877 нВт против 2,776897 нВт при прежней квадратуре (+4,07%); соответствующий расчёт конуса с исправленной квадратурой не завершён. В поздней парной серии V8 с PZT 6×6×3 намеренно сохранена ИСХОДНАЯ квадратура тяги для обеих форм. Поэтому значения V6/V7 и V8 нельзя объединять в одну последовательность сгущения.

При сгущении с 4×6×16 до 6×8×20 в одной согласованной парной серии мощность РНВ уменьшается на 81,03%, мощность конуса увеличивается на 59,91%, а знак сравнительного преимущества меняется. Для конуса на 6×8×20 впервые завершён прямой расчёт с относительным дефектом энергетического баланса $1{,}59\times10^{-15}$. При этом уже прямолинейная P2-сетка 16×18×48 содержит приблизительно 339 327 механических степеней свободы только в алюминии; в локальной среде с лимитом 4 ГиБ она не была решена. Приведённые результаты показывают отсутствие сходимости и вычислительное ограничение, а не доказанное отрицательное преимущество РНВ.

Утверждение, что небольшое расхождение контактных матриц обязательно влечёт лишь небольшой сдвиг резонансной электрической мощности, не доказано без оценки обусловленности или резольвенты: близость моды может резко усиливать возмущение. Напротив, большая перемена мощности при намеренном изменении дискретного контакта сама по себе не доказывает, что причиной является физический клеевой слой. Аналогично процент погрешности объёма не определяет однозначно сдвиг собственной частоты без анализа соответствующей моды. Следующий тест пригодности должен использовать одну неизменную материальную модель, контакт и нагрузку, криволинейную геометрию, отслеживание мод около 64 кГц и проверку абсолютной электрической мощности и нормированного на принятую мощность преобразования минимум на трёх последовательных сетках. Эти условия пока НЕ выполнены.

8.9. Проверка соответствия мод и резонансной отстройки на рабочей частоте

При сравнении на фиксированной частоте необходим модовый аудит. В разделах 8.2, 8.5 и 8.8 показано, что расчётная электрическая мощность при 64 кГц меняется немонотонно при сгущении сетки тела, а ранжирование РНВ и конуса меняет знак. Рассматриваются два объяснения. Общее действие ошибки дискретизации может затрагивать оба тела сходным образом. Если же при сгущении близкая собственная частота переходит через 64 кГц, рабочая точка меняет положение относительно резонанса и выходная мощность может существенно измениться вследствие отстройки. Наиболее чувствительным в таком случае будет тело, рабочая частота которого лежит в пределах полуширины резонанса. Ниже приведена проверка соответствия мод для исследованных геометрий и сформулированы условия последующих сравнений мощности.

Для каждой формы и сетки собственные пары незатухающих свободных колебаний вычисляются из уравнения (69) в диапазоне 55–75 кГц. Положение рабочей частоты относительно ближайшей собственной частоты описывается нормированной отстройкой и её отношением к полуширине резонанса.

$$K(G)\psi_n = \omega_n^2 M(G)\psi_n \tag{69}$$

$$\delta = |f_d - f_n|/f_d \tag{70}$$

$$\kappa_half = \delta/(1/(2Q)) \tag{71}$$

$$Q = 1/\eta \tag{72}$$

где f_d = 64 кГц, а η = 0,02133 — номинальный коэффициент потерь алюминия в электрической модели. Относительная полуширина равна 1,066%, и условие κ_half < 1 означает, что рабочая частота лежит в её пределах. Для сопоставления мод между сетками используется критерий модового соответствия.

$$MAC_ij = |\langle \psi_i\hat{}(A), \psi_j\hat{}(B)\rangle|^2/(\|\psi_i\hat{}(A)\|^2 \|\psi_j\hat{}(B)\|^2) \tag{73}$$

Для вычисления MAC оба собственных вектора интерполируются в 42 общие физические точки внутри тела. Узлы и базисные функции двух сеток различаются, поэтому сравнение

проводится в общих пространственных координатах. Такая интерполяция может занижать MAC для форм с близко расположенными узловыми линиями. Основным диагностическим признаком служит структура соответствия по максимуму MAC.

Независимая проверка в упрощённой модели. Из-за ограничений памяти для связанной трёхмерной задачи построена самостоятельная осесимметричная модель P2. Геометрия PHB задана параметрами a = 11,5018027 мм, b = 34 мм, R = 90 мм, верхним срезом L/2 при L = 32,546 мм и нижним усечением вершины при r = 2,5 мм. Объём V = 776,36 см³. Радиус равнообъёмного конуса равен 85,52 мм. При 64 кГц длина поперечной волны λ_S = 48,43 мм, поэтому диаметр 180 мм составляет 3,72 λ_S. В таком диапазоне существенны моды всего тела. Использованы сетки 5×20 и 7×28. Расчёт помогает оценить возможный механизм и дополняет трёхмерные данные разделов 8.5–8.8.

Таблица 16. Собственные частоты в диапазоне 55–75 кГц и положение частоты 64 кГц относительно ближайшей моды. Осесимметричный расчёт P2 при Q = 46,9 и относительной полуширине 1,066%.

Тело	**Сетка**	**Мод в полосе**	**Ближайшая мода, кГц**	**δ, %**	**к_half**
PHB	5×20	6	63,62	0,59	0,55
PHB	7×28	7	64,37	0,58	0,54
Двойной конус	5×20	6	65,37	2,14	2,01
Двойной конус	7×28	7	62,85	1,80	1,69

Таблица 17. Сопоставление мод между сетками 5×20 и 7×28.

Тело	**Соответствие по максимуму MAC**	**Диапазон MAC**	**Изменение частоты отслеженной моды**
PHB	Три моды грубой сетки (56,45, 63,62 и 71,04 кГц) сопоставлены с одной модой подробной сетки при 64,37 кГц	0,41–0,82	+1,18% (1,11 полуширины). Ближайшие частоты лежат по разные стороны от 64 кГц.
Двойной конус	У сопоставленных мод две пары меняются местами	0,44–0,95	+0,66% (0,62 полуширины) для отслеженной моды, без пересечения 64 кГц.

Результат и интерпретация. В этом расчёте рабочая частота PHB лежит в пределах резонансной полуширины (к_half ≈ 0,55). Для конуса отстройка составляет примерно 1,7–2,0 полуширины. При сгущении сетки ближайшая частота PHB меняется с 63,62 до 64,37 кГц. Эти частоты лежат по разные стороны от 64 кГц, а несколько грубосеточных мод имеют наибольшее сходство с одной и той же модой подробной сетки. Для отслеженных мод конуса такого объединения в приведённом сопоставлении не выявлено.

В расчёте несвязанного тела PHB чувствительнее к отстройке и выбору моды около 64 кГц. Это один из возможных механизмов немонотонного изменения мощности и смены ранжирования в таблицах 7, 9 и 15. Проверка причинной роли механизма требует отслеживания мод в той же связанной трёхмерной модели, в которой определяется

мощность. Протокол (C) ниже задаёт сравнение по средней мощности на общей частотной сетке.

Условия последующих сравнений. Для каждой формы и сетки вместе с мощностью приводятся ближайшая собственная частота, отстройка δ и отношение κ_half. Предлагаются три протокола. (A) Каждое тело возбуждается на собственной отслеженной частоте, а мощность нормируется на ширину модовой линии. (B) На всех телах используется одна частота, отстоящая не менее чем на 1,5 полуширины от каждой собственной частоты в рассматриваемом диапазоне. (C) Показатель усредняется в полосе относительной шириной не менее 10% на общей частотной сетке. При смене ранжирования следует проверить знак разности f_d − f_n и устойчивость сопоставления мод.

Границы аудита. Собственные пары вычислены для свободного алюминиевого тела. Пьезоэлектрические сектора, связующий слой и нагрузочное сопротивление в задачу не включены и могут смещать частоты связанной системы. Интерполяция в 42 точки ограничивает интерпретацию абсолютных значений MAC. Две сетки выявляют характер изменения, а для проверки сходимости необходимо дальнейшее сгущение. Осесимметричный расчёт формулирует проверяемую гипотезу для трёхмерных результатов разделов 8.5–8.8.

9. Физическая интерпретация и альтернативные механизмы

Единая физическая цепь объясняет разные эксперименты. В основе исследования лежит одна причинная последовательность: аналитический профиль → область и нормали → масса и жёсткость упругого тела → частотные моды и их перекрытие с источником → деформации и перемещения у приёмной границы → механический контакт и при наличии керамики электрическая поляризация → механический либо электрический измеряемый выход. Декодер использует линейную независимость нескольких откликов; модовый селектор — внедиагональные элементы нормированной портовой матрицы; энергетический приёмник — сопряжение источника и приёмника вместе с импедансным согласованием. Это разные функционалы одной волновой физики, поэтому проценты из разных опытов нельзя объединять в универсальную «эффективность фокусировки».

Последовательное физическое объяснение должно учитывать одновременно частоты мод, коэффициенты возбуждения мод источником, перекрытие с приёмником, преобразование типов упругих волн на границах, потери и импеданс преобразователя. Схематически наблюдаемый отклик складывается из членов, пропорциональных произведению перекрытий с источником и приёмником, делённому на динамический модовый знаменатель. Это объясняет сильное локальное влияние формы, не предполагая нового универсального закона фокусировки.

Главные конкурирующие объяснения — смещение резонанса, изменение эффективного импеданса порта и передачи деформации через контакт. Для доказательства специального фокального механизма нужно до расчёта вывести наблюдаемую величину из точной фокальной геометрии и подтвердить предсказанное изменение при нарушении её фокального равенства. Представленные сравнения пока такого причинного доказательства не дают.

Геометрия изменяет собственные частоты, перекрытие источника с модами, передачу через контакт и деформации в приёмнике. Это различные факторы полного связанного передаточного оператора. Для обратной задачи важна различимость калиброванных столбцов H_G; для электрического выхода — также подведённая механическая мощность, функционал контакта, полный тензор пьезокерамики и нагрузочная цепь. Распределённый

осесимметричный приёмник и пространственная четырёхсекторная модель являются разными краевыми задачами. Их численные предпочтения не выделяют единственный механизм, а согласованная криволинейная P1/P2-серия пока не определяет, какая форма имеет больший континуальный электрический выход.

Это классическая векторная эластодинамика с геометрически зависимыми модами и импедансным согласованием, а не новая конститутивная теория. Геометрические фокусы гиперболы сами по себе не предсказывают энергетические фокусы конечноволновых P/SV-полей. Не получены сеточно-сошедшийся КПД P↔SV-преобразования, полная нормированная по мощности матрица всех каналов либо экспериментальная карта поля. В пьезоэлектрическом направлении установлены геометрическая зависимость численного отклика и согласованность дискретного оператора, но не положительное континуальное преимущество.

Монолитная форма пассивно изменяет отклик до регистрации электроникой и не является периодическим упругим метаматериалом. Но это не доказывает превосходства над оптимизированными обычными телами. Равные объёмы, одинаковая приложенная сила и номинальные электрические цепи — необходимые, но недостаточные условия честного сравнения: не совпадают модальные спектры, поступающая механическая мощность, потери контакта и ошибки дискретизации. В QA-модели на 64 кГц и сетке 4×6×16/P2 PHB получает 5482,830 нВт и отдаёт 1,800894 нВт электрической нагрузке, тогда как конус получает 2772,086 нВт и отдаёт 0,614699 нВт; электрические доли входной мощности составляют 0,032846% и 0,022175%. Это дискретные несошедшиеся выходы, а не КПД сертифицированных устройств.

Геометрическое масштабирование также требует осторожности. Для ненагруженного однородного упругого тела изменение всех длин в s раз и частоты в 1/s сохраняет безразмерный волновой параметр ωL/c. При наличии толщины пьезоматериала, ёмкости, сопротивления, податливости соединения и частотно-зависимых потерь эти величины также необходимо масштабировать согласованно. Поэтому результаты указывают на переносимость постановки, а не на доказанный перенос численного выигрыша между размерами, материалами или физическими средами.

Пространственная и частотная селективность упругого поля

Поле движения, локальный сигнал приёмника и мощность через поперечное сечение характеризуют разные стороны упругого отклика. Ниже эти величины сравниваются при заданных условиях возбуждения и наблюдения с использованием соответствующих каждой модели контрольных профилей и последовательностей сеток.

Пространственные признаки. Перед целевой проверкой полей на уточнённой сетке M были выбраны шесть характеристик поля. Пять из них сохраняют благоприятный знак на K, L и M. На той же стороне показатель покрытия SV-подобных траекторий у PHB составлял 0,133557, 0,140697 и 0,143637 на K, L и M соответственно. Для DP020 получены 0,131037, 0,134397 и 0,137337. Разность на M, равная 0,006300, в 2,14 раза превышала наибольшее изменение между L и M у двух профилей. Только это сравнение прошло эмпирический порог с двукратным запасом. Расчёт сохранённых показателей прослеживается, однако независимое воспроизведение всей цепочки получения исходных полей V46 остаётся неполным.

Таблица 18. Относительный перевес PHB в шести выбранных пространственных сравнениях.

