Геометрическая волновая инженерия

Теория псевдогиперболоидов высших порядков

Том 1

Конструктивная геометрия и рекурсивные построения

Хаустов Владимир Игоревич

ORCID: 0009-0007-3657-2309

Лаборатория геометрической волновой инженерии https://vihrihaosa.ru/

Лицензия: CC BY 4.0

Дата публикации: 8 мая 2026 года

DOI: 10.5281/zenodo.20058260

Научно-технический перевод с английского языка.

Редакция, адаптированная для русскоязычного инженера-исследователя.

Оригинал: Khaustov, V. Geometric Wave Engineering. Theory of Higher-Order Pseudohyperboloids. Volume 1. https://doi.org/10.5281/zenodo.20058260

Аннотация

В настоящем томе закладываются структурные и геометрические основы исследовательской программы «Геометрическая волновая инженерия» и вводится класс рекурсивно формируемых осесимметричных внутренних областей Ω_n и $\Omega_{n,m}$. Эти области определяются посредством семейств радиальных интервалов $I_n(\xi)$, рекурсивного оператора C_R, оператора канонизации Merge, системы осевого размещения и безразмерной параметризации. Центральным объектом исследования является не отдельная ветвь образующей кривой и не внешняя оболочка, а весь внутренний объём, пригодный для постановки краевых, спектральных и вычислительных задач.

В томе формализован интервально-рекурсивный аппарат построения геометрий высших порядков. Введены пространство интервальных состояний, базовые исходные профили, гиперболические геометрии вертикального и горизонтального типов, а также общий рекурсивный механизм перехода от порядка n к порядку n + 1. Установлены фундаментальные геометрические свойства предложенной конструкции: корректная определённость и идемпотентность оператора Merge, свойство 1-липшицевости элементарных отображений, неотрицательность и ограниченность радиальных интервалов, конечность числа компонент, замкнутость графика семейства интервалов, компактность областей Ω_n и $\Omega_{n,m}$, масштабная инвариантность и полнота интервального описания.

Научный интерес к этому классу областей обусловлен не только их рекурсивной геометрической организацией, но и фокальной структурой гиперболической образующей. Фокусы образующей располагаются за пределами самой внутренней области, однако задают геометрически выделенные направления, связанные с исходным семейством кривых. Вопрос о том, оказывает ли такая фокальная структура какое-либо нетривиальное влияние на внутреннюю лучевую или волновую динамику, в настоящем томе рассматривается как открытый, а не как уже установленное свойство. Его исследование предусмотрено программой фальсифицируемой верификации, изложенной в главе 12.

В томе 1 последовательно разграничиваются строго доказанные геометрические результаты и пока не установленные лучевые и волновые эффекты. Утверждения о локализации энергии, существовании спектральных окон, высокой добротности, направленности излучения, концентрации поля вдоль оси и применимости к различным физическим типам волн не рассматриваются здесь как доказанные конструктивные свойства. Они формулируются в виде проверяемых гипотез и включаются в программу полноволновой верификации, разработанную в главе 12 для электромагнитных, акустических и квантово-волновых моделей.

Таким образом, том 1 представляет собой не завершённую универсальную теорию волн, а первый этап исследовательской программы. В нём вводится новый математический объект, доказываются его основные геометрические свойства, устанавливается воспроизводимый вычислительный стандарт и формируется проверяемая связь с последующими томами, посвящёнными физическим приложениям.

Ключевые слова: геометрическая волновая инженерия; рекурсивные осесимметричные области; псевдогиперболоидная геометрия; интервальная рекурсия; оператор Merge; исходный профиль; гиперболическая образующая; компактность; масштабная инвариантность; вычислительная геометрия; полноволновая верификация.

Содержание

Аннотация 2

Введение 4

1. Предмет исследования, методология и границы доказательности 8

2. Исходные профили и основы гиперболической геометрии 13

3. Пространство интервальных состояний и операция Merge 18

4. Рекурсивное построение $I_n(\xi)$, ограниченность, конечность числа компонент и компактность областей 24

5. Дерево ветвей, формальные орбиты и интерпретация, аналогичная системам итерируемых функций (IFS) 29

6. Осевые массивы, параметр осевой компоновки h и топологии взаимодействия экземпляров 35

7. Дифференциально-геометрический анализ: гладкие участки, сопряжения после Merge и локальная кривизна 42

8. Количественные функционалы: площади поперечных сечений, объёмы и измеримость 48

9. Безразмерные параметры и масштабная инвариантность 54

10. Конструктивный атлас псевдогиперболоидов по порядкам и типам 59

11. Формальные результаты разграничения и методологический контекст 73

12. Программа полноволновой верификации C1–C8 78

13. Эпистемологический статус тома 1: доказанные положения, численно установленные результаты и сохраняющиеся гипотезы 85

Заключение 89

Список обозначений 91

Литература 95

Введение

Методологическое замечание о структуре изложения

Во введении в сжатой форме представлен общий замысел первого тома. Поэтому некоторые положения, сформулированные здесь предварительно, впоследствии получают строгое обоснование в основном тексте. Развёрнутая методологическая основа тома, включая конструктивные принципы, четыре уровня описания исследуемого объекта, разграничение геометрии и физики, а также роль вычислительной реализации, изложена в главе 1. Систематическое разделение всех положений работы на три категории — строго доказанные, численно установленные и остающиеся гипотезами — представлено в главе 13. Следовательно, приводимые во введении перечни доказанных и недоказанных положений служат предварительным обобщением и не заменяют соответствующих формальных разделов монографии.

Постановка задачи

Современная волновая инженерия использует широкий спектр геометрических и материальных платформ: резонаторы мод шепчущей галереи, цепочки связанных полостей, брэгговские структуры, дифракционные и квазипериодические системы, а также открытые и полуоткрытые области с управляемыми радиационными потерями. Во всех подобных задачах геометрия играет не вспомогательную, а определяющую роль. Именно она задаёт допустимые траектории, области локализации, условия интерференции, характер отражения от границ и структуру возможных мод.

Настоящий том основывается на следующем общем положении: прежде чем формулировать волновую задачу, необходимо построить строго определённый и воспроизводимый класс геометрических областей, допускающий параметрическое варьирование, вычислительное построение и независимую проверку. При отсутствии такого класса обсуждение спектров, локализации, добротности или направленности излучения неизбежно оказывается привязанным к отдельным геометрическим формам, частным визуализациям либо неформальным инженерным эвристикам.

Для решения этой задачи в настоящей работе вводится класс рекурсивно формируемых осесимметричных областей Ω_n и $\Omega_{n,m}$. Эти области строятся на основе исходного профиля не посредством непосредственного «рисования поверхности», а через семейства радиальных интервалов, заданных при определённых значениях осевой координаты. Такой подход переводит описание геометрии с языка изображений на язык множеств, операторов и функционалов.

Место настоящего тома в исследовательской программе

Данная монография является первым томом серии «Геометрическая волновая инженерия». Её задача состоит не в доказательстве на данном этапе универсальной возможности управления волнами произвольной физической природы, а в создании геометрической основы, на которой соответствующие задачи впоследствии смогут ставиться строго и воспроизводимо.

В связи с этим цели настоящего тома ограничиваются следующими положениями:

1. Определить класс геометрических объектов.
2. Разработать рекурсивный аппарат их построения.
3. Доказать основные свойства этих объектов.

4. Сформировать вычислительный стандарт.
5. Сформулировать программу последующей полноволновой верификации.

Предмет последующих томов будет иным. Он охватит:

- постановку электромагнитных краевых задач;
- акустические модели;
- квантово-волновые модели;
- спектральный анализ;
- оценку добротности;
- исследование направленности излучения;
- устойчивость результатов к технологическим и геометрическим отклонениям.

Таким образом, первый том посвящён геометрии и вычислительной конструктивности, а не окончательному доказательству универсальности физических эффектов.

Основная идея

Основная идея книги заключается в том, что осесимметричная внутренняя область может задаваться не единственной гладкой образующей, а семейством радиальных интервалов $I_n(\xi) \subset [0, \infty)$, зависящих от осевой координаты ξ. Тогда сама область определяется как множество точек, радиальные координаты которых принадлежат соответствующему интервальному сечению: $\Omega_n = \{(\xi, \rho, \varphi) : \rho \in I_n(\xi), 0 \le \varphi < 2\pi\}$.

Такое описание допускает естественную рекурсию. На каждом шаге любой интервал порождает две новые радиальные зоны — «разностную» и «суммарную», после чего применяется операция канонизации Merge, объединяющая пересекающиеся и соприкасающиеся интервалы в стандартное представление. В результате возникает не просто дерево ветвей, а единый внутренний объём, обладающий собственной топологией, системой компонент, поперечными площадями и интегральными функционалами.

Именно этот переход — от дерева ветвей к внутреннему объёму — составляет математическое ядро настоящего тома.

Фокальная мотивация как геометрическое наблюдение, а не физическое утверждение

Гиперболический исходный профиль обладает естественной парой фокусов, а после рекурсивных смещений каждая формальная дуга наследует собственную фокальную пару согласно явным формулам главы 5. Эта фокальная структура представляет собой строго геометрическое свойство исходного класса.

Важно подчеркнуть: в первом томе фокальная структура используется исключительно:

- как маркер формальных дуг;
- как часть геометрического паспорта эталонных конфигураций;
- как структурный признак, отличающий рекурсивный класс от негиперболических осесимметричных областей.

В первом томе не делается физических утверждений об отражении лучей, концентрации пучков, осевом переносе, захвате мод или волновой фокусировке. Такие утверждения относятся к проверяемым гипотезам, перечисленным в главе 13, и к программе верификации C2–C5 главы 12. Вопрос о том, создают ли внешние фокусы образующей какие-либо нетривиальные волновые или лучевые эффекты внутри рекурсивной области, остаётся открытым и передаётся для изучения в последующих томах.

Поэтому фокальная структура мотивирует выбор гиперболического исходного класса как аналитически удобного и геометрически выразительного, но сама по себе не доказывает физического преимущества псевдогиперболоидных областей перед альтернативными осесимметричными архитектурами.