Характеристика поля	Контроль	K (%)	L (%)	M (%)
Охват SV-подобных траекторий на противоположной стороне	DP020	+9,13	+4,22	+6,27
Охват SV-подобных траекторий на той же стороне	DP020	+1,92	+4,69	+4,59
Доля SV-подобного поля в экваториальном кольце	DM020	+1,60	+0,98	+0,70
Доля P-подобного поля вблизи фокальной координаты	DM020	+1,10	+0,85	+0,47
Нормированный обратный коэффициент участия P-подобного поля	DM020	+0,45	+0,50	+0,54
Охват P-подобных траекторий на противоположной стороне	DM020	+2,27	+0,43	−2,51

В отдельном сравнении при 22 кГц траекторные остатки на той же стороне у PHB были меньше, чем у DP020. На K и L снижение составило 5,7% и 11,0% для P-подобного показателя и 5,8% и 11,5% для SV-подобного. Остаток характеризует отклонение от заданной траектории, а охват — долю, удовлетворяющую принятому траекторному критерию. Обе величины описывают поле. Для оценки конверсии P→SV требуется разделение выходящих мод по мощности. Последующие проверки времени прихода и модовой принадлежности не подтвердили исследованные пары P/SV. В отдельной фазовой серии ни одно из 92 сравнений с двумя контролями не прошло строгий фазовый критерий.

Гармонический отклик. Для каждой пары сохранялись заданные направление нагрузки, материал и схема наблюдения. Результаты ранней трёхмерной модели приведены в таблице 15в. L2 — более подробная из двух сеток. Архивный процент относится к нормированному показателю отклика. Для трактовки его как калиброванного выигрыша по амплитуде необходимо восстановить исходный знаменатель и пространственное усреднение. При 16 кГц знак сохраняется, а величина выигрыша существенно меняется. При 12,275 кГц среднеквадратичное смещение на экваторе PHB при равномерной нагрузке верхнего диска составило $4{,}418\times10^{-9}$ м. Отношения к двум существенно отличающимся равнообъёмным контролям составили 55,1 и 44,8. Для близких профилей ±1% получены отношения 0,998 и 1,000.

Таблица 19. Архивные сравнения нормированного гармонического отклика на L1 и L2.

Частота и направление	Контрольный профиль	L1 (%)	L2 (%)
15 кГц, 0°	+2.5%	+16,96	+19,05
15 кГц, 0°	+5%	+31,53	+37,66
15 кГц, 17°	+5%	+31,82	+37,58
15 кГц, 63°	+5%	+32,18	+37,74

Частота и направление	Контрольный профиль	L1 (%)	L2 (%)
16 кГц, GA, 0°	−2.5%	+40,62	+18,10
16 кГц, GA, 0°	−5%	+93,14	+35,16

Мощность через экватор. В осесимметричном расчёте осесимметричного расчёта экваториального потока средняя направленная вниз механическая мощность интегрируется по всему экваториальному сечению с учётом потерь в комплексном напряжении и нормируется на входную мощность каждой модели. Объём, апертура и габариты тел совпадают. Кольцевая нагрузка прикладывается к верхнему диску, остальная внешняя граница свободна. На Q2 20×40 при 20 кГц перевес PHB над лучшим контролем равен 0,221%. Он сопоставим с расхождением независимой проверки энергетического баланса в нижнем объёме, достигавшим 0,275% среди проверенных случаев. При 75 и 175 кГц больший поток даёт контроль.

Таблица 20. Мощность вниз через экватор, нормированная на принятую мощность, на Q2 20×40.

Частота (кГц)	PHB	Контроль +2 мм	Контроль −2 мм	PHB к лучшему (%)
20	0,597827	0,596507	0,595691	+0,221
75	0,421959	0,435115	0,415690	−3,023
175	0,439960	0,404464	0,447351	−1,652

В сравнении сравнения локальных перемещений при 20 кГц использована другая, локальная величина — осевое смещение на экваторе, делённое на квадратный корень из входной мощности. Для двойного конуса, объём которого больше примерно на 13,8% и верхний диск шире, отношения откликов PHB к конусу на трёх сетках составляли 1,314–1,336 при осевом и 2,936–2,945 при радиальном возбуждении. В сравнении с равнообъёмными равноапертурными профилями на 72×144 разности для контролей +2 и −2 мм составили +8,62% и −7,25% при осевом и +13,70% и −8,67% при радиальном возбуждении. Таким образом, локальный отклик зависит от формы и выбранного контроля. В приложении A отдельно сопоставлен перенос энергии по временным окнам для внутренних поверхностей.

10. Дополнительные функции геометрического управления упругими волнами

Помимо восстановления силы и мощности на резисторе, аналитическое тело можно рассматривать как многопортовую упруговолновую систему. Здесь физический объект измерения — полная комплексная матрица передачи между нормированными входными и выходными направляемыми модами, а не геометрический рисунок лучей. Дифференцируемый элемент матрицы задаёт более строгий критерий, чем один максимум мощности: он предсказывает и знак, и величину отклика при заданном изменении a, b или R.

Предсказуемость производной по форме и превосходство самой формы необходимо разделять. Точная локальная производная полезна для проектирования и проверки даже тогда, когда близкая негиперболическая форма работает не хуже. Поэтому следующие три примера сопровождаются собственными определениями наблюдаемых величин и явными границами инженерных выводов.

Исследованные выше функции не исчерпывают проверяемые возможности аналитически заданного упругого тела. В данной главе рассматриваются три самостоятельных физических результата: (i) количественный прогноз изменений многомодового передаточного оператора, (ii) перераспределение мощности между выбранными распространяющимися гибридными модами и (iii) локализация неосесимметричной собственной моды в экваториальной области. Это различные механические постановки; их частоты, входные порты, метрики и контроли нельзя отождествлять с трёхмерным пьезоприёмником на 64 кГц или обратной задачей на 152 кГц.

Все численные свидетельства получены непосредственно из сохранённых конечно-элементных матриц Q2/Q3, собственных векторов и вынужденных решений. Четыре рисунка вставлены из исходных PNG-файлов выполненных расчётных скриптов без реконструкции полей, изменения графиков или иллюстративной стилизации. Экспериментальное изготовление и проверка устройства не заявляются.

Второй уровень новизны: предсказание эффекта проектного изменения. Зафиксировать различие откликов двух форм — описательный результат. Предсказать до нового полного решения знак и величину изменения выбранного комплексного модового отклика — более сильная проектная возможность. Поэтому проверка чувствительности девятимодового оператора представлена отдельно от пьезоэлектрического сравнения: здесь оценивается производная упругой передаточной функции, а не выработанная электрическая мощность. Потенциальная польза состоит в ограниченной оптимизации геометрии при меньшем числе полных расчётов; пока подтверждена лишь локальная предсказательная точность в конкретной модовой постановке.

10.1. Предсказуемая геометрическая чувствительность девятимодового оператора

Однородное осесимметричное алюминиевое тело задаётся точной гиперболической образующей $f(r)=a[1+((R-r)/b)^2]^{1/2}$. В модовом опыте a=10 мм, b=34 мм, R=100 мм, частота 153 кГц, модельный коэффициент потерь $\eta=0{,}012$. В физическом волноводном порте фиксированного радиуса учитываются девять распространяющихся гибридных мод. Для сравнения использованы равнообъёмные гладкие негиперболические профили DEF+ и DEF− с тем же определением порта. Матрица S представляет отклик, спроецированный на девять включённых мод; её нельзя отождествлять с полной двухпортовой матрицей P/SV с учётом всех распространяющихся и затухающих мод.

Для каждой геометрии гармоническая конечно-элементная система и динамическая матрица заданы уравнениями (74) и (75), где $q \in \{a,b\}$ — геометрический параметр. При фиксированных порте и источнике производная источника равна нулю (уравнение 77); производные состояния и спроецированной модовой матрицы следуют из уравнений (78) и (79). Это численная производная по форме в рамках классической линейной упругости, а не новое уравнение материала. Доля мощности выбранного канала и её первая вариация заданы уравнениями (80) и (81). Значение зависит от нормировки физического порта и не является электрической эффективностью преобразования.

$$D(q)U = F \tag{74}$$

$$D(q) = (1 - i\eta)K(q) - \omega^2 M(q) - Z_{port} \tag{75}$$

$$q \in \{a,b\} \tag{76}$$

$$F_q = 0 \tag{77}$$

$$U_q = -D^{-1}[(1 - i\eta)K_q - \omega^2 M_q]U \tag{78}$$

$$S_q = C_{out}\, U_q \tag{79}$$

$$P_{70} = 100|S_{07}|^2 \tag{80}$$

$$dP_{70}/dq = 200\mathrm{Re}[S_{07}^{*}(S_q)_{07}] \tag{81}$$

На сетке Q3 16×32 базовая PHB даёт P_{70}=14,5553%, два заданных негиперболических контроля — 13,7982% и 13,9790%. Следовательно, PHB лучше в данном выделенном канале и режиме, но это не доказывает превосходство над независимо оптимизированными формами или по другим модам. Вычисленные чувствительности составляют dP_{70}/da=−2,5986 процентного пункта/мм и dP_{70}/db=−0,6728 процентного пункта/мм. В отложенных проверках локальный линейный прогноз правильно предсказал знак изменения мощности в 44 из 44 случаев; с учётом более далёких изменений — в 63 из 80. Максимальная относительная ошибка полной спроецированной матрицы S по норме Фробениуса для локальных проверок составила 0,1054%, а для удалённых достигала 2,6291%. Эти значения подтверждают ограниченный диапазон применимости локального прогноза, но не глобальную экстраполяцию.

Показателен контроль, сохраняющий фокальное расстояние c, определённое уравнением (82), при согласованном изменении a и b. Производная выбранной доли передачи при этом ограничении задана уравнением (83). Сохранение геометрических фокусов, таким образом, не сохраняет модовую передачу. Толщина, кривизна и объём в этом семействе также меняются, поэтому различие нельзя приписать только одному фактору. Геометрические производные сохраняют некоторую сеточную зависимость, а полная континуальная сходимость градиента проектирования не установлена.

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2)} \tag{82}$$

$$(dP_{70}/da)|_c = P_a - (a/b)P_b \tag{83}$$

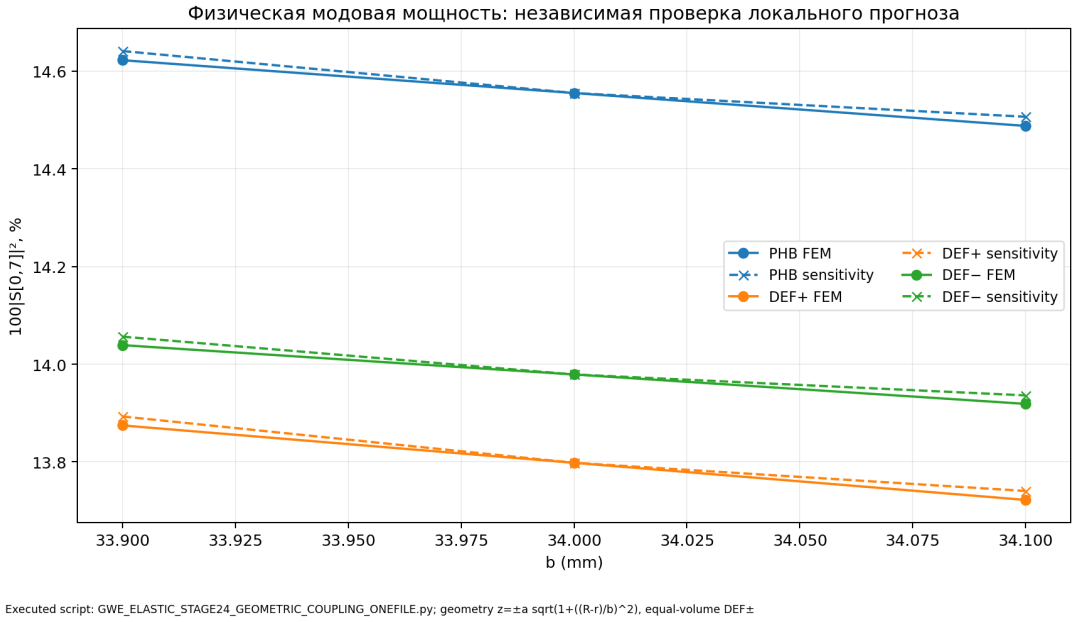

Рисунок 27. Локальный прогноз доли мощности модового канала и прямой FEM-пересчёт при изменении b. Точная PHB и два близких равнообъёмных контроля имеют общий девятимодовый порт при 153 кГц. Сплошные линии — выполненные FEM-расчёты; пунктир — линейный прогноз. Исходный расчётный рисунок сохранён без изменений.

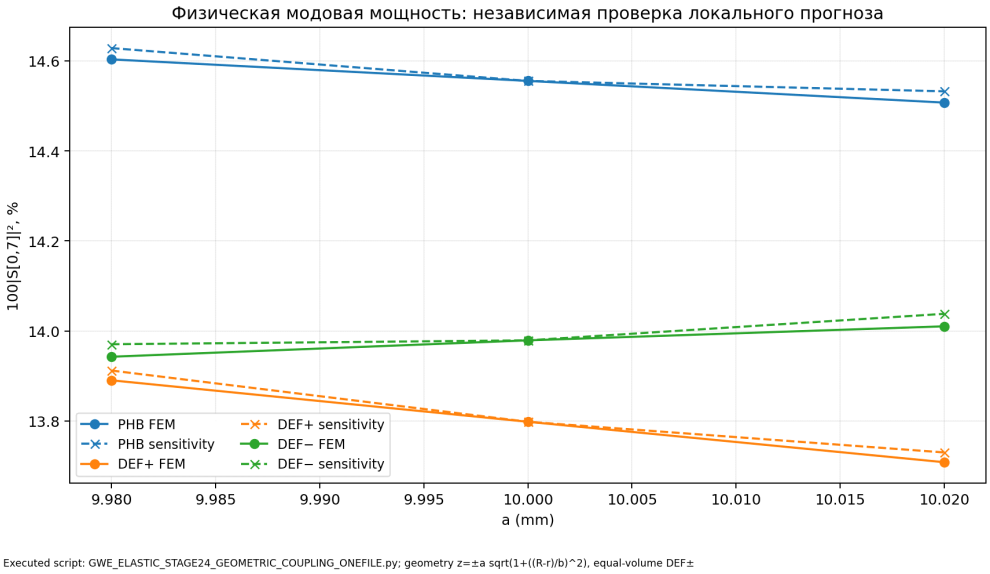

Рисунок 28. Тот же тест производной по форме при постоянном $c=\sqrt{(a^2+b^2)}$; одно фокальное расстояние не фиксирует межмодовую передачу. Исходный расчётный рисунок сохранён без изменений.

10.2. Избранный физический канал передачи между гибридными модами

Та же модель с физическим волноводным портом даёт интерпретируемый пример перераспределения мощности между модами. При 153 кГц входная гибридная мода 7 имеет долю выходной моды 0 около 14,55% в принятой нормировке входного модового порта для PHB на сетке Q3 16×32. Наблюдаемая величина — конкретный элемент матрицы S, а не коэффициент преобразования чистой объёмной P-волны в SV-волну или обратно. Направляемые гибридные моды содержат продольноподобные и сдвигоподобные компоненты; приписывать им чистую P- или SV-поляризацию без модового энергетического разложения неправильно.

Этот канал является исследовательским кандидатом для селективной межмодовой передачи и согласования источника с приёмником, но не доказательством универсального модового преобразователя PHB. Направление входа/выхода и все физические энергетические каналы определяются принятой нормировкой порта. Для следующего уровня доказательства требуются настоящая двухпортовая многомодовая постановка Дирихле—Неймана с необходимыми затухающими компонентами, одинаковые порты у контролей, континуальная сходимость и независимая оптимизация негиперболических поверхностей.

Четыре дополнительных гладких равнообъёмных контроля сохраняли высоту меридиана и две его первые производные в заданных сечениях. Для всех тел использовался один и тот же цилиндрический порт. При 153 кГц на сетке Q3 20×40 PHB отражала в моду 0 14,5561% входной мощности при возбуждении модой 7. Для лучшего из этих контролей получено 14,4079%. Перевес составил 0,1482 процентного пункта, или 1,03% относительно контроля. Положительный знак сохранялся на трёх более подробных сетках Q3, тогда как Q3 12×24 и Q2 24×48 давали противоположное ранжирование. В отдельной частотной проверке против двух исходных контролей DEF выигрыш составлял 0,397 процентного пункта при 152 кГц, а при 154 кГц разность была отрицательной. Приведённая мощность относится к отражению между гибридными направляемыми модами одного порта.

Таблица 21. Доля мощности отражённой моды при 153 кГц в сравнении с лучшим из четырёх гладких контролей.

Сетка Q3	PHB (%)	Лучший контроль (%)	Разность (п.п.)
12×24	14,2911	14,3501	−0,0590
16×32	14,5553	14,4138	+0,1415
20×40	14,5561	14,4079	+0,1482
24×48	14,5543	14,4172	+0,1371

10.3. Экваториально локализованная неосесимметричная собственная мода

Почему изображение собственной моды не доказывает устройство. Собственный вектор определён с точностью до произвольного множителя амплитуды. Поэтому карта нормированной кинетической энергии отвечает на вопрос «где сосредоточено это свободное колебание?», а не «какую мощность извлечёт реальный источник или датчик?». Полезный сигнал дополнительно зависит от симметрии источника, частоты, потерь, нагрузки приёмника и перекрытия возбуждения с собственной модой. Следующий расчёт вынужденного отклика проверяет именно этот второй шаг. Геометрически интересная локализация остаётся достойным научным результатом, даже если выбранный датчик не превзошёл контрольные тела.

В отдельной собственной задаче для того же монолитного алюминиевого PHB с внешним цилиндрическим экваториальным поясом (a=10 мм, b=34 мм, R=100 мм) решалось трёхкомпонентное уравнение колебаний для азимутального порядка m=2. Собственная мода обнаружена около 79,97596 кГц. Область пояса, заданная заранее, определена уравнением (84). Доли кинетической энергии моды и объёма тела, а также коэффициент локализации приведены в уравнениях (85)–(88); они характеризуют относительную локализацию моды, а не энергию, извлечённую внешним приёмником, и не добротность Q.

$$B = \{(r,z):\ r \geq 0.8R,\ |z| \leq a\} \tag{84}$$

$$E_m(B)/E_m(\Omega) = 0.48505 \tag{85}$$

$$V(B)/V(\Omega) = 0.25756 \tag{86}$$

$$\Lambda_m = [E_m(B)/E_m(\Omega)]/[V(B)/V(\Omega)] \tag{87}$$

$$\Lambda_m = 1.8833 \tag{88}$$

Среди четырёх заданных гладких равнообъёмных контролей с деформациями ±0,5 мм максимальная локализация на сетке Q3 равна 1,8282, что даёт преимущество PHB 3,015% в пределах этой ограниченной выборки. Проверка Q2 сохраняет такое же ранжирование. Однако более близкие гладкие негиперболические вариации достигают сравнимых и иногда немного более высоких значений, причём малые различия не разрешены надёжно в континуальном пределе. Поэтому не установлен ни сингулярный максимум точной гиперболы, ни исключительный фокальный механизм локализации.

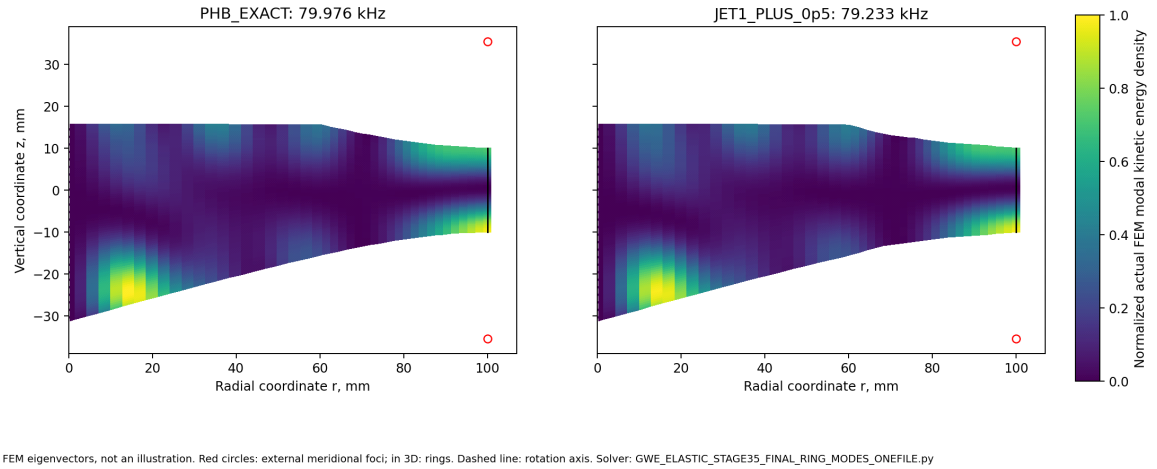

Рисунок 29. Исходные карты кинетической энергии собственного FEM-вектора m=2 для точной PHB (79,976 кГц) и близкого негиперболического тела (79,233 кГц). В исходном расчётном изображении указаны меридиональное поле, внешние геометрические фокусы и ось вращения. Цветовая шкала — нормированная энергия собственной моды, а не мощность реального датчика. Исходный расчётный рисунок сохранён без изменений.

10.4. Реальное возбуждение: собственная локализация ещё не означает полезный приёмник

Для проверки практической значимости собственную моду m=2 возбуждалась через верхний диск профилем нагрузки, заданным уравнением (89). Строго осесимметричный источник m=0 не может возбудить m=2 в линейном теле вращения, поэтому необходимо согласовать азимутальную гармонику. Оператор гармонического отклика задан уравнением (90), а внешний экваториальный приёмник расположен согласно уравнению (91). Приёмник не извлекал энергию и не являлся пьезоэлектрическим преобразователем, соединённым с телом клеевым слоем.

$$g(r,\varphi) \propto (r/r_cut)^2\cos(2\varphi) \tag{89}$$

$$[(1 + i\eta)K - \omega^2 M]u = F \tag{90}$$

$$(r_rec,z_rec) = (R,0) \tag{91}$$

При η=0,012 на сетке Q3 14×28 максимальная по проверенным частотам скорость при заданной силе равна $3{,}36843\times10^{-5}$ м·с$^{-1}$·Н$^{-1}$ для PHB против $3{,}37445\times10^{-5}$ м·с$^{-1}$·Н$^{-1}$ у лучшего негиперболического контроля. Следовательно, обнаруженная локализация собственной моды не дала полезного преимущества вынужденного приёмного сигнала. Этот вывод относится к проверенному источнику, потерям и набору частот: ни повышенный отбор мощности, ни преимущество практически реализованного кольцевого резонатора не доказаны. При η=0,003 максимальный контрольный сигнал ещё заметнее превышал PHB.

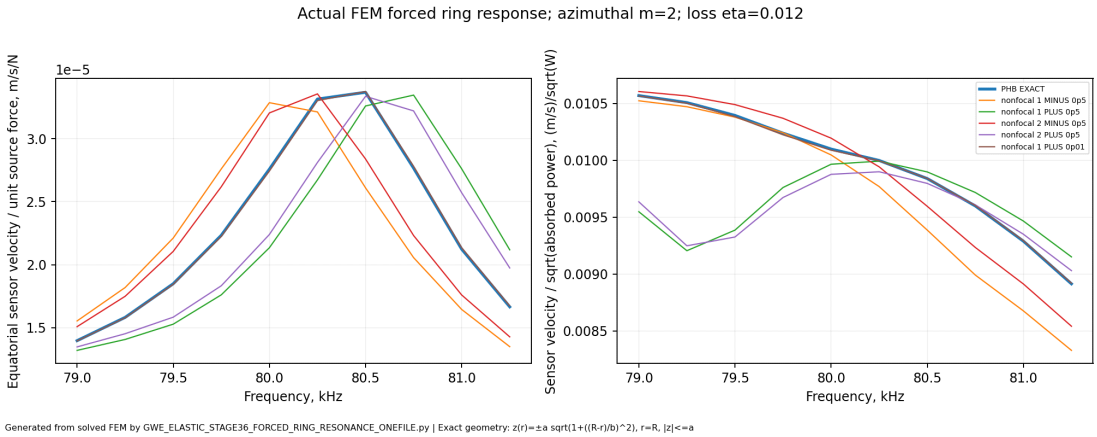

Рисунок 30. Исходные выполненные FEM-зависимости вынужденного отклика при нормальном возбуждении m=2 и η=0,012. Слева — скорость экваториального датчика на единицу силы, справа — скорость, нормированная на корень поглощённой механической мощности. Сравнены точная PHB и гладкие негиперболические контроли. Исходный расчётный рисунок сохранён без изменений.

10.5. Технический смысл и границы доказательства

Наиболее сильное дополнительное инженерное направление — геометрически параметризованная многомодовая упругая передаточная сеть с явно вычисляемым и проверяемым локальным откликом. Потенциальные конструкции: настраиваемые механические волновые фильтры, модово-селективные соединительные элементы и калибруемые преобразователи сигнала. Локализованная собственная мода представляет отдельную тему резонансных датчиков, однако отсутствие преимущества при вынужденном возбуждении показывает необходимость различать собственную локализацию, эффективность возбуждения, связь с датчиком и реально отбираемую мощность.

Другие исследованные функции — определение азимута источника, когерентная маршрутизация девяти мод, торсионная изоляция, поляризационная селекция и локальное P/SV-отражение — дают полезные диагностические модели, но не показывают устойчивого преимущества точной PHB при испытанных согласованных контролях. Направляемые поверхностные волны типа Рэлея/Лява и полноценный физический P/SV-преобразователь также не подтверждены. Результаты обосновывают узкие дальнейшие тесты, но не универсальный фокальный закон и не снимают проблему сходимости трёхмерного пьезоэлектрического FEM. Для чистого осесимметричного кручения (m=0, только u_θ) отдельное преимущество PHB не доказано. В изотропном теле уравнение движения и условие свободной поверхности приведены раздельно в уравнениях (92) и (93); для вывода о передаче крутильной энергии необходимы собственный приложенный крутящий момент, модовое разложение и аудит потока мощности.

$$\rho\partial^2_tu_\theta = \mu(\partial^2_ru_\theta + r^{-1}\partial_ru_\theta + \partial^2_zu_\theta - r^{-2}u_\theta) \quad (92)$$

$$\mu[n_r(\partial_ru_\theta - u_\theta/r) + n_z\partial_zu_\theta] = 0 \quad (93)$$

Таблица 22. Дополнительные функции геометрического управления упругими волнами и границы их расчётного обоснования.

Функция	Численное свидетельство	Научная интерпретация
Чувствительность девятимодового	44/44 верных локальных знака; макс. ошибка матрицы	Локальный прогноз дискретного оператора; производная не сошлась

оператора	0,1054%	полностью
Выбранный направляемый модовый канал	P_{70}≈14,55% при 153 кГц	Связь гибридных мод, не КПД чистого P↔SV-преобразования
Экваториальная собственная мода m=2	48,505% кинетической энергии в 25,756% объёма	Реальная локализованная мода; оптимальность точной РНВ не доказана
Вынужденный экваториальный приём	РНВ $3{,}36843\times10^{-5}$ против контроля $3{,}37445\times10^{-5}$ $м\cdot с^{-1}\cdot Н^{-1}$	При проверенном возбуждении полезного преимущества нет
Гармонический отклик	15 кГц: +37,58–37,74% к профилю +5% на L2	Архивный показатель отклика. Требуется восстановить исходную нормировку.
Пространственный признак поля	V48: +4,59% по охвату SV-подобных траекторий на той же стороне	Один показатель проходит эмпирическую проверку по изменению между сетками.
Мощность через экватор	20 кГц: +0,221% к лучшему контролю	Разность сопоставима с расхождением проверки энергетического баланса.