Научная новизна

Научная новизна работы заключается не в использовании гиперболы как таковой и не в простой модификации известных поверхностей вращения. Принципиально новым является следующее:

6. Вводится класс рекурсивно формируемых осесимметричных областей, определяемых через интервальные сечения.
7. Геометрия описывается не визуально, а операционно — с помощью C_R, Merge, осевой компоновки и безразмерных параметров.
8. Теория строится для всего внутреннего объёма, а не для отдельных ветвей.
9. Устанавливается воспроизводимый вычислительный стандарт геометрического построения, численных таблиц и проверочных примеров.
10. Формулируется проверяемая программа перехода к волновым моделям различной физической природы.

В частности, предлагаемый конструктивный подход не сводится ни к классическим гладким поверхностям вращения, ни к дискретным цепочкам связанных резонаторов, ни к брэгговским структурам с материальным слоистым строением. Он образует отдельный геометрический класс, который можно сопоставлять с указанными объектами, но который не подменяет их.

Объект исследования

Объектом исследования в первом томе служат:

- семейства интервальных сечений $I_n(\xi)$;
- соответствующие осесимметричные области Ω_n;
- объединения осевых рядов $\Omega_{n,m}$;
- геометрические функционалы площади, объёма и числа компонент;
- безразмерные параметры, управляющие формой и компоновкой.

Существенное методологическое решение состоит в том, что первичным считается объём, а не отдельная ветвь, поверхность или её графическое изображение. Ветви образующей используются только как порождающий механизм и вспомогательный инструмент анализа.

Предмет исследования

Предметом исследования являются:

- строгие определения рекурсивной геометрии высших порядков;
- свойства интервального оператора и операции Merge;
- ограниченность, компактность и связность областей;
- масштабные свойства;
- вычисление площадей поперечных сечений и объёмов;
- воспроизводимая программная реализация построения.

Следовательно, предмет первого тома носит математико-вычислительный, а не экспериментально-физический характер.

Методологические принципы

Монография основывается на следующих принципах.

Принцип 1. Первичность вычислительной области. Физически значимым объектом является область Ω, на которой ставится уравнение, а не графическая оболочка или отдельная ветвь.

Принцип 2. Конструктивность. Каждая геометрия должна задаваться конечным набором параметров и воспроизводимым алгоритмом построения.

Принцип 3. Канонизация. Различные представления ветвей, задающие одно и то же радиальное множество, должны приводиться к единственной канонической форме.

Принцип 4. Безразмеризация. Все геометрические параметры должны допускать переход к безразмерным сочетаниям, пригодным для последующей постановки волновых задач.

Принцип 5. Эпистемологическая дисциплина. Геометрически доказанные положения должны быть отделены от физических гипотез и инженерных ожиданий.

Принцип 6. Вычислительная воспроизводимость. Для каждого определения и численного примера должен существовать независимый алгоритм построения и проверки.

Основная терминология

Термин «рекурсивная псевдогиперболоидная область» используется в книге для обозначения осесимметричной области, построенной из гиперболического исходного профиля с помощью последующей интервальной рекурсии. Это специальное обозначение, которое не следует смешивать с употреблением термина «псевдогиперболоид» в дифференциальной геометрии, теории квадрик или геометрии псевдоевклидовых пространств.

Исходным профилем называется начальная неотрицательная функция $d(\xi)$, задающая базовое радиальное сечение. Гипербола используется в данном томе как основной аналитически удобный исходный класс, однако большая часть интервально-рекурсивного аппарата не зависит от собственно гиперболичности.

Что именно доказано в первом томе

В первом томе доказаны либо строго обоснованы:

- корректность интервальной канонизации Merge;

- 1-липшицевость базовых отображений;
- неотрицательность и ограниченность интервальных состояний;
- конечность числа компонент на каждом шаге рекурсии;
- замкнутость графика семейства интервалов;
- компактность Ω_n и $\Omega_{n,m}$;
- масштабная инвариантность;
- корректность формул площадей и объёмов;
- полнота интервального описания.

Эти результаты образуют строгую геометрическую часть теории.

Что не доказано в первом томе

В первом томе не установлены в качестве доказанных фактов:

- локализация электромагнитного, акустического либо квантового поля;
- существование спектральных окон;
- высокая добротность;
- специальные режимы излучения и направленности;
- универсальная применимость к волнам любой природы;
- технологическое превосходство над известными архитектурами.

Все эти положения рассматриваются как гипотезы, требующие проверки, и переводятся в формализованную программу верификации.

1. Предмет исследования, методология и границы доказательности

1.1. Предмет настоящего тома

Настоящий том посвящён построению и анализу класса рекурсивно формируемых осесимметричных внутренних областей, определяемых посредством семейств радиальных интервалов при фиксированной осевой координате. Рассматриваемые области обозначаются Ω_n и $\Omega_{n,m}$, где n — порядок рекурсии внутренней геометрии, а m — число осевых копий в системе осевого массива.

Предмет исследования составляет не отдельная ветвь образующей и не видимый контур поверхности, а весь внутренний объём как вычислительная область для возможных последующих краевых, спектральных и волновых задач. Тем самым акцент переносится с графического описания формы на строгую параметризацию множества точек.

Первый том охватывает:

- задание базового исходного профиля;
- интервальное описание поперечных радиальных сечений;
- рекурсивный оператор построения новых интервалов;

- канонизацию полученных интервальных представлений;
- построение объёмов вращения;
- формирование осевых рядов из конечного числа экземпляров;
- геометрические функционалы площади, объёма и числа компонент;
- безразмерные параметры, управляющие формой и размещением.

Таким образом, предмет первого тома имеет структурно-геометрический и вычислительный характер.

1.2. Методологический статус геометрической волновой инженерии

В настоящей работе геометрическая волновая инженерия рассматривается не как уже завершённая универсальная физическая теория, а как исследовательская программа, в рамках которой геометрический уровень необходимо построить до формулирования обобщающих утверждений о поведении волн.

Эта позиция основана на двух соображениях. Во-первых, в задачах распространения волн и спектрального анализа используются различные уравнения: Максвелла, Гельмгольца, акустическое волновое уравнение, уравнение Шрёдингера и другие модели. Они описывают разные поля, наблюдаемые физические величины и типы граничных условий. Поэтому без отдельной проверки нельзя автоматически считать геометрию доказанно применимой ко всем таким моделям.

Во-вторых, даже при фиксированном уравнении существенные свойства — локализация, высокая добротность Q, узкие спектральные окна, направленное излучение — обусловлены не одной только сложностью формы, а совместным действием геометрии, граничных условий, масштаба и диапазона параметров.

Поэтому в первом томе принимается следующая методологическая позиция:

- геометрия строится и доказывается независимо;
- физические эффекты формулируются как гипотезы и могут считаться подтверждёнными только после полноволновой верификации.

Эта позиция определяет стиль всей монографии и сохраняется во всех последующих главах.

1.3. Терминологическое разграничение

Термин «псевдогиперболоидная область» используется в настоящем томе как специальное обозначение рекурсивно формируемой осесимметричной области, построенной на основе гиперболического исходного профиля и интервальной рекурсии. Его не следует смешивать с иными значениями терминов «псевдогиперболоид» и «гиперболоид» в:

- дифференциальной геометрии;
- теории квадрик;
- геометрии псевдоевклидовых пространств;
- релятивистских моделях и моделях пространств с различными сигнатурами.

В настоящей книге этот термин не означает классическую квадрику второго порядка. Он обозначает новый процедурно-теоретико-множественный геометрический объект: $\Omega_n = \{(\xi, \rho, \varphi) : \rho \in I_n(\xi), 0 \le \varphi < 2\pi\}$. Следовательно, содержание термина определяется не внешним визуальным сходством, а способом построения.

1.4. Уровни описания объекта

Во избежание методологического смешения понятий в теории выделяются четыре уровня описания.

Уровень 1. Формальные ветви. Порождающий каркас рекурсивной процедуры, состоящий из формальных выражений для радиусов и их смещений. На этом уровне удобно рассматривать дерево ветвей, число формальных образов и их фокальные характеристики.

Уровень 2. Интервальные сечения. Семейства множеств $I_n(\xi) \subset [0, \infty)$, определяющих допустимые радиальные состояния при фиксированной осевой координате ξ. Этот уровень является основным математическим носителем геометрии.

Уровень 3. Пространственный объём. Осесимметричная область $\Omega_n \subset \mathbb{R}^3$, восстанавливаемая из интервального графика G_n вращением вокруг оси: $\Omega_n = \{(\xi, \rho, \varphi) : \rho \in I_n(\xi), 0 \le \varphi < 2\pi\}$. Это главный вычислительный объект тома: именно на данном множестве в последующих томах будут ставиться краевые, спектральные и волновые задачи.

Уровень 4. Волновая модель. Физическая постановка на области Ω_n либо $\Omega_{n,m}$, включая выбор уравнения, граничных условий, масштаба, частоты и наблюдаемых величин. Доказательная база первого тома не распространяется на этот уровень.

Такое многоуровневое описание принципиально важно: оно не допускает подмены объёма ветвью, геометрии изображением, а гипотезы — доказанным физическим эффектом.

1.5. Основные методологические принципы

Настоящий том основывается на следующих принципах.

Принцип 1. Первичность области. Главным объектом является область Ω, пригодная для постановки задач, а не отдельная линия, поверхность или видимый контур.

Принцип 2. Операторное описание. Геометрия должна определяться посредством корректно заданных операторов, действующих на множества или функции, а не посредством описательных аналогий.

Принцип 3. Каноническое представление. Различные промежуточные представления ветвей, определяющие одно и то же радиальное множество, должны приводиться к единой канонической форме.

Принцип 4. Конечность параметризации. Каждая фигура и каждый пример должны описываться конечным набором воспроизводимых параметров.

Принцип 5. Безразмеризация. Для научного переноса между различными физическими постановками все существенные геометрические параметры должны допускать безразмерное представление.

Принцип 6. Вычислительная воспроизводимость. Любое определение, таблица или рисунок должны иметь воспроизводимую вычислительную реализацию.

Принцип 7. Фальсифицируемость физических эффектов. Волновые эффекты могут представляться только как проверяемые гипотезы с заранее определёнными критериями их опровержения.

1.6. Пределы доказательности первого тома

В первом томе доказываются исключительно положения геометрического, топологического и вычислительно-аналитического характера. В частности, устанавливаются:

- корректность интервального оператора Merge;
- 1-липшицевость элементарных радиальных преобразований;
- корректность рекурсивного построения $I_n(\xi)$;
- неотрицательность и ограниченность радиусов;
- конечность числа интервальных компонент;
- замкнутость графика семейства интервалов;
- компактность конечных областей;
- масштабная инвариантность;
- корректность функционалов площади и объёма;
- полнота интервального описания области.