11. Энергетически нормированное двухпортовое рассеяние упругих волн и управление неосесимметричными модами в псевдогиперболоидальных телах

11.1. Научный вопрос и физическая роль геометрии

Может ли монолитное тело с аналитически заданной границей служить пассивным, геометрически программируемым преобразователем направляемых упругих мод? В предлагаемом подходе Геометрической волновой инженерии (ГВИ) граница является управляемой проектной переменной, тогда как определяющие свойства материала остаются неизменными. В данной главе поставлена двухпортовая задача: какая доля поступившей механической мощности при заданной входной моде проходит в каждую выходную моду, отражается к источнику либо рассеивается в материале?

В отличие от локальных максимумов перемещения, эти величины имеют однозначный смысл для портов и допускают прямое сравнение устройств с одинаковыми портами. Мы различаем три уровня утверждений: (i) существование геометрически зависимой межмодовой передачи; (ii) количественную настройку внутри точного псевдогиперболоидального семейства; (iii) превосходство над независимо изменяемыми негиперболическими контролями. Расчётные материалы поддерживают первые два утверждения в проверенных условиях, но не доказывают третье как общее правило.

11.2. Точная геометрия РНВ, допустимые контроли и условия сравнения

Модель представляет собой монолитное изотропное алюминиевое тело вращения с двумя одинаковыми цилиндрическими портами радиуса a. Меридиональная граница образована двумя отражёнными гиперболическими ветвями; z=0 является экваториальным стыком. На каждой гладкой ветви при $z \neq 0$ и $-R \le z \le R$ профиль радиуса задаётся формулой

$$r_0(z;\, a,b,R) = a\,\sqrt{[1 + ((R - |z|)/b)^2]} \qquad (94)$$

где a задаёт радиус порта, b управляет меридиональной кривизной, а R — половину осевой длины. Точный аналитический объём равен

$$V(a,b,R) = \pi \int_{-R}^{R} r_0(z)^2 \, dz = 2\pi a^2 [R + R^3/(3b^2)]. \quad (95)$$

Для гладкого участка поверхности вращения гауссова кривизна определяется локальным профилем:

$$K(z) = -r_0''(z) / \{r_0(z)[1+r_0'(z)^2]^2\} < 0, \quad z \neq 0. \quad (96)$$

Экваториальный стык является кусочно-гладким, а не глобально дифференцируемым продолжением; поэтому ему нельзя приписывать единственное классическое точечное значение кривизны при z=0. Это различие не позволяет распространять локальное аналитическое свойство ветвей на утверждение о глобальной гладкости.

В численных сравнениях использованы a=10 мм, b=34, 35 или 37 мм; значение R пересчитывается из строгого равенства объёмов по формуле (95). Радиусы портов, константы материала, нормировка механического источника и определения выходных мод фиксированы. Негиперболические контроли строятся добавлением заданной гладкой поправки к $r_0(z)$ и компенсирующей поправки для сохранения точного объёма. Коэффициент профиля ε=±0,48 мм не равен максимальному фактическому радиальному смещению поверхности.

Модель алюминия использует E=69 ГПа, ν=0,33 и ρ=2700 кг/м³. Частотный отклик вычисляется в рамках линейной упругости с заданным безразмерным параметром потерь η. При сравнении точных представителей семейства PHB аналитический гиперболический закон не меняется.

11.3. Полная векторная эластодинамика в азимутальных фурье-секторах

Вектор перемещения содержит радиальную, азимутальную и осевую компоненты. Для осесимметричной границы и осесимметричного изотропного материала естественно разложение поля по независимым целочисленным азимутальным секторам:

$$u(r,\theta,z,t) = [u_r(r,z), u\theta(r,z), uz(r,z)]^T \exp(i\, m\, \theta - i\, \omega\, t). \quad (97)$$

Трёхмерное уравнение баланса и определяющий закон в частотной области имеют вид

$$\nabla \cdot \sigma + \rho\, \omega^2\, u = 0, \quad (98)$$

$$\sigma = \lambda\, (\mathrm{tr}\, \varepsilon)\, I + 2\mu\, \varepsilon \quad (99)$$

$$\varepsilon = [\nabla u + (\nabla u)^T]/2 \quad (100)$$

Фурье-редукция сохраняет члены, связывающие азимутальное и меридиональное движение. В обозначениях технических сдвиговых деформаций характерные компоненты равны

$$\varepsilon rr = \partial_r u_r \quad (101)$$

$$\varepsilon\theta\theta = (u_r + i\, m\, u\theta)/r \quad (102)$$

$$\varepsilon zz = \partial zuz \quad (103)$$

$$\gamma r\theta = \partial_r u\theta - u\theta/r + i\, m\, u_r/r \quad (104)$$

$$\gamma\theta z = \partial zu\theta + i\, m\, uz/r \quad (105)$$

$$\gamma rz = \partial zu_r + \partial_r uz \quad (106)$$

Эти члены принципиальны: при m=0 существует осесимметричная меридиональная система P/SV-подобных состояний (с отдельным крутильным сектором), а при m≠0 связаны все три компоненты перемещения. Ненулевая uθ подтверждает азимутальное движение, но сама по себе не определяет коэффициент преобразования в чистую

объёмную SH-волну. В идеальном осесимметричном теле целочисленный индекс m сохраняется: оператор рассеяния не перемешивает разные m-сектора.

Двухпортовые расчёты используют временную конвенцию $\exp(-i\omega t)$, как и FEM-реализация; в предшествующих гармонических моделях использована конвенция $\exp(+i\omega t)$. В этой главе FEM-модель учитывает потери умножением матрицы упругой жёсткости на $(1 - i\eta)$, где $\eta = 0$ соответствует случаю без потерь. Приведённые ниже определения скорости и потока мощности согласованы с двухпортовой конвенцией. Условия регулярности на оси вращения зависят от m; в частности, при $m \geq 2$ исключается нефизическая остаточная векторная степень свободы на оси. Для проверки дискретного оператора выполнены аналитические полиномиальные тесты энергии деформации при m=2–4.

11.4. Механическая мощность, модовые DtN-порты и матрица рассеяния

Двухпортовая задача определяется посредством прямых однородных цилиндрических продолжений. Для заданной частоты дискретная собственная задача порта формирует распространяющиеся и затухающие ветви; обе группы включаются в дискретный граничный оператор Дирихле–Неймана (DtN). Затухающие компоненты необходимы для описания ближнего поля у портов, хотя не переносят результирующую асимптотическую мощность [7–10].

Для поперечного сечения Γ с внешней нормалью n средний за период механический поток мощности равен

$$P_\Gamma = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_\Gamma (\sigma\, n)\cdot v^*\, d\Gamma \tag{107}$$

$$v = -i\omega u \tag{108}$$

Каждая входящая и исходящая распространяющаяся направляемая мода нормируется по модулю потока механической мощности, а не по пику перемещения. Если a обозначает вектор входных, a b — выходных энергетически нормированных амплитуд, то конечномерная матрица рассеяния имеет вид

$$b = S_m(\omega)\, a \tag{109}$$

Если на каждом из двух одинаковых портов имеется N распространяющихся мод, размерность S_m равна $2N \times 2N$. При единичной входной мощности моды i левого порта доля мощности в моде j правого порта равна

$$T_{i\to j} = |S_m[N+j,\, i]|^2 \tag{110}$$

$$R_i = \Sigma_{j=0}^{N-1} |S_m[j,i]|^2 \tag{111}$$

Оставшаяся часть входной мощности определяется как поглощение в этом столбце матрицы:

$$A_i = 1 - R_i - \Sigma_{j=0}^{N-1} T_{i\to j} \tag{112}$$

Для идеальной упругой системы без потерь при правильной нормировке и взаимности ожидаются $S^\dagger S \approx I$ и, после согласования фаз встречных портовых мод, $S \approx S^T$. При потерях следует проверять пассивность $S^\dagger S \preceq I$; требование строгой унитарности ошибочно исключило бы физическое поглощение. Эталонный прямой цилиндр использован для проверки практически безотражательной передачи той же моды.

11.5. Осесимметричный сектор m=0: преобразование гибридных меридиональных мод

В диапазоне около 220–230 кГц на каждом порте разрешены три распространяющиеся осесимметричные направляемые моды; полная комплексная матрица имеет размер 6×6. При 230 кГц на сетке Q3 48×14 около 37,865% мощности входной моды 0 передаётся в выходную моду 1, а около 10,897% — в моду 2. В прямом однородном цилиндре недиагональная передача практически отсутствует. Это свидетельствует о геометрически обусловленном перераспределении мощности между разными гибридными направляемыми состояниями.

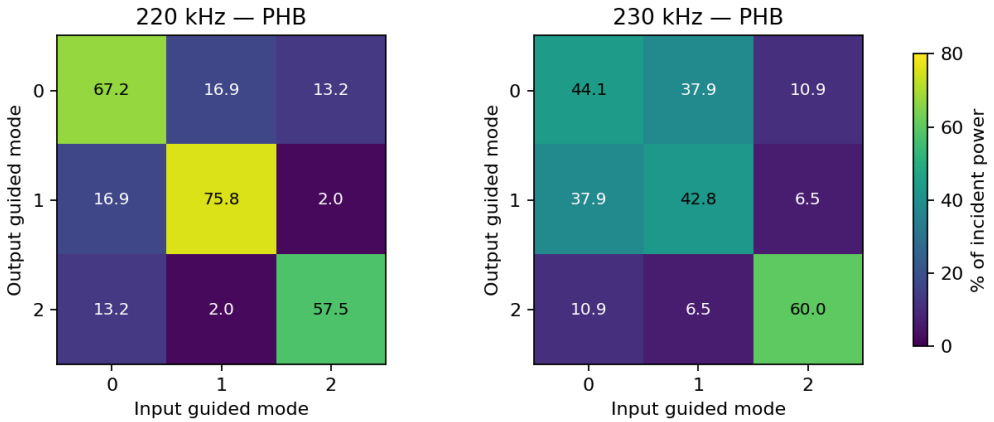

Рисунок 31. Исходные FEM-матрицы модовой мощности при m=0, 220 и 230 кГц. Оригинальный рисунок выполненного FEM-скрипта; происхождение указано в приложении B.

Отдельный частотный проход по 41 точке позволяет интегрировать долю мощности канала 0→1 в полосе 220–230 кГц на фиксированной сетке Q3 48×14. Для точной PHB с b=34 мм средняя полезная передача составляет 24,6699%, отражение — 2,0405%. Для гладкого равнообъёмного контроля с коэффициентом +0,48 мм соответствующие значения равны 24,4961% и 1,5801%. Таким образом, точная PHB немного выигрывает по целевой передаче, но гладкий контроль меньше отражает и имеет лучший выбранный совокупный показатель.

Таблица 23. Интегрирование по 41 частоте, 220–230 кГц, Q3 48×14, без объёмных потерь. Контроль не является второй точной PHB. Различие J на 0,128 процентного пункта не доказывает глобальную оптимальность.

Геометрия | 41 частота	$T_{0\to1}$, %	Отражение, %	J, п.п.
Точная PHB, b=34 мм	24,6699	2,0405	4,3070
Гладкий равнообъёмный контроль, ε=+0,48 мм	24,4961	1,5801	4,4350

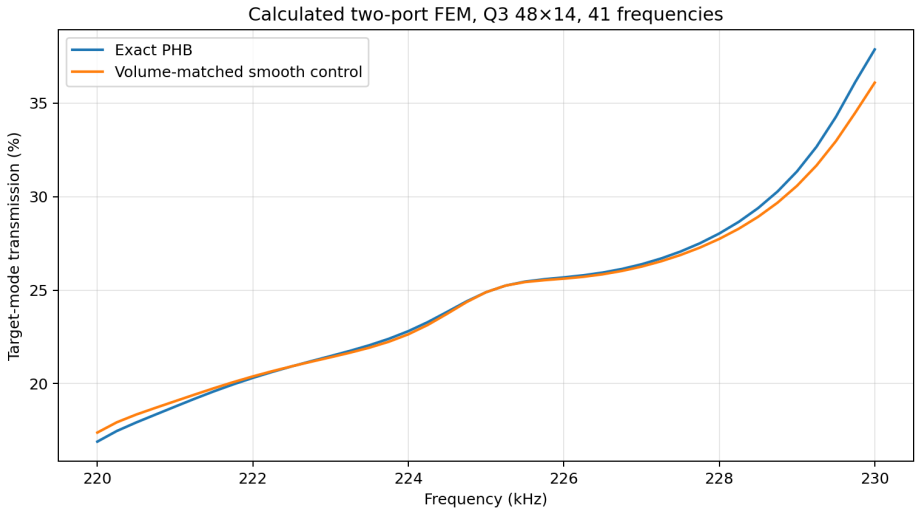

Рисунок 32. Исходный 41-точечный FEM-частотный проход целевой передачи 0→1 для выбранных геометрий m=0. Оригинальный рисунок выполненного FEM-скрипта; происхождение указано в приложении B.

11.6. Сектор m=1: трёхкомпонентные направляемые волны и геометрически зависящее отражение

Расчёт m=1 включает полное связанное поле (u_r,uθ,uz). При 150–160 кГц выделены три распространяющиеся ветви на портовых сетках, выбранных так, чтобы избежать фазового наложения. Азимутальная составляющая смещения этих мод значительна, поэтому чисто меридиональная модель не может заменить данную постановку. Табличные значения — средние по двум отдельным частотам, а не интеграл по непрерывной полосе.

Таблица 24. Средние по решениям при 150 и 160 кГц. Изменение b сопровождается пересчётом R для сохранения аналитического объёма. Сравниваются два представителя точного семейства PHB.

Точная PHB | m=1, Q3 32×8	**$T_{0\to1}$, %**	**Отражение, %**	**Поглощение, %**
b=34 мм, η=0	43,3891	7,7480	0
b=37 мм, η=0	46,5353	3,9231	0
b=34 мм, η=0,005	28,5284	4,5875	34,2139
b=37 мм, η=0,005	30,4091	2,3158	33,6277

При изменении b от 34 до 37 мм полезная передача возрастает на 3,1462 процентного пункта без потерь, а отражение уменьшается на 3,8249 пункта. Аналогичная направленность сохраняется при η=0,005. При этом близкие гладкие контроли имеют сопоставимые, а иногда немного лучшие характеристики. Следовательно, результат подтверждает управляемость проектного параметра точного семейства, но не исключительную оптимальность гиперболического профиля.

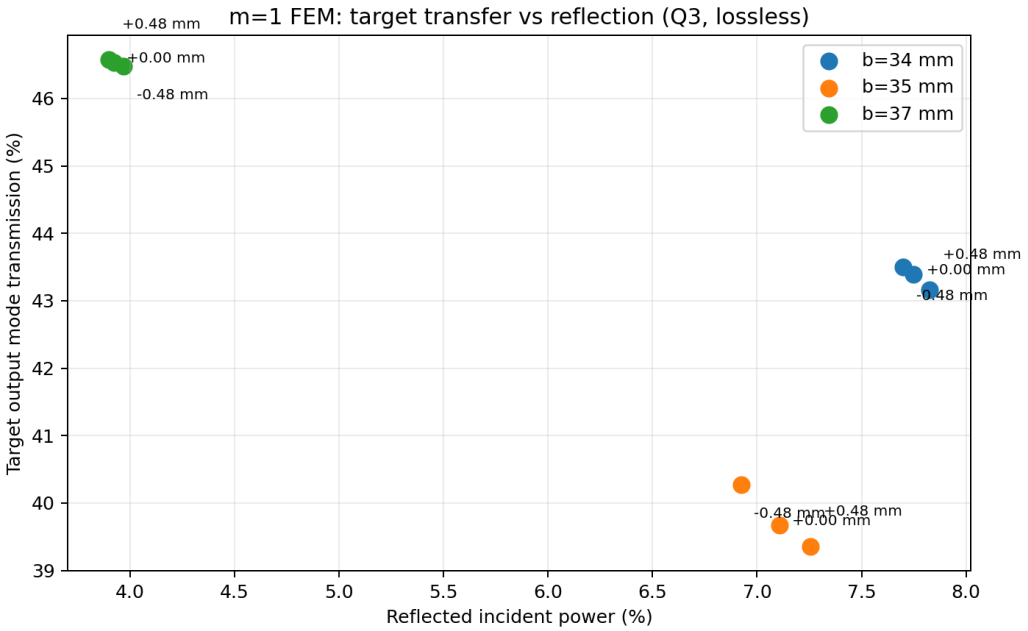

Рисунок 33. Исходный рассчитанный Q3-компромисс «целевая модовая передача — отражение» для представителей точного PHB-семейства и гладких поправок, m=1. Оригинальный рисунок выполненного FEM-скрипта; происхождение указано в приложении B.

11.7. Старшие неосесимметричные сектора m=2 и m=3

Для старших секторов меняются условия регулярности на оси и пороги распространения в портах. В выбранных постановках выявлено по две распространяющиеся моды на порт: для m=2 при 180 и 200 кГц, для m=3 при 220 и 230 кГц. Для исследования геометрической настройки и сравнения с равнообъёмными гладкими профилями выполнено дополнительное сгущение до Q3 48×12. Приведённые значения являются арифметическими средними по двум частотам в каждом секторе.

Таблица 25. Исходные расчёты Q3 48×12 без потерь. Коэффициент поправки контрольного профиля не равен максимальному радиальному смещению. J — выбранный инженерный критерий из формулы (113).

Сектор и геометрия | η=0	$T_{0\to1}$, %	Отражение, %	J, п.п.
m=2, точная PHB b=34	24,3065	27,8238	−15,4846
m=2, точная PHB b=35	38,8145	6,1095	18,9360
m=2, гладкий контроль b=35, ε=+0,48	38,0910	4,1161	19,5267
m=3, точная PHB b=34	29,3425	26,1604	−7,9422
m=3, точная PHB b=35	31,4974	15,7097	2,5894
m=3, гладкий контроль b=35, ε=+0,48	32,0495	11,9932	6,0669

Для m=2 изменение точной PHB b=34→35 мм повышает среднюю целевую передачу на 14,5080 процентного пункта и уменьшает отражение на 21,7143 пункта. Для m=3

соответствующие изменения составляют +2,1549 и −10,4507 пункта. Это выраженная внутрисемейная численная чувствительность с непосредственным физическим смыслом двухпортовой передачи. Вместе с тем гладкий контроль способен ещё больше снизить отражение: при m=2, b=35 мм поправка +0,48 мм даёт 4,1161% против 6,1095% у точной PHB; в m=3 тот же контроль повышает и целевую передачу.

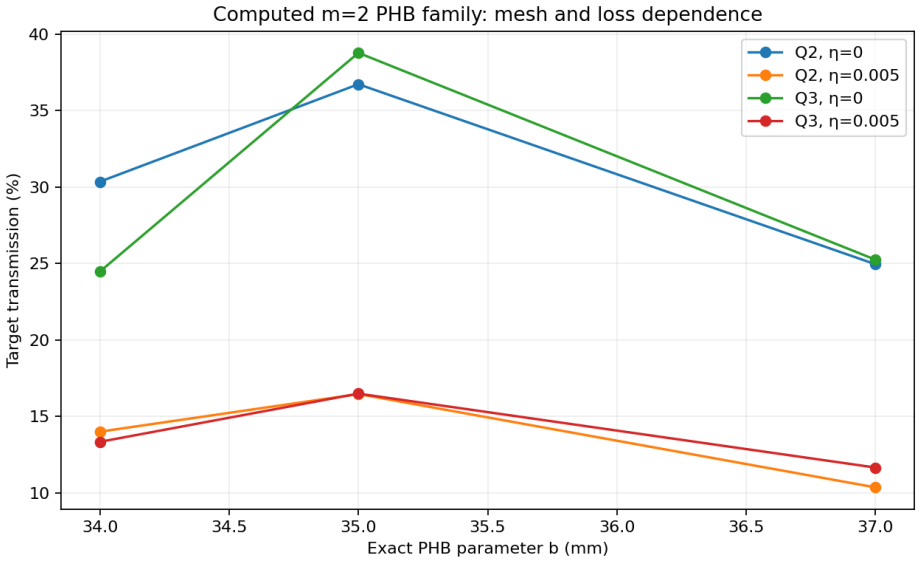

Рисунок 34. Исходный FEM-отклик точного семейства PHB в секторе m=2 при изменении b и потерь. Оригинальный рисунок выполненного FEM-скрипта; происхождение указано в приложении B.

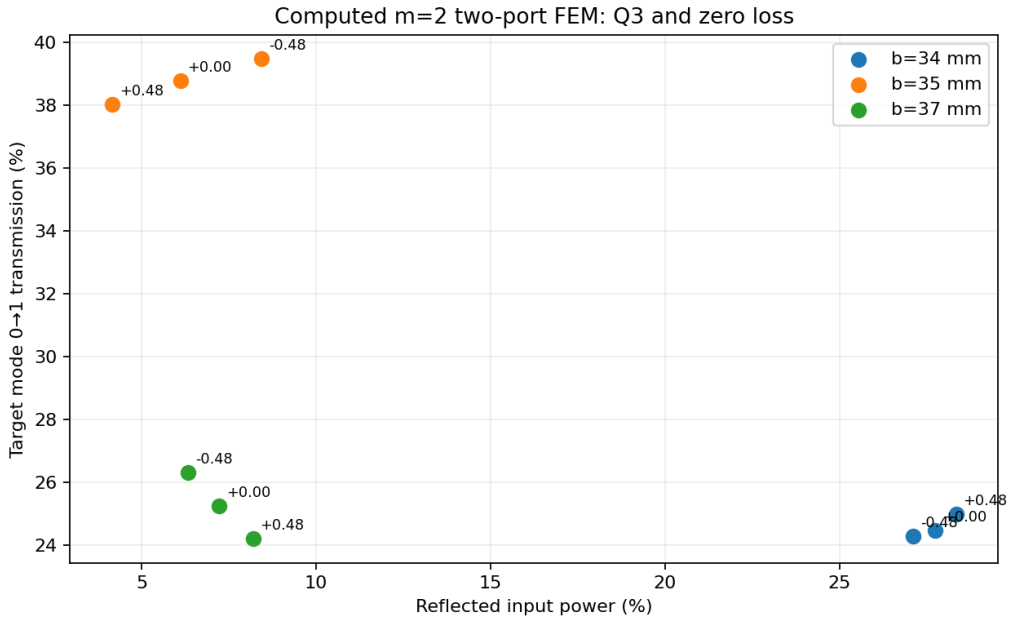

Рисунок 35. Исходное Q3-сравнение передачи и отражения для точной PHB и равнообъёмных гладких контролей при m=2; GWE_PHB_M234_COMPLETE_ONEFILE.py (FEM_M2_PARETO_Q3.png). Оригинальный рисунок выполненного FEM-скрипта; происхождение указано в приложении B.

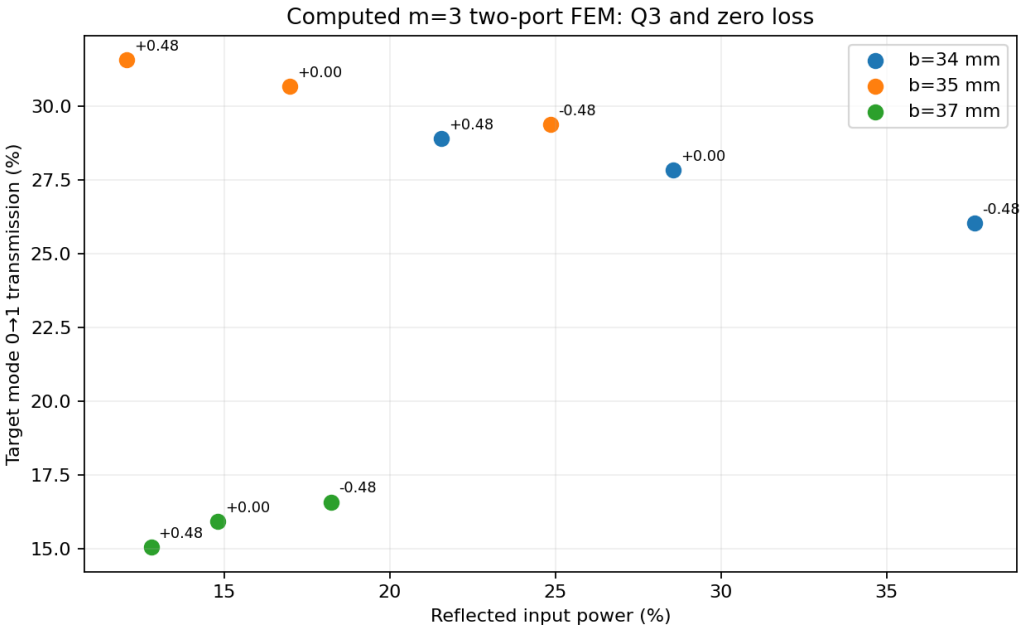

Рисунок 36. Исходное Q3-сравнение передачи и отражения для точной PHB и равнообъёмных гладких контролей при m=3; GWE_PHB_M234_COMPLETE_ONEFILE.py (FEM_M3_PARETO_Q3.png). Оригинальный рисунок выполненного FEM-скрипта; происхождение указано в приложении B.

11.8. Материальные потери, многокритериальная оценка и смысл границы Парето

Преобразователь нельзя оценивать только по одному межмодовому коэффициенту: он может увеличиваться вместе с нежелательным отражением, паразитными каналами или поглощением. Для явного учёта компромисса применён заранее заданный взвешенный инженерный показатель. В обозначениях долей, а не процентов, для старших секторов он равен

$$J = T_{0\to1} - R_{tot} - 0.25\,T_{par} - 0.50\,A \qquad (113)$$

В бездиссипативной оптимизации m=0 поглощение равно нулю, и применённый критерий сводится к $J=T_{0\to1}-R_{tot}-0{,}25T_{par}$. Веса являются проектными предпочтениями, а не физическими константами: при их изменении оптимальной может оказаться другая форма. Недоминация по Парето означает лишь, что среди обследованных конкурентов не найден вариант, одновременно не худший по всем выбранным показателям и строго лучший хотя бы по одному. Это не доказательство глобальной оптимальности.