Все перечисленные положения относятся к математическим свойствам конструктивной геометрии и допускают строгое доказательство в рамках принятых определений.

1.7. Границы недоказанных положений

В первом томе не доказываются и не должны формулироваться как уже установленные следующие свойства:

- существование локализованных мод;
- существование устойчивых спектральных окон;
- достижение высокой добротности Q;
- направленность излучения либо усиление в апертуре;
- возможное существование связанных состояний в континууме;
- универсальность для разных физических областей;
- технологическая оптимальность;
- превосходство над известными архитектурами по прикладным метрикам.

Эти свойства зависят не только от геометрии, но и от конкретного волнового оператора, параметров материала, граничных условий, частотного диапазона, способа возбуждения, внешней среды и величины технологических несовершенств. Следовательно, в рамках первого тома такие утверждения имеют статус гипотез, а не следствий доказанных теорем.

1.8. Роль вычислительной реализации

Программная реализация в настоящем томе рассматривается как генератор геометрии, а не как физический решатель. Это означает следующее:

- программная реализация строит интервальные сечения, области и их визуализации;
- вычисляет геометрические функционалы;
- проверяет воспроизводимость таблиц и оценок;
- не решает уравнения Максвелла, Гельмгольца, акустическое волновое уравнение или уравнение Шрёдингера;
- не служит доказательством волнового эффекта.

Следовательно, код первого тома выполняет ту же роль, что и конструктивный алгоритм в вычислительной геометрии: подтверждает воспроизводимость объекта, но не заменяет дальнейшую физическую верификацию.

1.9. Научный статус численных примеров

Приведённые в книге численные примеры выполняют три функции:

- иллюстративную — показывают типичные геометрии и их поперечные сечения;
- эталонную — задают контрольные параметры для независимой проверки;
- диагностическую — позволяют проверить корректность формул, программного кода, логики Merge и вычисления объёмов.

Однако численный пример не следует отождествлять с доказательством общей теоремы. Он не устанавливает соответствующее свойство для всех значений параметров и не заменяет строгий аналитический вывод. Поэтому численный эталон в первом томе считается элементом вычислительного стандарта, а не самостоятельным доказательством физических следствий.

1.10. Связь с известными направлениями

Геометрическая волновая инженерия в настоящем томе не провозглашается заменой существующих направлений — резонаторов шепчущей галереи (WGM), структур связанных оптических резонаторов (CROW), брэгговских архитектур, платформ связанных состояний в континууме (BIC) или классических поверхностей вращения. Её задача иная: предложить единый конструктивный язык для определения нового класса внутренних областей, которые затем можно сравнивать с известными семействами.

Таким образом, исследовательская программа строится не на отрицании предшествующих инженерных подходов, а на расширении геометрического инструментария.

1.11. Основное научное утверждение первого тома

Корректное научное утверждение настоящего тома может быть сформулировано следующим образом:

В книге вводится и строго формализуется новый класс рекурсивно формируемых осесимметричных областей, обладающий воспроизводимой параметризацией, доказуемыми

основными геометрическими свойствами и пригодный для последующей постановки волновых задач различной природы.

Более сильное утверждение — о доказанном управлении волнами любой природы и частоты — в рамках первого тома недопустимо, поскольку соответствующие физические результаты здесь ещё не установлены.

1.12. Итоги главы

В настоящей главе заложена методологическая основа всей монографии. Определено:

- что является объектом исследования;
- каков научный статус вводимого исследовательского направления;
- какие положения допустимо считать доказанными;
- где проходит граница между геометрией и физикой;
- какую роль выполняет вычислительный генератор;
- почему необходима последующая полноволновая проверка.

Тем самым создаётся научно строгая основа, на которой последующие главы будут развивать не интуитивную, а формализованную теорию рекурсивных псевдогиперболоидных областей.

2. Исходные профили и основы гиперболической геометрии

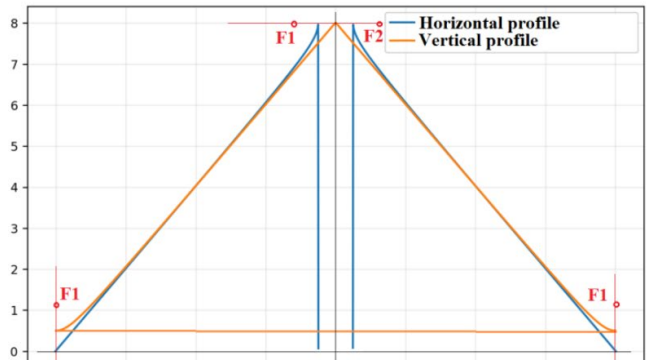

Рис. 2.1. Базовые гиперболические исходные профили для новой конфигурации: a = 0,5, b = 0,5, R = 8,0.

Примечание. Параметры рис. 2.1 имеют иллюстративный характер и выбраны для наглядности. Эталонная стандартная конфигурация атласа (глава 10) использует a = 0,05, b = 0,5, R = 10,0.

2.1. Общая идея исходного профиля

Рассматриваемое в настоящем томе рекурсивное построение начинается с базового радиального профиля, задающего исходное осесимметричное сечение. В дальнейшем этот профиль используется как порождающий объект интервальной рекурсии. Чтобы отделить общий аппарат от частного гиперболического случая, прежде всего вводится абстрактное понятие исходного профиля.

Определение 2.1. Исходный профиль. Исходным профилем называется функция $d: \mathbb{R} \to [0, \infty)$, обладающая следующими свойствами:

- функция d ограничена;
- носитель функции $\operatorname{supp} d = \{\xi \in \mathbb{R} : d(\xi) > 0\}$ компактен;
- на рассматриваемом носителе функция d по меньшей мере непрерывна;
- геометрически значимой является область $\Omega_2(d) = \{(\xi, \rho, \varphi) : 0 \le \rho \le d(\xi), 0 \le \varphi < 2\pi\}$.

Функция $d(\xi)$ интерпретируется как радиус базового сечения при фиксированной осевой координате ξ.

Комментарий 2.1. Большая часть конструктивного аппарата последующих глав зависит не от гиперболичности самой по себе, а лишь от того, что $d(\xi)$ является неотрицательной ограниченной функцией с компактным носителем. Гиперболический случай выбран в первом томе как основной аналитически удобный и геометрически выразительный исходный класс.

2.2. Два основных гиперболических типа

В настоящем томе рассматриваются два базовых способа гиперболического задания исходного профиля:

- вертикальный тип, в котором осевая координата является продольным параметром гиперболической дуги;
- горизонтальный тип, при котором гиперболическая связь задаётся в сопряжённой параметризации.

Оба типа порождают допустимые функции $d(\xi)$, однако различаются геометрией носителей и способом интерпретации фокальных характеристик.

2.3. Параметры гиперболического исходного класса

Пусть параметры $a > 0$, $b > 0$, $R > 0$. Здесь a задаёт характерный осевой масштаб; b — характерный радиальный масштаб образующей; R определяет верхний радиальный уровень открытого профиля.

Этим параметрам соответствует стандартное фокальное расстояние гиперболы $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$.

Определение 2.2. Гиперболическое фокальное расстояние. Для гиперболического исходного класса величина $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ называется фокальным расстоянием базовой образующей. Это стандартная характеристика гиперболы $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, из которой выводятся дальнейшие формулы.

2.4. Вертикальный гиперболический тип

Определение 2.3. Вертикальный исходный профиль. Пусть $L = a\sqrt{(1 + (R/b)^2)}$. Тогда вертикальный гиперболический исходный профиль определяется формулой $d_v(s) = R - b\sqrt{((|s|/a)^2 - 1)}$ при $a \le |s| \le L$ и по определению равен нулю вне этого диапазона: $d_v(s) = 0$ при $|s| < a$ либо $|s| > L$.

Соответствующая базовая область второго порядка имеет вид $\Omega_2^{(v)} = \{(s, \rho, \varphi) : 0 \le \rho \le d_v(s), 0 \le \varphi < 2\pi\}$.

Комментарий. Формула построена так, что при $|s| = a$ достигается максимальный радиус $d_v(a) = R$, а при $|s| = L$ профиль обращается в нуль: $d_v(L) = 0$. Следовательно, L является естественной продольной полудлиной носителя вертикального профиля.

Лемма 2.1. Корректное определение L. Для вертикального типа $L = a\sqrt{(1 + (R/b)^2)}$ — единственное положительное значение, при котором $d_v(L) = 0$.

Доказательство. Из условия $d_v(L) = 0$ следует $R - b\sqrt{((L/a)^2 - 1)} = 0$, то есть $(L/a)^2 = 1 + (R/b)^2$. После возведения в квадрат и выбора положительного корня получаем $L = a\sqrt{(1 + (R/b)^2)}$. Положительность L следует из $a > 0$.

2.5. Свойства вертикального типа

Лемма 2.2. Чётность и неотрицательность вертикального профиля. Функция $d_v(s)$ чётна и неотрицательна на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Чётность непосредственно следует из присутствия $|s|$ в формуле. На отрезке $a \le |s| \le L$ неотрицательность вытекает из неравенств $0 \le b\sqrt{((|s|/a)^2 - 1)} \le R$; вне носителя профиль по определению равен нулю.

Лемма 2.3. Монотонность на полуоси. На отрезке [a, L] функция $d_v(s)$ непрерывна и монотонно убывает.

Доказательство. На интервале (a, L) функция дифференцируема и $d_v'(s) = -(b/a)(s/a)/\sqrt{((s/a)^2 - 1)} < 0$ при $s > a$. Следовательно, d_v строго убывает на (a, L). Непрерывность на [a, L] очевидна из явного выражения.

Примечание 2.2. При $|s| = a$ модуль производной $d_v'(s)$ неограниченно возрастает, что соответствует естественной негладкости образующей, имеющей характер вертикального касания. Это не препятствует определению области, однако существенно для последующего обсуждения сеток и локального утолщения при дискретизации.

2.6. Горизонтальный тип

Второй базовый исходный профиль строится посредством альтернативной параметризации той же гиперболической геометрии.

Определение 2.4. Горизонтальный исходный профиль. При $|u| \le R$ определим функцию $x_h(u) = a\sqrt{(1 + ((R - |u|)/b)^2)}$. Тогда горизонтальный гиперболический исходный профиль задаётся равенством $d_h(u) = x_h(u)$ при $|u| \le R$ и полагается равным нулю вне отрезка $[-R, R]$: $d_h(u) = 0$ при $|u| > R$.