При η=0,005 появляется ненулевая поглощённая доля мощности. Для m=2 точная PHB b=34 мм даёт целевую передачу 13,2981%, отражение 5,4407%, поглощение 49,5008%; точная PHB b=35 мм — 16,4657%, 2,6075%, 49,3587%; гладкий контроль b=35 мм, ε=+0,48 мм — 16,5052%, 2,2745%, 49,1535%. Для m=3 точная PHB b=35 мм даёт 11,7336%, 3,7395%, 58,4373%; соответствующий гладкий контроль — 11,8898%, 3,4817%, 57,6349%.

Таким образом, потери изменяют и полезную передачу, и энергетический баланс рассеяния, не меняя математического смысла S-матрицы. Оптимизация при одном коэффициенте потерь не гарантирует оптимальность при другом; кроме того, проверенный параметр η — характеристика модели, а не измеренный сертификат конкретного алюминиевого образца.

11.9. Иерархия верификации, отсечки мод и численные ограничения

Численный протокол включает эталонный прямой цилиндр, равные радиусы портов, контроль объёма, проверки Q2/Q3, полиномиальные тесты энергии деформации, аудит комплексных S-матриц, взаимность и пассивность. Для старших секторов повторный пересчёт мощностных долей из сохранённых комплексных элементов S совпал с исходными таблицами с точностью $4{,}44\times10^{-16}$. Наибольшие сообщённые отклонения в этой подвыборке: $4{,}44\times10^{-15}$ для аналитического объёма, $9{,}10\times10^{-15}$ для полиномиальных тестов, $5{,}98\times10^{-6}$ для нормы неунитарности без потерь и $1{,}62\times10^{-6}$ для указанной проверки взаимности. Эти малые алгебраические невязки подтверждают согласованность дискретной задачи, но сами по себе не оценивают ошибку непрерывной задачи.

Таблица 26. Число распространяющихся мод относится к выбранным частотным областям, материалу и осесимметричной геометрии. Утверждений обо всех частотах и локализованных состояниях закрытых тел не делается.

Проверка / область	Результат	Физический смысл
Порты m=0	3 моды на порт; S размером 6×6	Преобразование гибридных меридиональных мод
Порты m=1	3 моды на порт; 3 компоненты u	Неосесимметричная направляемая передача
Порты m=2 и m=3	2 моды на порт; выбранные частоты	S размером 4×4 в каждом секторе
Проверка отсечек m=4,5,6	102 портовых спектральных расчёта; 150–230 кГц	На выбранных точках ветви не обнаружены
m=2, точная b=35, Q3-сгущение	T изменяется ~0,08% (η=0), ~0,16% (η=0,005)	Хорошая локальная устойчивость этого показателя
m=3, точная b=35, Q3-сгущение	T изменяется ~2,64% (η=0), ~1,59% (η=0,005)	Более высокая остаточная чувствительность

Сканирование портового спектра на 17 частотах от 150 до 230 кГц, выполненное на двух порядках аппроксимации, не выявило распространяющихся ветвей в секторах m=4,5,6 исследованной конфигурации. Из этого нельзя выводить невозможность распространения при более высоких частотах или отсутствие локализованных собственных колебаний. Аналогично сохранение m в осесимметричном теле означает, что преобразование между разными m-секторами в идеальной модели не показано.

Даже повышенный порядок аппроксимации оставляет заметную сеточную чувствительность ряда характеристик. Для m=2, b=35 мм изменение целевой передачи от Q3 32×8 до Q3 48×12 составляет примерно 0,08% без потерь и 0,16% при η=0,005. Для m=3 соответствующие изменения равны примерно 2,64% и 1,59%. Следовательно, заключение о сходимости должно относиться к конкретной измеряемой величине, а не ко всем элементам матрицы одновременно.

11.10. Физическая интерпретация и технологические перспективы

Изменение точных параметров РНВ меняет пространственное сечение, распределение энергии деформации и связь между допустимыми входными и выходными направляемыми модами. Это создаёт недиагональные элементы S и меняет отражение при неизменных упругом материале и радиусах портов. В исследуемых осесимметричных

геометриях разные фурье-сектора остаются динамически независимыми, но внутри каждого сектора направляемые состояния включают векторные комбинации продольных, сдвиговых и при m≠0 азимутальных движений.

Результаты позволяют предложить класс пассивных геометрически программируемых упругих элементов: селекторов мод, согласующих участков с управляемым отражением, механических устройств обработки сигналов в узкой либо широкой полосе. На данном этапе это расчётно определённые инженерные кандидаты: они не устанавливают экспериментальную эффективность, технологические допуски, связь с реальными преобразователями или превосходство над глобально оптимизированным негиперболическим устройством. Важно, что в нескольких критериях гладкий равнообъёмный контроль немного превосходит точную РНВ. Вклад работы состоит в количественно проверяемой проектной функции аналитического семейства, а не в утверждении уникального фокального закона полной векторной упругости.

11.11. Выводы и значение для программы ГВИ

Двухпортовые расчёты в выбранных моделях устанавливают, что (1) точная РНВ обеспечивает существенную энергетически нормированную передачу между направляемыми упругими модами; (2) изменение b с соответствующим пересчётом R при постоянном объёме изменяет полезную модовую передачу и отражение, особенно сильно при m=2; (3) аналогичные трёхкомпонентные неосесимметричные эффекты проявляются при m=1 и m=3; (4) согласованные гладкие негиперболические контроли остаются конкурентоспособными и иногда превосходят точную РНВ. Алгебраические проверки S-матриц подтверждают численную согласованность, однако для некоторых коэффициентов ещё требуется дальнейшее сгущение и экспериментально обоснованная модель потерь.

Полученные результаты расширяют программу Геометрической волновой инженерии: от локальных откликов перемещений — к физически сопоставимым модовым входно-выходным операторам. Это воспроизводимый путь проектирования и независимого аудита геометрически управляемых волновых функций. Степень возможного преимущества РНВ над оптимизированным классом альтернативных поверхностей остаётся открытым, количественно проверяемым инженерным вопросом.

12. Возможные устройства и решающие экспериментальные проверки

Как перейти от численных гипотез к приборам. Для каждого применения критерий приёмки следует установить до изготовления образца: фиксированный входной порт, калиброванный датчик или электрод, полоса частот, независимо оптимизированные контроли и бюджет неопределённости, включающий погрешность изготовления, контакт, температуру и шум измерений. Целевая метрика зависит от прибора: ошибка восстановления для измерительной головки; нормированная по мощности матрица рассеяния для многомодового элемента; реальная мощность на цепи вместе с P_el/P_in для преобразователя. Заявление о технологическом прорыве потребует экспериментально воспроизводимого выигрыша по одной такой заранее определённой функции, а не одиночного численного максимума поля.

Решающая программа прототипирования должна начинаться с задания функции и класса контролей, после чего необходимо изготовить и обмерить несколько сопоставимых тел, определить фактический тензор пьезокерамики и свойства клея, зарегистрировать механическую и электрическую мощности по частотной полосе. В число конкурентов следует включить независимо оптимизированный гладкий негиперболический профиль. Чувствительность к температуре и допускам изготовления должна измеряться, а не выводиться только из модельной ширины резонанса.

Независимый расчёт должен воспроизвести точную аналитическую границу и решить ту же физическую задачу другим семейством сеток или программной реализацией. Критерием приёмки служат устойчивая абсолютная величина и преимущество над контролем, превосходящее объединённую численную и экспериментальную неопределённость. Условный положительный результат подтвердит пригодность конструкции для конкретной функции, но не докажет универсальный фокальный закон.

Ограниченный прибор определения нагрузок может использовать алюминиевую PHB с калиброванными многокомпонентными датчиками на внешнем поясе и контролируемым контактом около 151–153 кГц. Его основание — меньшая синтетическая ошибка относительно двух заданных деформаций, но не глобальный оптимум: гладкий профиль CUSTOM 0,08 мм воспроизводит или немного улучшает результат, а при изменении семейства силы простой конус может работать лучше. Для честного эксперимента требуются измеренные распределения силы, согласованные датчики, слепые профили и независимо оптимизированные негиперболические контроли. Универсальный локатор ударов/трещин не доказан.

Отдельный механико-электрический приёмник может использовать аналитическую PHB, радиально поляризованные пьезосекторы и определённые сопротивления нагрузки около 64 кГц. Количественное ранжирование мощности пока НЕ сертифицировано: согласованные криволинейные P1/P2-сетки с полным тензором PZT меняют знак при сгущении, хотя операторные, зарядовые и энергетические тесты проходят. Для реального проектного вывода нужны отслеживание мод около 64 кГц, одинаковая физическая работа источника и контакт, не менее трёх последовательных сеток со стабильными мощностью и входно-нормированной долей преобразования, измеренные PZT и клей, а также оптимизированные негиперболические контроли. Автономное питание не заявляется.

Дополнительное направление — многомодовый упругий передаточный элемент с калибруемой локальной чувствительностью к геометрии при фиксированном физическом волноводном порте. Для практической проверки следует измерить полную нормированную по мощности передаточную матрицу в полосе частот и сравнить PHB с независимо оптимизированными негиперболическими контролями, а не только один выбранный коэффициент.

Четвёртый кандидат — стандартизованный двухпортовый преобразователь упругих мод с прямыми цилиндрическими интерфейсами. Его полезная функция задаётся долей передачи в выбранный канал совместно с измеренными отражением и поглощением в заранее установленной рабочей полосе. Результаты раздела 11 относятся к идеализированному изотропному алюминию и согласованным портам; экспериментальным критерием служит преимущество относительно независимо оптимизированного гладкого контроля при сопоставимых объёме и потерях.

12.1. Условные численные преимущества и проверенные свойства расчётной модели

Наиболее существенный результат для PHB сейчас состоит не в утверждении универсального оптимума, а в воспроизводимом способе рассчитывать и задавать наблюдаемый упругий отклик небольшим набором геометрических параметров. Три самостоятельных результата имеют различную степень доказательности. При калиброванном различении двух нагрузок фиксированная PHB превосходит две заданные крупные деформации по обратной шумовой метрике на 12,81% при 152 кГц на указанной сетке Q3 16×32. В более сложной задаче с шестью каналами, совместной оценкой частоты и апертуры источника и введённым априорным распределением преимущество относительно этих контролей составляет 18,62–19,14%. Это условные преимущества

внутри семейства заданных источников, а не универсальная точность распознавания неизвестного воздействия.

Для заданного девятимодового порта упругого волновода доля мощности, передаваемой телом РНВ в канал P₇₀, при 153 кГц на сетке Q3 16×32 составляет 14,5553%; у двух указанных гладких контролей соответствующие значения равны 13,7982% и 13,9790%. Более фундаментальный результат — локальная дифференциальная модель правильно предсказывает знаки 44 из 44 отложенных локальных изменений геометрии при максимальной зарегистрированной локальной ошибке проецированной матрицы 0,1054%. Практическое преимущество состоит в предсказуемости выбранного волнового состояния и его производной по форме, а не в безусловном энергетическом выигрыше и не в чистом преобразовании P-волны в SV-волну.

В отдельной задаче собственных колебаний найдена мода с азимутальным порядком m=2 около 79,976 кГц, для которой 48,505% кинетической энергии моды сосредоточено в экваториальном поясе, занимающем 25,756% объёма. Отношение этих долей равно 1,8833; в приведённом сравнении Q3 оно не более чем на 3,015% превышает результаты четырёх заданных гладких деформаций ±0,5 мм, однако близкие гладкие формы способны его воспроизвести. Следовательно, результат поддерживает гипотезу пространственного отбора моды, но не доказывает превосходство готового приёмника.

12.2. Перспективные архитектуры и заранее заданные измеримые критерии

Назначение подраздела. Результаты разделов 4–11 формируют расчётную основу для проектирования будущих устройств. Для каждой архитектуры определены измеряемый показатель, численная опора, границы имеющихся результатов и порог для перехода к изготовлению. Пороги задаются до измерений.

Общая схема оценки.

Для каждой архитектуры необходимо совместно приводить четыре величины.

Таблица 27. Минимальный набор данных для оценки преимущества формы. Он охватывает абсолютный уровень сигнала, принятую мощность, отстройку рабочей частоты и сопоставление мод между сетками.

Величина	Обозначение	Значение для сравнения
Абсолютный выход при заданном возбуждении	P_el, P_mech	Относительный выигрыш может соответствовать малому абсолютному выходу. При мягком связующем слое расчётная мощность снижалась с 346,26 до 0,22 нВт.
Показатель, нормированный по входу	P_el/P_in^acc	На сетке 4×6×16/P2 РНВ принимает 5482,83 нВт и отдаёт 1,8009 нВт (0,032846%). Конус принимает 2772,09 нВт и отдаёт 0,6147 нВт (0,022175%). Отношение выходных мощностей 2,93 (с учётом округления) равно произведению отношения подвижностей на входе 1,98 и отношения долей преобразования 1,48.
Резонансная отстройка возбуждения	f_n, δ, κ_half = δ/(1/2Q)	Если одно тело возбуждается в пределах резонансной линии, а другое между резонансами, отстройку следует учитывать отдельно (раздел 8.9).

Соответствие мод между сетками	Соответствие по MAC	Соответствие нескольких мод одной форме при сгущении указывает на кластер, в котором отслеживание отдельных мод затруднено.

Пассивный калиброванный преобразователь механических нагрузок.