Соответствующая базовая область второго порядка: $\Omega_2^{(h)} = \{(u, \rho, \varphi) : 0 \le \rho \le d_h(u), 0 \le \varphi < 2\pi\}$.

Комментарий. Для горизонтального типа $d_h(0) = a\sqrt{(1 + (R/b)^2)} = L$, $d_h(R) = a$. Следовательно, в этой параметризации максимальный радиус достигается при $u = 0$, а минимальный положительный радиус — на краях носителя.

Лемма 2.4. Функция $d_h(u)$ чётна, непрерывна и удовлетворяет оценкам $a \le d_h(u) \le L$ при $|u| \le R$.

Доказательство. Чётность следует из зависимости от $|u|$. Непрерывность очевидна. Поскольку $0 \le R - |u| \le R$, имеем $((R - |u|)/b)^2 \le (R/b)^2$. Умножая на a и извлекая квадратный корень, получаем $d_h(u) = a\sqrt{(1 + ((R - |u|)/b)^2)} \le a\sqrt{(1 + (R/b)^2)} = L$.

2.7. Связь вертикального и горизонтального типов

Оба профиля происходят из одной гиперболической зависимости, однако используют различные способы задания координат.

- Для вертикального типа осевой параметр пробегает диапазон $a \le |s| \le L$, а радиус уменьшается от R до 0.
- Для горизонтального типа осевой параметр удовлетворяет условию $|u| \le R$, а радиус меняется от L до a.

Поэтому вертикальный и горизонтальный типы не тождественны как исходные профили, хотя связаны общей гиперболической геометрией.

Примечание 2.3. С точки зрения последующей интервальной рекурсии оба типа равноправны: весь аппарат глав 3–10 применим к каждому из них без изменения определений оператора C_R и операции Merge.

2.8. Фокальная структура базовой гиперболы

В данном томе фокусы выполняют вспомогательную геометрическую функцию: они характеризуют исходную гиперболическую образующую и её формальные рекурсивные смещения, но сами по себе не являются доказанными центрами трёхмерной фокусировки поля.

Это различие принципиально: фокус гиперболы как плоской кривой и фокусировка волны в трёхмерной области — разные понятия.

Определение 2.5. Базовые фокусы вертикального типа. Для вертикального исходного профиля базовые фокусы располагаются в плоскости (ρ, ξ) в точках $F_v\pm = (R, \pm c)$, где $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Если на полном двумерном сечении отображается также радиальное зеркальное отражение, добавляются симметричные точки $(-R, c)$.

Определение 2.6. Базовые фокусы горизонтального типа. Для горизонтального исходного профиля основные фокусы в плоскости (ρ, ξ) имеют координаты $F_h\pm = (\pm c, R)$, где $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, если применяется стандартная интерпретация горизонтальной гиперболы; при построении полного симметричного сечения добавляются соответствующие зеркальные по знаку точки.

Примечание 2.4. Конкретный способ записи координат фокусов зависит от того, какая ось интерпретируется как радиальная, а какая — как осевая. В настоящем томе предполагается, что фокальные координаты вычисляются из фактически используемой параметризации гиперболической дуги, а не добавляются к изображению декоративно.

2.9. Формальные смещения гиперболических дуг

Рекурсивная геометрия последующих глав будет строиться на радиальных смещениях исходного профиля. Поэтому уже на начальном уровне необходимо определить класс формальных гиперболических дуг, возникающих после таких преобразований.

Определение 2.7. Формальная рекурсивная гиперболическая дуга. Формальной рекурсивной дугой называется функция вида $r(\xi) = C + \sigma \cdot d(\xi)$, $\sigma \in \{+1, -1\}$, где $C \ge 0$ — радиальное смещение, а $d(\xi)$ — выбранный исходный профиль.

Для гиперболического исходного класса такая дуга сохраняет гиперболический характер в том смысле, что получается из базовой образующей отражением и параллельным переносом вдоль радиальной координаты.

Замечание 2.5. Формальные дуги удобны для:

- построения двумерных сечений;

- вычисления таблиц фокусов;
- визуального анализа дерева ветвей;
- установления связи между интервальным описанием и графическим представлением.

Тем не менее главным геометрическим объектом последующей теории служит не набор дуг, а объединённый объём, полученный после интервальной рекурсии и канонизации Merge.

2.10. Регулярность и ограничения исходных профилей

Для применения последующего аппарата достаточно потребовать от исходного профиля базовой регулярности. Для гиперболического случая справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.1. Допустимость базовых гиперболических профилей. Функции d_v и d_h являются допустимыми исходными профилями в смысле определения 2.1.

Доказательство. Обе функции неотрицательны, ограничены и имеют компактные носители: для d_v носитель содержится в $[-L, -a] \cup [a, L]$ и после замыкания включает граничные точки; для d_h носитель содержится в $[-R, R]$. Обе функции непрерывны на своих носителях. Следовательно, выполнены все условия определения исходного профиля.

Примечание 2.6. В вертикальном случае базовая область второго порядка имеет осевой промежуток вблизи $|s| < a$, где исходный профиль равен нулю. В горизонтальном случае, напротив, область заполнена вдоль всей осевой полосы $[-R, R]$. Это различие существенно для последующего числа компонент после рекурсии.

2.11. Базовые геометрические величины второго порядка

Поскольку дальнейшая рекурсия строится начиная со второго порядка, полезно уже на исходном уровне установить естественные оценки.

Определение 2.8. Максимальный радиус второго порядка. Для заданного исходного профиля $d(\xi)$ положим $M_2 = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} d(\xi)$. Для рассматриваемых гиперболических типов имеем $M_2^{(v)} = R$, $M_2^{(h)} = L = a\sqrt{(1 + (R/b)^2)}$.

Лемма 2.5. Максимумы базовых гиперболических профилей. Для вертикального типа максимум достигается при $|s| = a$, а для горизонтального типа — при $u = 0$.

Доказательство. Для вертикального типа утверждение следует из леммы 2.3 и равенства $d_v(a) = R$. Для горизонтального типа оно следует из зависимости от $|u|$: величина $R - |u|$ максимальна при $u = 0$, откуда $d_h(0) = L$.

2.12. Роль гиперболического класса в общей теории

Хотя в последующих главах главным образом используются язык интервалов и операторный аппарат, гиперболический исходный класс играет особую роль по трём причинам.

- Аналитическая выразительность. Формулы для d_v, d_h, L и c заданы в замкнутом виде, что облегчает теоретический анализ и численную верификацию.
- Геометрическая интерпретируемость. Гипербола обладает естественными фокальными характеристиками, полезными для двумерных построений и анализа формальных дуг.

- Инженерная выразительность. Даже до полноволновой проверки гиперболическая геометрия представляет интерес как класс профилей с резко изменяющимся радиусом, допускающий последующее рекурсивное формирование множества радиальных зон.

При этом теория не ограничивается гиперболой: после построения общего интервального аппарата функцию $d(\xi)$ можно заменить другими исходными профилями, если они удовлетворяют основным условиям допустимости.

2.13. Итоги главы

В этой главе введён исходный геометрический уровень всей теории — начальные профили. Получены следующие результаты:

- дано общее определение допустимого исходного профиля;
- введены два основных гиперболических типа — вертикальный и горизонтальный;
- определены параметры a, b, R, а также производные величины $L = a\sqrt{(1 + (R/b)^2)}$ и $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$;
- установлены основные свойства профилей: чётность, неотрицательность, ограниченность и компактность носителя;
- введено понятие формальной рекурсивной гиперболической дуги;
- зафиксирована вспомогательная роль фокусов и отделена их геометрическая интерпретация от волновой.

Тем самым подготовлена исходная геометрическая база для следующей главы, в которой будет построено пространство интервальных состояний и строго определена операция Merge.

3. Пространство интервальных состояний и операция Merge

3.1. Мотивация интервального описания

Основной переход, на котором строится вся дальнейшая теория, заключается в замене наглядного описания поверхности строгим описанием поперечного радиального множества при фиксированной осевой координате. Для каждого значения осевой переменной ξ рассматривается не единственное значение радиуса и не отдельная ветвь образующей, а конечное множество допустимых радиальных значений. Именно это множество кодируется объединением замкнутых интервалов на полуоси $[0, \infty)$.

Такой язык удобен по двум причинам. Во-первых, он естественным образом согласуется с осевой симметрией: вся геометрия при фиксированном ξ сводится к радиальным диапазонам. Во-вторых, он допускает строгое рекурсивное действие операторов без необходимости каждый раз обращаться к полной трёхмерной визуализации.

В настоящей главе вводится пространство интервальных состояний, устанавливается его каноническое представление и строго определяется операция Merge, которая будет играть центральную роль во всей последующей рекурсии.

3.2. Пространство интервальных состояний

Определение 3.1. Интервальное состояние. Интервальным состоянием на $[0, \infty)$ называется множество $X \subset [0, \infty)$, представляющее собой конечное объединение замкнутых ограниченных

интервалов. Допускается также пустое множество. Совокупность всех таких состояний обозначается $\mathcal{I}([0, \infty))$.

Таким образом, $\mathcal{I}([0, \infty)) = \{X \subset [0, \infty) : X = \emptyset$ либо $X = \bigcup_{j=1}^{N} [\alpha_j, \beta_j], 0 \le \alpha_j \le \beta_j < \infty, N < \infty\}$.

Комментарий 3.1. О вырожденных интервалах. Интервалы вида [x, x] допускаются и считаются корректными элементами $\mathcal{I}([0, \infty))$. Их длина равна нулю; они не дают вклада в площадь и объём, но могут иметь значение для топологического и граничного описания. Это соглашение устраняет неоднозначность между пустым множеством и вырожденным радиальным контактом.

3.3. Каноническое представление

Одно и то же интервальное состояние может быть записано множеством способов. Например, [0, 1] ∪ [1, 2] = [0, 2], [0, 2] ∪ [0, 1] = [0, 2]. Поэтому необходимо выделить единственную каноническую форму записи.

Определение 3.2. Каноническое представление. Каноническим представлением $X \in \mathcal{I}([0, \infty))$ называется запись $X = \bigcup_{j=1}^{N} [\alpha_j, \beta_j]$, удовлетворяющая условиям:

- $N \ge 0$;
- $0 \le \alpha_j \le \beta_j < \infty$;
- интервалы упорядочены по возрастанию левых концов: $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_N$;
- любые два соседних интервала разделены положительным промежутком: $\beta_j < \alpha_{j+1}$ для всех $j = 1, \ldots, N - 1$.