Две заданные компоненты поверхностной нагрузки подаются на верхний диск монолитного РНВ. Разнесённые по экваториальному поясу двухкомпонентные датчики дают комплексные сигналы. Критерием служит ошибка восстановления двух комплексных коэффициентов нагрузки при перекрёстной проверке, фиксированном числе датчиков и заданном спектре физического шума. Расчётная опора включает снижение показателя усиления шума на 12,81% при 152 кГц на Q3 16×32 и снижение ошибки на 18,62–19,14% в шестиканальной задаче совместной оценки частоты и апертуры с заданным априорным распределением. Результат относится к калиброванному семейству нагрузок. Гладкий негиперболический профиль с отклонением 0,08 мм сопоставим с РНВ или превосходит его. Для нагрузок вне обучающего семейства ошибка РНВ составляет 83,1% против 64,8% у контроля. Критерий приёмки — ошибка как минимум вдвое меньше, чем у лучшего независимо оптимизированного негиперболического контроля, на закрытом наборе пространственных профилей и частот с указанием отстройки для каждой частоты по разделу 8.9. Применение к широкополосным или произвольным ударным нагрузкам требует самостоятельной проверки.

Настраиваемый межмодовый ответвитель или мультиплексор.

Основой служит комплексная матрица передачи между распространяющимися гибридными модами, заданная на физическом порте и нормированная по мощности. Её выбранные элементы зависят от a, b, R и геометрии среза. Локальная производная первого порядка правильно предсказывает 44 из 44 контрольных знаков. Максимальная ошибка проецированной матрицы равна 0,1054% в локальном диапазоне и 2,6291% за его пределами. Чувствительности dP_{70}/da и dP_{70}/db составляют соответственно −2,5986 и −0,6728 процентного пункта на миллиметр. Для выбранного канала P_{70} равна 14,5553% у РНВ и 13,7982% и 13,9790% у двух гладких контролей. Модель включает девять распространяющихся гибридных мод одного порта фиксированного радиуса. При постоянном фокальном расстоянии $c = \sqrt{(a^2+b^2)}$ производная $dP_{70}/da|_c$ остаётся равной −2,4007 процентного пункта на миллиметр. Критерий приёмки — полная двухпортовая матрица Дирихле–Неймана с затухающими составляющими, одинаковыми портами, отслеживанием мод по MAC и воспроизведением заранее предсказанного изменения канала в пределах указанной неопределённости для независимо оптимизированных контролей.

Экваториальный модовый съём и секционированный пьезоэлектрический приёмник.

Геометрия определяет пространственное распределение деформаций, а связующий слой, секционирование электродов, электрическая нагрузка и источник совместно определяют выходную мощность. Собственная мода m = 2 около 79,98 кГц содержит 48,505% кинетической энергии в 25,756% объёма тела. Коэффициент локализации равен 1,8833 против максимум 1,8282 у четырёх контролей ±0,5 мм. Для связанного оператора проверены сохранение заряда ($2{,}98 \times 10^{-13}$), баланс мощности ($8{,}25 \times 10^{-14}$) и согласие полного блочного решения с дополнением Шура ($8{,}26 \times 10^{-14}$). В вынужденной задаче показатель отклика составляет 3,36843 против $3{,}37445 \times 10^{-5}$ м·с⁻¹·Н⁻¹. На семи сетках разброс электрического выигрыша составляет 53,80–145,55%. Криволинейная

полнотензорная модель P2 на 6×8×20 обращает ранжирование (0,3720 против 0,8916 нВт). Критерий приёмки — стабильные абсолютные электрическая и принятая механическая мощности и их отношение не менее чем на трёх последовательных уровнях сгущения h/p с отслеживанием мод около 64 кГц, измеренными параметрами PZT и клея и общей нормировкой по принятой мощности. Перевес над независимо оптимизированным негиперболическим телом должен превышать удвоенную суммарную численную и измерительную неопределённость. Расчётные доли преобразования 0,0328% и 0,0222% требуют дополнительной проверки перед выводом о практическом сборе энергии.

Протокол выбора рабочей частоты.

Для каждой архитектуры заранее выбирается один из трёх протоколов. (A) Каждое тело возбуждается на своей отслеженной собственной частоте с нормировкой мощности по ширине модовой линии. (B) Используется общая частота возбуждения, отстоящая не менее чем на 1,5 полуширины от каждой рассматриваемой собственной частоты всех тел. (C) Показатель усредняется в полосе относительной шириной не менее 10% на общей частотной сетке. При смене ранжирования проверяют знак разности f_d − f_n и соответствие мод между сетками.

12.3. Критерий перехода от расчётного эффекта к прототипу

Причинная цепочка проектирования имеет вид: аналитическая геометрия G → объём Ω(G) и нормали границы → векторный упругодинамический оператор A_G → перекрытия источника и мод, мод и приёмника → измеряемое перемещение, модовая передача или электрическая мощность. Каждое инженерное утверждение должно проверять определённое звено этой цепочки. Необходимая серия проверок включает одинаковые входные и выходные порты, равную массу материала там, где это существенно, гладкие сохраняющие объём негиперболические контроли, одну физическую модель материала и контакта, заданный частотный диапазон, согласованную h/p-сходимость и энергетический аудит. Если выдвигается фокальное объяснение, требуется также заранее рассчитать изменение наблюдаемой величины при целенаправленном нарушении фокального равенства.

Таким образом, PHB сохраняет конструктивную ценность без заявлений об исключительном законе распространения волн: замкнутая аналитическая параметризация удобна для расчёта чувствительности, оптимизации, воспроизводимого изготовления и опровержимых сравнений характеристик. Полученные количественные результаты оправдывают адресное изготовление прототипов и независимую численную верификацию, но пока не означают экспериментального подтверждения готовой технологии.

13. Заключение

Что установлено относительно геометрии.

Семейство PHB задаёт точную дифференцируемую параметризацию границы для стандартных задач упругости и электроупругости. Регулярные гладкие ветви гиперболы обладают отрицательной гауссовой кривизной, однако это геометрическое свойство само по себе не определяет знак различий передаточных функций или мощности при конечной частоте. Наблюдаемая величина совместно зависит от источника, границы, спектра мод, приёмника, контакта и потерь. Фокусы образующей являются геометрическими ориентирами и не предсказывают концентрацию энергии поля упругих перемещений.

Производная по форме как основной инструмент.

Аналитическая параметризация позволяет вычислять производную передаточного оператора по геометрическому параметру, связывая изменение границы с перераспределением сигнала либо энергии без введения новой физики материала. Локальная производная верно предсказала знак изменения выбранного канала во всех 44 отложенных возмущениях, причём максимальная относительная ошибка составила 0,1054% при изменениях до 0,2 мм и до 2,6% вне указанного диапазона. Практическая ценность состоит в предсказуемости выбранного волнового состояния и его чувствительности к форме, что позволяет применять градиентное проектирование модового элемента вместо перебора форм.

В каких постановках аналитическая форма даёт более высокий отклик.

В калиброванной обратной задаче при 152 кГц на сетке Q3 16×32 показатель усиления измерительного шума точной PHB ниже на 12,81% относительно лучшей из двух заданных крупных деформаций. В шестиканальной задаче с совместно неизвестными частотой и апертурой при установленном априорном распределении ошибка восстановления меньше на 18,62–19,14%. Для заданного девятимодового порта при 153 кГц доля мощности PHB в канале P_{70} составляет 14,5553% на Q3 16×32 против 13,7982% и 13,9790% у двух первоначальных гладких контролей. Позднее сравнение с четырьмя контролями даёт меньший перевес PHB — 0,137–0,148 процентного пункта на трёх более подробных сетках Q3; на самой грубой Q3 и на одной Q2 ранжирование меняется. Речь идёт об отражении между выбранными гибридными направляемыми модами, а не о чистом преобразовании P↔SV. Собственная мода m=2 около 79,976 кГц содержит 48,505% кинетической энергии в поясе, занимающем 25,756% объёма (показатель локализации 1,8833 против 1,8282 у лучшего из четырёх контролей). В отдельной импульсной задаче с внутренними свободными поверхностями отношение PHB/конус составляет 1,075852 для раннего внешнего кольца и 1,247410 для позднего внутреннего кольца. Работа источника нормируется отдельно для каждой формы; этот результат не относится к внешним монолитным телам главных экспериментов. При изменении границы временных окон в пределах 55–75 мкс позднее отношение изменяется примерно от 0,98 до 2,25. Эти результаты принадлежат разным прямым задачам, приёмникам, контролям и нормировкам и не дают единого ранжирования PHB над всеми поверхностями.

Границы применимости указанного преимущества.

Преимущество узкополосно: −0,41% при 151 кГц и +0,61% при 153 кГц. Гладкая сохраняющая объём поправка +0,08 мм улучшает тот же показатель ещё на 3,58–4,85%; следовательно, точная гипербола не доказана как оптимум. Вне калиброванного семейства пространственных нагрузок ошибка PHB достигает 83,06% против 64,76% у двойного конуса и 64,99% у цилиндра: калиброванное преимущество не переносится на независимое изменение класса источника. Локализация собственной моды не улучшает вынужденный сигнал приёмника ($3{,}36843\cdot10^{-5}$ против $3{,}37445\cdot10^{-5}$ $м\cdot с^{-1}\cdot Н^{-1}$); при меньших потерях преимущество контроля становится заметнее. Эти ограничения определяют область применения, а не служат общей оценкой геометрии.

Передача энергии и пьезоэлектрический съём.

При номинальных потерях гибрид превосходит равномассовую PHB по доле принятой мощности на 16,63%, но удвоение потерь меняет знак на −4,04%; при общем параметре приёмника $\gamma=3{,}4$ гибрид уступает во всём проверенном проходе. Податливость контакта уменьшает рассчитанную мощность с 346,26 нВт для идеального соединения до 0,22 нВт для мягкого толстого слоя, поэтому большой относительный выигрыш способен сопровождаться пренебрежимо малой абсолютной мощностью. В связанной трёхмерной

модели отношение электрических мощностей 2,93 разлагается на факторы 1,98 (входная подвижность) и 1,48 (доля преобразования): преимущество по выходной мощности и преимущество по доле преобразования — разные утверждения. На согласованных квадратичных элементах ранжирование РНВ/конус меняется с +195,44% до −64,95%. Рабочая точка РНВ находится в пределах полуширины резонанса (к_half≈0,55 против 1,7–2,0 у конуса), а при сгущении ближайшая собственная частота РНВ перемещается с 63,62 до 64,37 кГц, то есть на противоположную сторону рабочей частоты. Поэтому смена знака интерпретируется как возможное следствие резонансной настройки и соответствия мод, а не одного профиля; проверка причинной роли требует отслеживания мод в той же связанной системе, в которой рассчитывается мощность. Сертифицированный КПД преобразования не заявляется.

Что подтверждено для дискретной реализации.

Алгебраическая согласованность подтверждена отдельными проверками: прямое решение полной блочной системы и исключение внутренних электрических потенциалов методом Шура согласуются по перемещениям, потенциалам и мощности до 10^{-13}; балансы заряда и мощности выполняются до $3\cdot10^{-13}$; ошибка объёма при криволинейных изопараметрических элементах составляет $6\cdot10^{-4}$%, а контактный функционал и виртуальная работа поверхностной нагрузки согласуются до 10^{-16}–10^{-15} при смене порядка элементов. Эти проверки удостоверяют собранные уравнения и энергетический учёт, но не оценивают ошибку континуального решения и не заменяют сходимость физической величины. Сходимость электрической мощности при 64 кГц не достигнута; для неё нужны не менее трёх последовательных h/p-сгущений со стабилизацией абсолютной мощности, принятой мощности и доли преобразования, идентичностью мод и контролируемыми изменениями клеевого слоя, потерь и тензора керамики.

Протокол сравнения как самостоятельный результат.

В работе сформулирован протокол, применимый за пределами исследованного семейства: резонансная отстройка в единицах полуширины линии; проверка соответствия мод между сетками по их перекрытию; три процедуры выбора рабочей точки — возбуждение на отслеживаемой собственной частоте с нормировкой по ширине модового резонанса, единая частота не ближе 1,5 полуширин от любого резонанса всех сравниваемых тел либо усреднение по общей частотной сетке с относительной шириной полосы не менее 10%; четыре величины, приводимые совместно, — абсолютный уровень, выход на единицу принятой мощности, отстройка и идентичность моды. Они создают воспроизводимый порядок сравнения без введения неиспользуемых далее геометрических тождеств.

Формулировка результата.

Научный результат состоит не в универсальном фокальном законе и не в создании энергии, а в переносе программы Геометрической волновой инженерии на упругую среду, формировании воспроизводимого дифференцируемого семейства геометрий, предварительной эмпирической зависимости чувствительности к допускам для указанного семейства профилей и количественно определённого набора функций отклика с установленной областью применимости. Аналитическая параметризация сохраняет конструктивную ценность независимо от исключительности гиперболы: она позволяет вычислять чувствительность, оптимизировать, воспроизводимо изготавливать и проводить опровержимые сравнения. Следующий этап — эксперимент с измеренными параметрами пьезокерамики, клея и потерь, сопоставление с независимо оптимизированными негиперболическими конструкциями при одинаковом вычислительном бюджете. Без этого преимущество точной гиперболы перед оптимизированной альтернативой остаётся открытым вопросом.

Энергетически нормированное межмодовое преобразование и геометрическая настройка.