Если $N = 0$, то $X = \emptyset$. Требование положительного промежутка означает, что в канонической записи не допускаются ни пересечения, ни соприкосновения соседних интервалов.

Лемма 3.1. Существование и единственность канонического представления. Каждое множество $X \in \mathcal{I}([0, \infty))$ имеет единственное каноническое представление.

Доказательство. Существование. Пусть $X = \bigcup_{j=1}^{N} [\alpha_j, \beta_j]$ — произвольное конечное интервальное представление. Упорядочим интервалы по их левым концам и последовательно объединим все соседние интервалы, которые пересекаются или соприкасаются. После конечного числа шагов получим семейство попарно непересекающихся интервалов, разделённых положительными промежутками. Полученная запись задаёт то же множество X.

Единственность. Предположим, что $X = [\alpha_1, \beta_1] \cup \cdots \cup [\alpha_N, \beta_N] = [\tilde{a}_1, \tilde{b}_1] \cup \cdots \cup [\tilde{a}_M, \tilde{b}_M]$ — два канонических представления одного множества X. Самая левая граничная точка X однозначно определяется самим множеством, поэтому $\alpha_1 = \tilde{a}_1$. Поскольку оба представления канонические, связная компонента X с началом в α_1 представляет собой единственный максимальный интервал X с данным левым концом. Следовательно, $\beta_1 = \tilde{b}_1$. Удалив первую компоненту из обоих представлений и повторив рассуждение по индукции, получаем $N = M$, $\alpha_j = \tilde{a}_j$ и $\beta_j = \tilde{b}_j$ для всех $j = 1, 2, \ldots, N$. Лемма доказана. ■

3.4. Оператор Merge

Теперь оператор канонизации можно определить строго.

Определение 3.3. Оператор Merge. Оператор Merge: $\mathcal{I}([0, \infty)) \to \mathcal{I}([0, \infty))$ сопоставляет каждому интервальному состоянию X его каноническое представление. Иными словами, Merge(X)

содержит те же точки, что и X, но записано как единое семейство попарно непересекающихся интервалов с положительными промежутками.

Примечание 3.2. Оператор Merge не изменяет само множество как подмножество $[0, \infty)$; он изменяет только его представление. Поэтому в строгом теоретико-множественном смысле Merge следует рассматривать как нормализатор представления, а не как геометрическую деформацию.

Теорема 3.1. Корректность оператора Merge. Для любого $X \in \mathcal{I}([0, \infty))$ оператор Merge обладает следующими свойствами:

- сохранение множества точек: $\mathrm{Merge}(X) = X$ как подмножество $[0, \infty)$;
- каноничность результата: $\mathrm{Merge}(X)$ записывается в канонической форме;
- идемпотентность: $\mathrm{Merge}(\mathrm{Merge}(X)) = \mathrm{Merge}(X)$;
- единственность нормализации: если Y — каноническое представление того же множества X, то $Y = \mathrm{Merge}(X)$.

Доказательство. Первое утверждение следует из способа построения: каждое локальное объединение заменяет пару пересекающихся или соприкасающихся интервалов точным интервалом их объединения. Второе следует из завершённости алгоритма объединения. Третье обусловлено тем, что каноническая форма уже не содержит пересечений и касаний, поэтому повторная нормализация ничего не меняет. Четвёртое непосредственно следует из леммы 3.1.

3.5. Интервальные состояния как конечные компоненты

Каноническое представление позволяет однозначно говорить о числе компонент.

Определение 3.4. Число интервальных компонент. Пусть $X = \bigcup_{j=1}^{N} [\alpha_j, \beta_j]$ — каноническое представление. Число N называется числом интервальных компонент и обозначается $N_comp(X) = N$. Для пустого множества полагается $N_comp(\emptyset) = 0$.

Эта характеристика далее используется при анализе топологии сечений и численной диагностике результатов Merge.

3.6. Элементарные отображения радиуса

Рекурсивное построение последующих глав основано на двух простых преобразованиях радиальной координаты: отражении со смещением и отсечением отрицательной части, а также переносе вправо.

Определение 3.5. Элементарные радиальные отображения. Для каждого $R \geq 0$ определим на радиальной полуоси $[0, \infty)$ две функции:

— разностное отображение $g_R(r) = \max(R - r, 0)$, отражающее радиус r относительно уровня R и обрезающее отрицательные значения до нуля;

— суммарное отображение $h_R(r) = R + r$, переносящее радиус r на величину R.

Первое отображение порождает разностную зону, второе — суммарную зону.

Лемма 3.2. Свойство 1-липшицевости элементарных отображений. Отображения g_R и h_R не увеличивают расстояния на $[0, \infty)$. Точнее, для любых $r_1, r_2 \geq 0$ выполняются оценки $|g_R(r_1) - g_R(r_2)| \leq |r_1 - r_2|$ и $|h_R(r_1) - h_R(r_2)| = |r_1 - r_2|$.

Доказательство. Отображение $r \mapsto R - r$ является изометрией вещественной прямой $\mathbb{R}$ с обращением ориентации. Отображение $y \mapsto \max(y, 0)$ есть метрическая проекция $\mathbb{R}$ на замкнутую полуось $[0, \infty)$, а значит, оно 1-липшицево. Их композиция в точности даёт $g_R(r) = \max(R - r, 0)$, откуда следует первая оценка. Для h_R имеем $|h_R(r_1) - h_R(r_2)| = |(R + r_1) - (R + r_2)| = |r_1 - r_2|$, то есть h_R является изометрией.

Примечание 3.3. Лемма 3.2 имеет не только техническое, но и концептуальное значение: на уровне радиальных отображений рекурсия не растягивает локальные расстояния более чем в единицу. Это обеспечивает устойчивость интервальной динамики к небольшим изменениям исходного радиуса.

3.7. Действие элементарных отображений на интервал

Пусть задан интервал $[\alpha, \beta] \subset [0, \infty)$, где $\alpha \le \beta$. Тогда его образы при отображениях g_R и h_R вычисляются явно.

Лемма 3.3. Образы замкнутого интервала. Для любых $R \ge 0$ и $[\alpha, \beta] \subset [0, \infty)$ справедливы формулы $g_R([\alpha, \beta]) = [\max(R - \beta, 0), \max(R - \alpha, 0)]$ и $h_R([\alpha, \beta]) = [R + \alpha, R + \beta]$.

Доказательство. Функция g_R монотонно не возрастает по r, поэтому образ интервала вновь является интервалом, причём значения на концах меняются местами: $g_R(\beta) = \max(R - \beta, 0)$, $g_R(\alpha) = \max(R - \alpha, 0)$. Отсюда следует первая формула. Функция h_R строго возрастает, поэтому $h_R([\alpha, \beta]) = [h_R(\alpha), h_R(\beta)] = [R + \alpha, R + \beta]$.

3.8. Рекурсивный оператор на одном интервале

Теперь можно ввести основной элементарный оператор, применяемый на каждом шаге рекурсии.

Определение 3.6. Оператор C_R на отдельном интервале. Для $R \ge 0$ и $[\alpha, \beta] \subset [0, \infty)$ определим $C_R([\alpha, \beta]) = g_R([\alpha, \beta]) \cup h_R([\alpha, \beta])$, или, что эквивалентно, $C_R([\alpha, \beta]) = [\max(R - \beta, 0), \max(R - \alpha, 0)] \cup [R + \alpha, R + \beta]$.

Первая часть называется разностной зоной, вторая — суммарной зоной.

Примечание 3.4. Оператор C_R действует на радиальный интервал, а не на весь трёхмерный объём. Его назначение — порождать новые допустимые радиусы при фиксированной осевой координате.

3.9. Локальная геометрия двух зон

Для дальнейшего анализа важно установить взаимное расположение разностной и суммарной зон, порождённых одним и тем же интервалом.

Теорема 3.2. Локальное разделение двух зон одного интервала. Пусть $[\alpha, \beta] \subset [0, \infty)$, $R \ge 0$. Обозначим $D_R([\alpha, \beta]) = [\max(R - \beta, 0), \max(R - \alpha, 0)]$ и $S_R([\alpha, \beta]) = [R + \alpha, R + \beta]$. Тогда:

- если $\alpha > 0$, зоны $D_R([\alpha, \beta])$ и $S_R([\alpha, \beta])$ разделены положительным промежутком;
- если $\alpha = 0$, они соприкасаются в единственной точке R;
- пересечение $D_R([\alpha, \beta]) \cap S_R([\alpha, \beta])$ никогда не содержит интервала положительной длины.

Доказательство. Правая граница разностной зоны равна $\max(R - \alpha, 0)$, левая граница суммарной зоны — $R + \alpha$. Если $\alpha > 0$, то $\max(R - \alpha, 0) \le R - \alpha < R + \alpha$; следовательно, между зонами имеется

положительный промежуток. Если $\alpha = 0$, то $\max(R - \alpha, 0) = R = R + \alpha$, так что зоны соприкасаются только в точке R. Поскольку правая граница D_R не превышает R, а левая граница S_R не меньше R, их пересечение не может содержать интервал положительной длины.

Примечание 3.5. Теорема 3.2 относится только к двум зонам, порождённым одним интервалом. После объединения результатов от нескольких различных интервалов возможны дополнительные пересечения, соприкосновения и слияния, устраняемые оператором Merge.

3.10. Действие C_R на полное интервальное состояние

Поскольку любой элемент $\mathcal{I}([0, \infty))$ является конечным объединением интервалов, оператор C_R естественным образом продолжается на всё интервальное состояние посредством объединения образов его компонент.

Определение 3.7. Оператор C_R на полном пространстве состояний $\mathcal{I}([0, \infty))$. Пусть X имеет каноническое представление $X = [\alpha_1, \beta_1] \cup [\alpha_2, \beta_2] \cup \cdots \cup [\alpha_N, \beta_N] \in \mathcal{I}([0, \infty))$. Определим необработанный оператор C_R покомпонентно: $C_R(X) = C_R([\alpha_1, \beta_1]) \cup C_R([\alpha_2, \beta_2]) \cup \cdots \cup C_R([\alpha_N, \beta_N])$.

В общем случае результат является конечным объединением интервалов в неканонической форме: зоны, порождённые разными компонентами, могут пересекаться или соприкасаться. Канонизация выполняется отдельно оператором Merge (определение 3.3). Для пустого множества $C_R(\emptyset) = \emptyset$.

Примечание 3.6. Определение корректно, поскольку объединение конечного числа элементов $\mathcal{I}([0, \infty))$ вновь принадлежит $\mathcal{I}([0, \infty))$. После этого к результату можно применить Merge и привести его к канонической форме.

3.11. Монотонность оператора C_R

Хотя основная рекурсия будет введена в следующей главе, полезно уже сейчас установить естественное свойство включения.

Теорема 3.3. Монотонность оператора C_R. Пусть $X, Y \in \mathcal{I}([0, \infty))$ и $X \subseteq Y$. Тогда для любого $R \geq 0$ выполняется $C_R(X) \subseteq C_R(Y)$. Следовательно, $\text{Merge}(C_R(X)) \subseteq \text{Merge}(C_R(Y))$.

Доказательство. Поскольку $X \subseteq Y$, каждый интервал X содержится в некотором интервале Y. Поэтому $g_R(X) \subseteq g_R(Y)$ и $h_R(X) \subseteq h_R(Y)$, то есть все точки, порождённые из X, входят в множество точек, порождённых из Y. Отсюда $C_R(X) \subseteq C_R(Y)$. Поскольку Merge не изменяет исходного множества точек, включение сохраняется после канонизации.

Примечание 3.7. Монотонность важна для устойчивости рекурсии: расширение исходного радиального множества не может привести к уменьшению результата на следующем шаге.

3.12. Канонизация после C_R

В последующих главах основной рабочей операцией будет не просто C_R, а $\text{Merge} \circ C_R$. Причина заключается в том, что действие C_R на каноническое интервальное состояние, вообще говоря, создаёт новые пересечения между зонами различных компонент, тогда как Merge возвращает результат к единственной нормальной форме.

Определение 3.8. Нормализованный рекурсивный шаг. Для $X \in \mathcal{I}([0, \infty))$ и $R \geq 0$ определим нормализованный рекурсивный шаг $\check{C}_R(X) = \mathrm{Merge}(C_R(X))$. Именно этот нормализованный оператор используется в главе 4 при построении последовательности $I_n(\xi)$.

3.13. Примеры элементарных интервальных преобразований

Для наглядности рассмотрим несколько простых примеров.

Пример 3.1. Для базового интервала $[0, d]$ имеем $C_R([0, d]) = [\max(R - d, 0), R] \cup [R, R + d]$. После Merge получаем один интервал $[R - d, R + d]$, если $d \leq R$, и один интервал $[0, R + d]$, если $d \geq R$. В обоих случаях соприкосновение происходит в точке R, поскольку левая зона заканчивается в R, а правая начинается в R.

Пример 3.2. Для интервала $[\alpha, \beta]$ при $\alpha > 0$ всегда возникают две зоны с положительным промежутком: $[\max(R - \beta, 0), \max(R - \alpha, 0)]$ и $[R + \alpha, R + \beta]$. Следовательно, объединение возможно только за счёт пересечения с зонами, порождёнными другими интервалами.

Пример 3.3. Если $X = [0, 1] \cup [2, 3]$, то $C_R(X)$ до Merge порождает до четырёх интервальных компонент. После Merge их число может уменьшаться в зависимости от R.

Эти простые примеры показывают, что фактическое число компонент результата определяется не только количеством формальных ветвей, но и их взаимным геометрическим расположением.

3.14. Интервальная алгебра как основа дальнейшей теории

Введённое пространство $\mathcal{I}([0, \infty))$ вместе с необработанным оператором C_R, оператором канонизации Merge и нормализованным шагом $\check{C}_R = \mathrm{Merge} \circ C_R$ образуют минимальную алгебраическую основу всего дальнейшего построения. Их функции распределены следующим образом:

- $\mathcal{I}([0, \infty))$ задаёт класс допустимых радиальных состояний;
- C_R порождает новые радиальные зоны — разностную и суммарную — из каждого существующего интервала, но не приводит результат к канонической форме;
- Merge устраняет избыточность представления и создаёт каноническую форму;
- $\check{C}_R = \mathrm{Merge} \circ C_R$ реализует один полный нормализованный шаг рекурсии, переводящий каноническое интервальное состояние в каноническое состояние следующего порядка.

3.15. Итоги главы

В настоящей главе введены основные интервальные структуры теории.

- Определено пространство интервальных состояний $\mathcal{I}([0, \infty))$.
- Зафиксирован статус вырожденных интервалов $[x, x]$.
- Введено каноническое представление конечного объединения интервалов.
- Доказаны существование и единственность канонической формы.
- Строго определён оператор Merge и доказана его корректность.
- Введены элементарные радиальные отображения g_R и h_R и доказана их 1-липшицевость.

- Оператор C_R определён как для отдельного интервала, так и для общего интервального состояния.
- Уточнён и строго сформулирован локальный критерий взаимного расположения двух зон одного интервала.
- Доказана монотонность оператора C_R.
- Введён нормализованный рекурсивный шаг Č_R(X) = Merge(C_R(X)).

Таким образом, построен полный локальный интервальный аппарат, необходимый для определения рекурсии высших порядков и построения областей Ω_n в следующей главе.

4. Рекурсивное построение $I_n(\xi)$, ограниченность, конечность числа компонент и компактность областей

4.1. Переход от локальной алгебры интервалов к глобальной рекурсии

В предыдущей главе был построен локальный интервальный аппарат при фиксированной осевой координате ξ. В данной главе выполняется следующий шаг: вводится рекурсивная последовательность интервальных состояний $I_n(\xi) \in \mathcal{J}([0, \infty))$, определяющая геометрию n-го порядка.

Именно семейство $I_n(\xi)$, а не совокупность формальных ветвей, представляет собой основной геометрический объект теории. После задания $I_n(\xi)$ вся пространственная область восстанавливается вращением соответствующих радиальных сечений вокруг оси.

В этой главе: (1) строго определяется $I_n(\xi)$ для всех конечных n; (2) доказываются неотрицательность и ограниченность радиусов; (3) оценивается число интервальных компонент; (4) доказывается замкнутость графика семейства $I_n(\xi)$; (5) устанавливается компактность Ω_n и $\Omega_{n,m}$; (6) формулируется полнота интервального описания.

4.2. Исходное состояние второго порядка

Пусть задан исходный профиль $d: \mathbb{R} \to [0, \infty)$, удовлетворяющий условиям главы 2.

Определение 4.1. Второй порядок. Интервальное семейство второго порядка определяется как $I_2(\xi) = [0, d(\xi)]$. Если вырожденные интервалы сохраняются на топологическом уровне, то в точках $d(\xi) = 0$ сечение представляет собой вырожденный интервал [0, 0].

Эквивалентно, в теоретико-множественной записи можно использовать $I_2(\xi) = [0, d(\xi)]$, понимая при $d(\xi) = 0$ этот интервал как вырожденный.

Замечание 4.1. Такое соглашение существенно для строгой топологии конструкции. Если нулевые интервалы исключаются из перечня компонент в инженерных таблицах, это необходимо отдельно оговаривать как соглашение о визуализации либо об объёмном представлении, но не как базовое математическое определение.

4.3. Рекурсивный переход к следующему порядку

Пусть задана последовательность смещений $R_1, R_2, \ldots, R_{n-2}$, где $R_k \geq 0$.

Определение 4.2. Рекурсивный шаг. Для каждого $k \geq 2$ интервальное состояние следующего порядка определяется применением нормализованного рекурсивного шага:

$$I_{k+1}(\xi) = \check{C}_{R_{k-1}}(I_k(\xi)) = Merge(C_{R_{k-1}}(I_k(\xi))).$$

Иными словами, берётся текущее интервальное состояние $I_k(\xi)$; к нему применяется исходный оператор рекурсии $C_{R_{k-1}}$, формирующий конечное объединение зон разности и суммы; затем оператор Merge приводит полученное объединение к каноническому виду.

Если записать это явно через компоненты канонического представления, то при

$$I_k(\xi) = [\alpha_1(\xi), \beta_1(\xi)] \cup [\alpha_2(\xi), \beta_2(\xi)] \cup \ldots \cup [\alpha_{N_k(\xi)}(\xi), \beta_{N_k(\xi)}(\xi)]$$

получаем:

$$I_{k+1}(\xi) = Merge\left(\bigcup_j C_{R_{k-1}}([\alpha_j(\xi), \beta_j(\xi)]) \right).$$

Замечание 4.2. Важнейший методологический момент состоит в том, что оператор очередного шага действует на уже построенный интервальный результат $I_k(\xi)$, а не заново на исходный профиль. Следовательно, рекурсия действительно накапливает структуру порядков.

4.4. Корректность рекурсивного определения

Теорема 4.1. Корректность определения $I_n(\xi)$. Пусть d — допустимый исходный профиль и $R_k \geq 0$ для всех k. Тогда для любого конечного $n \geq 2$ и любого $\xi \in \mathbb{R}$ интервальное состояние $I_n(\xi) \in \mathcal{J}([0, \infty))$ корректно определено.

Доказательство. База индукции n = 2 очевидна, поскольку $I_2(\xi) = [0, d(\xi)] \in \mathcal{J}([0, \infty))$.

Индукционный переход: пусть $I_k(\xi) \in \mathcal{J}([0, \infty))$. Тогда $C_{R_{k-1}}(I_k(\xi))$ по определению 3.7 представляет собой конечное объединение интервалов, а оператор Merge переводит его в каноническое интервальное состояние, которое согласно теореме 3.1 снова принадлежит $\mathcal{J}([0, \infty))$. Следовательно, $I_{k+1}(\xi) \in \mathcal{J}([0, \infty))$. Индукция завершена.

4.5. Неотрицательность радиусов

Теорема 4.2. Неотрицательность всех интервальных состояний. При любом конечном $n \geq 2$, любом $\xi \in \mathbb{R}$ и любом интервале $[\alpha, \beta] \subset I_n(\xi)$ выполняется включение $[\alpha, \beta] \subset [0, \infty)$. Иначе говоря, $I_n(\xi) \subset [0, \infty)$ для всех n и ξ.

Доказательство. База n = 2: $I_2(\xi) = [0, d(\xi)] \subset [0, \infty)$ по определению исходного профиля.