В отдельной двухпортовой модели монолитной РНВ с одинаковыми цилиндрическими портами полные комплексные матрицы рассеяния показывают воспроизводимую внедиагональную передачу мощности между распространяющимися гибридными упругими модами. Для m=0 при 230 кГц на приведённой сетке Q3 примерно 37,865% мощности входной моды 0 переходит в выходную моду 1. В секторах m=1,2,3 связаны все три компоненты перемещения, а выбранные передача и отражение существенно зависят от параметра точного семейства b при изменении R для сохранения номинального объёма. Для m=2 переход b=34→35 мм увеличивает среднюю по двум частотам целевую передачу с 24,31% до 38,81% и уменьшает отражение с 27,82% до 6,11% в проверенном бездиссипативном режиме. Это сравнение конструкций внутри семейства РНВ; гладкие равнообъёмные контроли остаются конкурентоспособными, и универсальный оптимум РНВ из данных не следует.

Границы численного доказательства.

Двухпортовые расчёты устанавливают различные нормированные по мощности модовые функции, но не измеряют КПД устройства, не доказывают чистое преобразование объёмной P-волны в SH и не устанавливают превосходства над независимо оптимизированным классом негиперболических конструкций. Сохранение мощности, нормировка портовых мод, пассивность, взаимность, сеточные проверки и регулярность у оси для старших секторов являются необходимыми проверками качества; отдельные коэффициенты старших мод ещё чувствительны к сетке. Поэтому предложенная инженерная функция — это контролируемая входно-выходная матрица рассеяния, которую предстоит проверять экспериментально при заданных частотах, потерях и одинаковых портах.

Приложение А. Перенос энергии у внутренних свободных поверхностей во временных окнах

В импульсном расчёте сопоставлялись внутренние свободные поверхности формы РНВ и двойного конуса в окружающем сплошном алюминиевом массиве. Поверхности представляют собой внутренние разрезы. Внешняя граница монолитных тел основного текста задаёт другую задачу рассеяния. В сравнении использованы дискретизация R8Z84, внешний радиальный отступ 0,31 м, шаг времени 0,25 мкс и одинаковое заданное возбуждение P-типа. Каждый интеграл потока нормирован на фактическую работу источника в соответствующей модели ($4{,}34168\times10^{-10}$ Дж для РНВ и $4{,}32698\times10^{-10}$ Дж для конуса).

Таблица 28. Энергия положительно направленного потока через два приёмных кольца, нормированная на работу источника.

Окно и кольцо	РНВ (%)	Конус (%)	РНВ/конус	Разность (п.п.)
0–65 мкс, внешнее 80–120 мм	1,91661	1,78148	1,075852	+0,13513
65–110 мкс, внутреннее 15–30 мм	0,22283	0,17863	1,247410	+0,04420

Значения характеризуют энергию, пересекающую приёмную поверхность в выбранном временном интервале. Для метрики знаковой результирующей энергии, показанной на рисунке 37, а не для положительно направленной энергии в таблице 28, отношение в позднем окне при границе 65 мкс составляет 1,249542. При смещении границы по

проверенным точкам от 55 до 75 мкс это отношение меняется примерно от 0,98 до 2,29. Поздний выигрыш зависит от окна приёма и соответствует малой абсолютной доле работы источника.

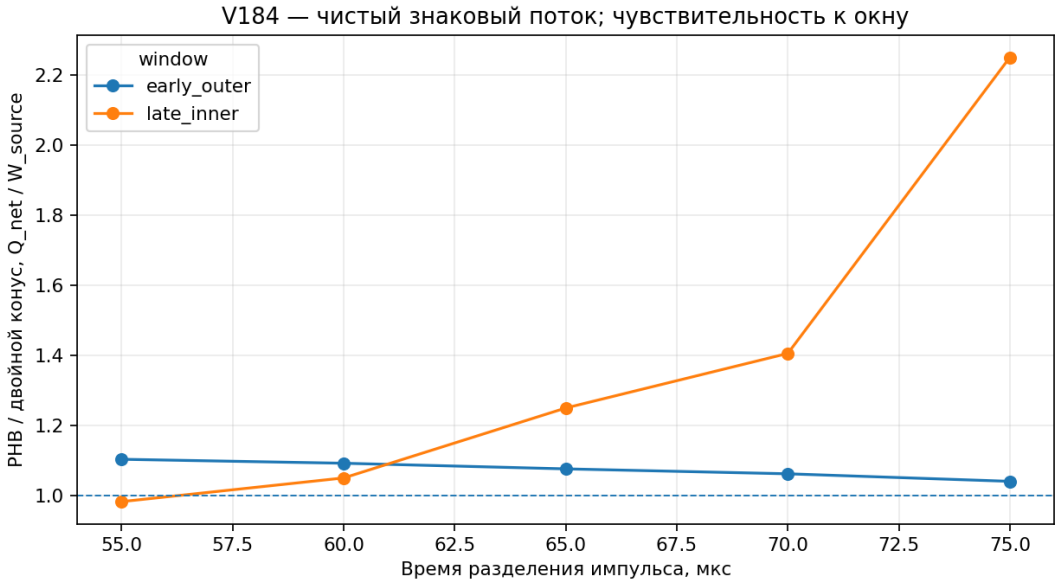

Рисунок 37. Исходный результат скрипта импульсного расчёта по временным окнам. По горизонтали отложен момент разделения окон, по вертикали — отношение нормированной на работу источника знаковой энергии PHB к энергии конуса. Кривые соответствуют раннему внешнему и позднему внутреннему кольцам. Геометрия и временные ряды получены в импульсном расчёте R8Z84. Полное происхождение расчёта указано в приложении B.

Приложение Б. Сводка расчётных сравнений и границ доказательности

Таблица содержит девять результатов, относящихся к трём классам доказательности, и одно отдельное контекстное сравнение: (A) воспроизведённые расчётные функции; (B) физические отклики с незавершённой инженерной оценкой; (C) исследовательские кандидаты, требующие дальнейшей сертификации. Классы описывают статус результата, а не число независимых экспериментов. Проценты относятся к разным наблюдаемым величинам и напрямую несопоставимы. Гибрид PHB/ZPHB указан отдельно от монолитной PHB.

Таблица 29. Результаты, базы сравнения и границы доказательности.

Класс доказательности	**Функция / наблюдаемая величина**	**Результат и база сравнения**	**Граница интерпретации**
A. Воспроизведённые расчётные функции	Восстановление заданных компонент механической нагрузки по датчикам перемещений на поясе	Метрика усиления шума для PHB при 152 кГц на Q3 16×32 ниже на 12,81%, чем для лучшего из двух заданных широких искажений; на двух более тонких сетках — на 13,54% и 13,41%.	Результат условен относительно калиброванного семейства источников и узкого диапазона частот. CUSTOM +0,08 мм даёт метрику на 4,79% ниже PHB на Q3 28×56; PHB не является оптимумом.

Класс доказательности	**Функция / наблюдаемая величина**	**Результат и база сравнения**	**Граница интерпретации**
А. Воспроизведённые расчётные функции	Прогноз локальных изменений девятимодового оператора передачи	Локальная производная правильно предсказывает знак в 44 из 44 отложенных случаев; максимальная ошибка проецируемой матрицы — 0,1054%.	Наиболее убедительный методический результат. Он подтверждает локальную предсказательную способность в проверенной дискретной модели, но не превосходство PHB над конусом, цилиндром или оптимизированным гладким профилем.
А. Воспроизведённые расчётные функции	Шестиканальное восстановление при неизвестных частоте источника и апертуре	RMSE для PHB на Q3 12×24 и 16×32 составляет 8,87% и 9,31%. Относительно DEF− (10,97% и 11,44%) снижение равно 19,14% и 18,62%.	Контроль — DEF−, а не DEF+. Ошибка CUSTOM составляет 8,82% и 9,25%, то есть немного ниже, чем у PHB; эффект ограничен указанным априорным условием и калиброванным семейством источников.
Б. Физические отклики; инженерная оценка не завершена	Экваториальная локализация собственной моды m=2	Отношение локализации равно 1,8833 для PHB против 1,8282 для лучшего из четырёх заданных контролей (+3,015%).	Наличие собственной моды — физический результат, но преимущество полезного вынужденного отклика не установлено; близкие гладкие профили дают сопоставимые значения.
Б. Физические отклики; инженерная оценка не завершена	Пространственные диагностики P-подобного и SV-подобного поля	Пять из шести выбранных метрик V48 имеют благоприятный знак на K/L/M; только результат +4,59% покрытия односторонней SV-подобной траектории превышает заданный порог, равный удвоенному изменению между сетками.	Один показатель меняет знак, а большинство эффектов невелики. Это диагностика поля, а не измеренная эффективность P→SV-преобразования.

Класс доказательности	**Функция / наблюдаемая величина**	**Результат и база сравнения**	**Граница интерпретации**
Б. Физические отклики; инженерная оценка не завершена	Тонкослойный пьезоэлектрический выход гибрида PHB/ZPHB	Сообщённые значения: 201,88/200,68 нВт для гибрида и 110,48/109,42 нВт для двойного конуса на двух сетках (+82,73/+83,41%).	Результат относится к гибриду, а не монолитной PHB. В модели тонкого связующего слоя при 64 кГц и 750 Ом выход меняется между двумя сетками примерно на 0,6% для гибрида и на 1,0% для конуса; это не сертифицирует КПД в отдельной полнотензорной трёхмерной модели.
В. Кандидаты, требующие сертификации	Импульсная энергия через внутренние свободные поверхности; поверхность формы PHB и конус	Отношения равны 1,075852 для раннего окна внешнего кольца и 1,247410 для позднего окна внутреннего кольца.	Отдельная задача рассеяния на внутренних срезах; для каждой геометрии отдельно нормируется работа источника. Позднее отношение меняется примерно от 0,98 до 2,25 при сдвиге границы окна; выигрыш не сертифицирован.
Б. Физические отклики; инженерная оценка не завершена	Передача в выбранный канал направляемой моды P_{70}	При 153 кГц: 14,5553% против 13,7982% и 13,9790% на Q3 16×32; относительно четырёх контролей — +0,137–0,148 процентного пункта на трёх более тонких сетках Q3.	На самой грубой Q3 и одной сетке Q2 знак меняется. Разложение модовой мощности и континуальная сходимость не завершены; это не чистое P↔SV-преобразование.
Только внутреннее сравнение; не преимущество над другой формой	Сравнение двух конфигураций семейства PHB	При $\gamma=1$ сообщён рост доли принятой мощности на +57,72% и +103,39% для гибрида относительно PHB на отдельных частотах.	Полезно для настройки PHB, но не показывает преимущество над другой поверхностью; при удвоении потерь сравнение меняется на −4,04%.
В. Кандидаты, требующие сертификации	Трёхмерные пьезоэлектрические сектора; PHB и двойной конус равного объёма	Исходная серия P1 даёт диапазон +53,80–145,55% на семи сетках (часто приводившиеся +65,15% относятся к одной сетке).	Не сертифицировано: значения сильно меняются, а согласованная криволинейная полнотензорная модель P2 меняет знак сравнения на 6×8×20. Выигрыш мощности в континуальном пределе не установлен.

Дополнительные архивные сравнения гармонического отклика, остатков траектории и потока через экваториальное сечение приведены в разделе 9.1 и таблицах 18–20; они не считаются отдельными строками этой десятипунктовой сводки.

14. Литература

[1] Sayed Ahmed, M.; Shahab, S. Wave-field shaping with elastic metasurfaces via the iterative angular-spectrum approach. Physical Review Applied 23, 054056 (2025). https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.23.054056

[2] Erturk A, Inman DJ. A Distributed Parameter Electromechanical Model for Cantilevered Piezoelectric Energy Harvesters. Journal of Vibration and Acoustics 130, 041002 (2008). https://doi.org/10.1115/1.2890402

[3] Erturk A, Inman DJ. Issues in mathematical modeling of piezoelectric energy harvesters. Smart Materials and Structures 17, 065016 (2008). https://doi.org/10.1088/0964-1726/17/6/065016

[4] FEniCS Project. Time-integration of elastodynamics equation. DOLFIN documentation. https://olddocs.fenicsproject.org/dolfin/dev/python/demos/elastodynamics/demo_elastodynamics.py.html (дата обращения: 8 ноября 2026 г.).

[5] Jinesh, N.; Shankar, K. Multiple Crack Damage Detection of Structures Using Simplified PZT Model. Journal of Mechanics of Materials and Structures 13(2), 225–246 (2018). https://doi.org/10.2140/jomms.2018.13.225

[6] Achenbach, J. D. Wave Propagation in Elastic Solids. North-Holland, Amsterdam, 1973. ISBN 0-7204-2367-8.

[7] Rose, J. L. Ultrasonic Guided Waves in Solid Media. Cambridge University Press, Cambridge, 2014. ISBN 978-1-107-04895-9.

[8] Puthillath, P.; Galan, J. M.; Ren, B.; Lissenden, C. J.; Rose, J. L. Ultrasonic guided wave propagation across waveguide transitions: energy transfer and mode conversion. Journal of the Acoustical Society of America 133(5), 2624–2633 (2013). https://doi.org/10.1121/1.4795805.

[9] Pagneux, V.; Maurel, A. Lamb wave propagation in elastic waveguides with variable thickness. Proceedings of the Royal Society A 462(2068), 1315–1339 (2006). https://doi.org/10.1098/rspa.2005.1612.

[10] Abram, R. A. A coupled-mode formalism for elastic waveguides. Journal of Physics D: Applied Physics 7(10), 1329–1335 (1974). https://doi.org/10.1088/0022-3727/7/10/305.

[11] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. 6th ed. Elsevier Butterworth-Heinemann, Amsterdam, 2005. ISBN 978-0-08-045558-7.

[12] Sokolowski, J.; Zolesio, J.-P. Introduction to Shape Optimization: Shape Sensitivity Analysis. Springer-Verlag, Berlin, 1992. https://doi.org/10.1007/978-3-642-58106-9.