Индукционный переход: пусть $I_k(\xi) \subset [0, \infty)$. Для любого интервала $[\alpha, \beta] \subset I_k(\xi)$ обе части — $[\max(R_{k-1} - \beta, 0), \max(R_{k-1} - \alpha, 0)]$ и $[R_{k-1} + \alpha, R_{k-1} + \beta]$ — содержатся в $[0, \infty)$. Их конечное объединение также содержится в $[0, \infty)$, а Merge не изменяет множество точек. Следовательно, $I_{k+1}(\xi) \subset [0, \infty)$. Индукция завершена.

4.6. Верхняя оценка радиуса

Для каждого порядка естественно определить максимально возможный радиус.

Определение 4.3. Верхняя радиальная оценка. Положим:

$$M_n = \sup \{\rho : \xi \in \mathbb{R}, \rho \in I_n(\xi)\}.$$

Если множество $\{\rho : \rho \in I_n(\xi)\}$ пусто, внутренний супремум принимается равным нулю.

Теорема 4.3. Ограниченность радиуса. Для любого конечного $n \geq 2$ справедлива оценка:

$M_n \leq M_2 + \sum_{k=1}^{n-2} R_k$.

Доказательство. База $n = 2$ тривиальна. Предположим, что при некотором $k \geq 2$ каждый интервал $[\alpha, \beta] \subset I_k(\xi)$ удовлетворяет $\beta \leq M_k$. Тогда из формулы для $C_{R_{k-1}}$ следует: в зоне суммы $R_{k-1} + \beta \leq R_{k-1} + M_k$; в зоне разности после отсечения отрицательной части $\max(R_{k-1} - \alpha, 0) \leq R_{k-1}$. Таким образом, максимальный радиус после шага $k \to k + 1$ не превышает $M_{k+1} \leq R_{k-1} + M_k$. По индукции $M_n \leq M_2 + \sum_{k=1}^{n-2} R_k$.

Замечание 4.3. Теорема 4.3 даёт грубую, но универсальную верхнюю границу. Она важна для доказательства компактности, численного масштабирования и выбора ограничивающих расчётных областей в будущих волновых моделях.

4.7. Оценка числа интервальных компонент

Рекурсия порождает ветвление, однако число реальных компонент после Merge остаётся конечным и поддаётся оценке.

Определение 4.4. Число компонент сечения. Если каноническое представление $I_n(\xi)$ состоит из $N_n(\xi)$ интервалов, то величина $N_n(\xi)$ называется числом интервальных компонент на уровне n в сечении ξ.

Теорема 4.4. Конечность и оценка числа компонент. Для любого ξ и $n \geq 2$ число компонент конечно и удовлетворяет оценке:

$N_n(\xi) \leq 2^{n-2}$.

Более точно, если $N_k(\xi) = N$, то $N_{k+1}(\xi) \leq 2N$.

Доказательство. Каждый интервал $I_k(\xi)$ под действием $C_{R_{k-1}}$ порождает не более двух интервалов — зону разности и зону суммы. Следовательно, до применения Merge число интервалов не превосходит $2N_k(\xi)$. После применения Merge число компонент может только уменьшиться, поэтому $N_{k+1}(\xi) \leq 2N_k(\xi)$. Поскольку $N_2(\xi) = 1$ для всех ξ, рекурсия даёт $N_n(\xi) \leq 2^{n-2}$.

Замечание 4.4. Оценка 2^{n-2} совпадает с числом формальных ветвей лишь в качестве верхней границы. Реальное число компонент после Merge, вообще говоря, меньше и зависит от геометрии пересечений и касаний.

4.8. Дерево ветвей и интервальный результат

Теорема 4.4 показывает, что дерево ветвей и итоговый геометрический объект не тождественны. Формальное удвоение ветвей на каждом шаге задаёт только максимальное число потенциальных радиальных зон. Реальное число компонент определяется канонизацией после взаимных пересечений, касаний и объединений.

Это различие принципиально для всей теории: рекурсия порождает формальный комбинаторный рост, тогда как операция Merge преобразует его в физически значимое геометрическое множество.

4.9. Замкнутость графика семейства интервалов

Для доказательства компактности области необходима не только ограниченность радиусов, но и замкнутость множества всех допустимых пар (ξ, ρ).

Определение 4.5. График семейства интервалов. Для каждого $n \geq 2$ определим:

$G_n = \{(\xi, \rho) \in \mathbb{R}^2 : \rho \in I_n(\xi)\}$.

Теорема 4.5. Замкнутость графика G_n. Пусть исходный профиль $d(\xi)$ непрерывен и имеет компактный носитель. Тогда при любом конечном $n \geq 2$ график $G_n \subset \mathbb{R}^2$ является замкнутым множеством. Более того, при ограничении компактным осевым носителем и конечной радиальной границей он компактен.

Доказательство. Применим индукцию и используем компактность, чтобы избежать неверного вывода о том, что произвольный непрерывный образ замкнутого множества всегда замкнут.

База $n = 2$. Имеем $G_2 = \{(\xi, \rho): 0 \leq \rho \leq d(\xi)\}$. Поскольку d непрерывна, множество $\{(\xi, \rho): \rho - d(\xi) \leq 0\}$ является прообразом замкнутого интервала $(-\infty, 0]$ при непрерывном отображении $(\xi, \rho) \mapsto \rho - d(\xi)$. Пересечение с замкнутым полупространством $\rho \geq 0$ и с компактным осевым носителем даёт замкнутое и ограниченное множество; следовательно, соответствующий график компактен.

Индукционный переход. Пусть G_k компактен. Отображения $(\xi, \rho) \mapsto (\xi, g_\{R_{k-1}\}(\rho))$ и $(\xi, \rho) \mapsto (\xi, h_\{R_{k-1}\}(\rho))$ непрерывны. Поэтому образы G_k при этих отображениях компактны. Их конечное объединение также компактно, а значит, замкнуто. Оператор Merge не изменяет множество точек на плоскости (ξ, ρ), а только канонизирует представление интервалов. Следовательно, G_{k+1} компактен и замкнут. Теорема доказана.

Замечание 4.5. Содержательный смысл теоремы 4.5 состоит в том, что при непрерывном исходном профиле в процессе рекурсии не теряются «предельные радиальные точки»: семейство $I_n(\xi)$ задаёт корректное замкнутое множество на плоскости (ξ, ρ).

4.10. Пространственная область Ω_n

Теперь перейдём от двумерного графика G_n к осесимметричному объёму.

Определение 4.6. Область n-го порядка. Для каждого $n \geq 2$ определим осесимметричную область:

$\Omega_n = \{(\xi, \rho, \varphi): (\xi, \rho) \in G_n,\ 0 \leq \varphi < 2\pi\}$.

Здесь ρ обозначает радиальную координату цилиндрической системы, а φ — угловую переменную.

Замечание 4.6. Поскольку вращение не изменяет осевую координату, а каждое радиальное сечение преобразует в круговое, объект Ω_n полностью определяется семейством $I_n(\xi)$.

4.11. Компактность области Ω_n

Теорема 4.6. Компактность Ω_n. Пусть исходный профиль $d(\xi)$ непрерывен и имеет компактный носитель. Тогда для любого конечного $n \geq 2$ область $\Omega_n \subset \mathbb{R}^3$ ограничена и замкнута. Следовательно, Ω_n компактна.

Доказательство. Ограниченность. По предположению носитель $d(\xi)$ компактен, поэтому существует $L\xi > 0$ такое, что $d(\xi) = 0$ вне $[-L\xi, L\xi]$. Рекурсия не изменяет осевую координату ξ и действует лишь на радиальную. Поэтому все интервальные сечения $I_n(\xi)$ исчезают вне того же осевого носителя. По теореме 4.3 справедлива конечная оценка $M_n \leq M_2 + \sum_{k=1}^{n-2} R_k$. Следовательно, Ω_n заключена в ограниченном цилиндре: $-L\xi \leq \xi \leq L\xi$ и $0 \leq \rho \leq M_n$.

Замкнутость. По теореме 4.5 график $G_n \subset \mathbb{R}^2$ компактен. Рассмотрим непрерывное отображение $F(\xi, \rho, \varphi) = (\xi, \rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ из $G_n \times [0, 2\pi]$ в $\mathbb{R}^3$. Поскольку произведение $G_n \times [0, 2\pi]$ компактно, а F непрерывно, его образ Ω_n компактен. В частности, Ω_n замкнута и ограничена. Это доказывает компактность по теореме Гейне — Бореля.

4.12. Система осевого массива $\Omega_{n,m}$

Хотя подробный анализ систем осевых массивов будет приведён в главе 6, их компактность можно установить уже сейчас.

Определение 4.7. Конечная система осевого массива. Пусть задано конечное число $m \in \mathbb{N}$, осевые смещения $\Delta_j \in \mathbb{R}$ при $j = 0, \ldots, m-1$ и единичный вектор оси $e\xi$. Тогда:

$$\Omega_{n,m} = \bigcup_{j=0}^{m-1} (\Omega_n + \Delta_j \cdot e\xi).$$

Теорема 4.7. Компактность конечной системы осевого массива. Если Ω_n компактна и $m < \infty$, то $\Omega_{n,m}$ компактна.

Доказательство. Каждое множество $\Omega_n + \Delta_j e\xi$ является образом компактного множества Ω_n при переносе и потому компактно. Конечное объединение компактных множеств компактно.

4.13. Полнота интервального описания

Семейство интервалов $I_n(\xi)$ должно полностью кодировать пространственную область. Это утверждение имеет два естественных варианта: теоретико-множественный и объёмный.

Теорема 4.8. Полнота интервального описания как множества. Пусть $I_n(\xi)$ и $J_n(\xi)$ — два семейства интервальных состояний на одной и той же осевой переменной. Если $I_n(\xi) = J_n(\xi)$ для всех ξ, соответствующие области совпадают: $\Omega_n(I) = \Omega_n(J)$.

Обратно, если существует ξ_0, для которого $I_n(\xi_0) \neq J_n(\xi_0)$, то $\Omega_n(I) \neq \Omega_n(J)$ как множества точек.

Доказательство. Первое утверждение непосредственно следует из определения области через принадлежность $\rho \in I_n(\xi)$. Для второго утверждения: если $I_n(\xi_0) \neq J_n(\xi_0)$, то существует $\rho_0 \geq 0$, принадлежащее одному множеству и не принадлежащее другому. Тогда точка $(\xi_0, \rho_0, \varphi_0)$ при любом фиксированном φ_0 принадлежит одной области и не принадлежит другой. Следовательно, области различны как множества точек.

Теорема 4.9. Полнота интервального описания по объёму. Пусть $A_n^I(\xi)$ и $A_n^J(\xi)$ — площади поперечных сечений, соответствующие семействам интервалов $I_n(\xi)$ и $J_n(\xi)$. Если множество $E = \{\xi : A_n^I(\xi) \neq A_n^J(\xi)\}$ имеет положительную меру Лебега, то соответствующие объёмы различны: $V_n(I) \neq V_n(J)$.

Доказательство. По определению объём вычисляется интегрированием площади поперечного сечения по ξ. Поскольку $A_n^I(\xi)$ и $A_n^J(\xi)$ — неотрицательные измеримые функции, различающиеся на множестве E положительной меры Лебега, их интегралы по $\mathbb{R}$ не могут быть равны. Поэтому $V_n(I) \neq V_n(J)$.

Замечание 4.7. Теорема 4.8 относится к точному совпадению областей как множеств точек, тогда как теорема 4.9 — к различию их объёмной меры. Эти два уровня не следует смешивать.

4.14. Эпистемологическое значение рекурсивного аппарата

Аппарат, построенный в данной главе, имеет основополагающее значение для всей монографии. Он показывает, что объект исследования может задаваться не визуально, не посредством неформального дерева ветвей и не через отдельные «оболочки», а строгой рекурсией семейств в пространстве интервальных состояний. Тем самым геометрия высших порядков становится полноценным математическим объектом, а не эвристической формой.

4.15. Итоги главы

В этой главе построена базовая глобальная рекурсивная теория.

1. Определён второй порядок $I_2(\xi) = [0, d(\xi)]$.

2. Введён общий нормализованный рекурсивный переход $I_{k+1}(\xi) = \check{C}_{R_{k-1}}(I_k(\xi)) = \mathrm{Merge}(C_{R_{k-1}}(I_k(\xi)))$, где $C_{R_{k-1}}$ — исходный оператор, а Merge — оператор канонизации.

3. Доказана корректность определения всех $I_n(\xi)$.

4. Доказана неотрицательность радиусов.

5. Установлена универсальная оценка $M_n \le M_2 + (R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-2})$.

6. Получена конечная оценка числа компонент $N_n(\xi) \le 2^{n-2}$.

7. Доказана замкнутость графика G_n.

8. Доказана компактность областей Ω_n и конечных систем осевых массивов $\Omega_{n,m}$.

9. Разделены и строго сформулированы два варианта полноты интервального описания — теоретико-множественный и объёмный.

Таким образом, завершено построение основного математического аппарата для конструирования рекурсивных осесимметричных областей. Следующая глава посвящена формальному дереву ветвей и его связи с интерпретацией в терминах систем итерируемых функций.

5. Дерево ветвей, формальные орбиты и интерпретация, аналогичная системам итерируемых функций (IFS)

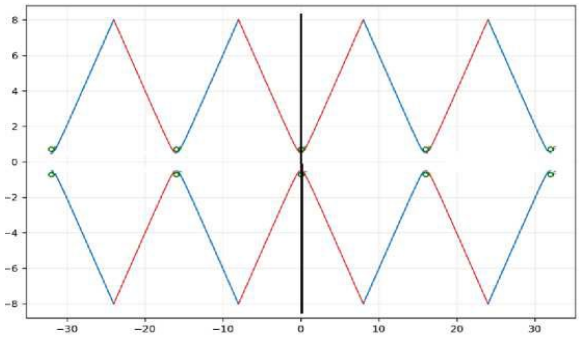

Рис. 5.1. Вертикальное двумерное сечение Ω_4 с фокусами всех образующих гипербол.

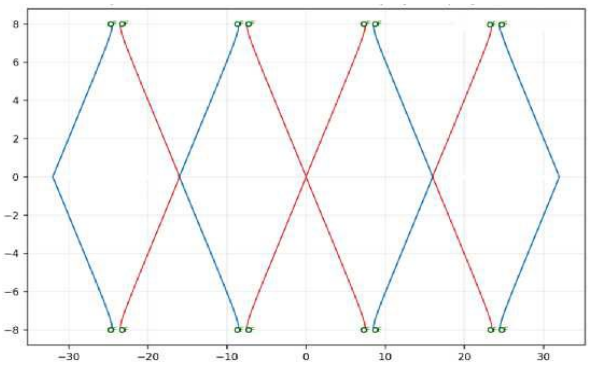

Рис. 5.2. Горизонтальное двумерное сечение Ω_4 с фокусами всех образующих гипербол.

5.1. Назначение формального описания ветвей

После построения интервальной рекурсии $I_n(\xi)$ закономерно возникает вопрос о соотношении полного внутреннего объёма и тех «ветвей», которые визуально наблюдаются в двумерных сечениях. Для ответа удобно ввести формальное дерево ветвей.

Однако сразу подчеркнём принципиальное обстоятельство: дерево ветвей не является основным объектом теории.

Основным объектом остаётся семейство интервальных состояний $I_n(\xi)$, а через него — объём Ω_n. Формальные ветви служат лишь: (1) для комбинаторного описания рекурсивного порождения; (2) для построения и маркировки двумерных дуг; (3) для анализа фокальных характеристик формальных образующих; (4) для сопоставления со схемами, напоминающими IFS.

Поэтому данная глава является вспомогательной по отношению к главе 4: она объясняет формальный механизм порождения ветвей, но не заменяет интервальную теорию объёма.

5.2. Формальные аффинные отображения

На формальном уровне каждый рекурсивный шаг действует на радиальную переменную r посредством одного из двух аффинных отображений:

$$F_k^{+}(r) = R_k + r, \qquad F_k^{-}(r) = R_k - r, \qquad r \in \mathbb{R}.$$

Здесь индекс k соответствует k-му рекурсивному смещению R_k.

Замечание 5.1. В отличие от главы 3, где используется физическое отображение с отсечением g_R(r) = max(R − r, 0), формальное отображение $F_k^{-}(r) = R_k - r$ рассматривается на всей вещественной прямой $\mathbb{R}$ без отсечения. Это и есть формальный уровень описания.

Определение 5.1. Формальная ветвь одного шага. При фиксированном $r \in \mathbb{R}$ образами одного шага называются точки $F_k^{+}(r)$ и $F_k^{-}(r)$. Именно эти две возможности порождают бинарное ветвление.

5.3. Знаковые слова и композиции ветвей

Пусть $m \geq 1$. Рассмотрим знаковое слово $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m) \in \{+1, -1\}^m$. Ему сопоставляется композиция:

$$F\sigma = F_m^{\{\sigma_m\}} \circ F_{m-1}^{\{\sigma_{m-1}\}} \circ \ldots \circ F_1^{\{\sigma_1\}},$$

где по соглашению $F_j^{+1} = F_j^{+}$ и $F_j^{-1} = F_j^{-}$.

Определение 5.2. Формальная орбита глубины m. Для исходного радиуса $r \in \mathbb{R}$ множество $B_m(r) = \{F\sigma(r) : \sigma \in \{+1, -1\}^m\}$ называется формальной орбитой глубины m.

В контексте порядка n естественно полагать $m = n - 2$, поскольку второй порядок является базовым, после чего применяются $n - 2$ рекурсивных смещений.

5.4. Аффинный вид любой формальной ветви

Каждая композиция ветвей остаётся аффинной изометрией вида $\pm r + C$.

Теорема 5.1. Явная формула формальной ветви. Для любого слова $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \in \{+1, -1\}^m$ существуют знак $\varepsilon(\sigma) = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_m \in \{+1, -1\}$ и смещение $C(\sigma)$, такие что:

$$F\sigma(r) = C(\sigma) + \varepsilon(\sigma)r \quad \text{для всех } r \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Докажем индукцией по m. При $m = 1$ две ветви имеют вид $F_{+1}(r) = R_1 + r$ и $F_{-1}(r) = R_1 - r$; требуемая форма выполнена.

Предположим, что утверждение доказано для слов длины $m - 1$. Применение следующего аффинного отображения даёт:

$$F_{\{\sigma_1,\ldots,\sigma_m\}}(r) = R_m + \sigma_m C_{m-1} + \sigma_m\varepsilon_{m-1}r.$$

Следовательно, $\varepsilon_m = \sigma_m\varepsilon_{m-1} = \sigma_1\ldots\sigma_m$, а смещение C_m удовлетворяет соответствующей аффинной рекурсии. Формула доказана индукцией.

Следствие 5.1. Каждая формальная ветвь является изометрией на $\mathbb{R}$: её константа Липшица равна 1.

Доказательство. Из теоремы 5.1 следует $F\sigma(r) = C(\sigma) + \varepsilon(\sigma)r$, а такие отображения сохраняют расстояния.

5.5. Формальное число ветвей

На уровне знаковых слов рекурсивное дерево удваивается на каждом шаге.

Теорема 5.2. Число формальных слов. Для порядка $n \geq 2$ число формальных слов ветвления равно 2^{n-2}.

Доказательство. После базового второго порядка имеется $n - 2$ рекурсивных шагов. На каждом шаге выбирается один из двух символов: +1 либо −1. Поэтому число слов длины $n - 2$ равно $|\{+1, -1\}^{n-2}| = 2^{n-2}$.

Замечание 5.2. Теорема 5.2 относится к числу формальных слов, а не обязательно к числу различных числовых значений $F\sigma(r)$. При специальных наборах смещений R_k разные слова способны задавать одно и то же аффинное отображение или одно и то же значение при конкретном r.

Определение 5.3. Формальное число ветвей. Величина $N_n^{\text{formal}} = 2^{n-2}$ называется формальным числом ветвей порядка n.

5.6. Дерево ветвей для исходного профиля d(ξ)

При фиксированном ξ исходный радиус $r_0 = d(\xi)$ служит естественным начальным значением для дерева ветвей.

Определение 5.4. Множество ветвей порядка n. При фиксированном ξ положим $B_2(\xi) = \{d(\xi)\}$, а для $n \geq 3$:

$$B_n(\xi) = \{F\sigma(d(\xi)) : \sigma \in \{+1, -1\}^{n-2}\}.$$

Множество $B_n(\xi)$ называется формальным множеством ветвей порядка n в точке ξ.

Предложение 5.1. Для любого ξ выполняется оценка $|B_n(\xi)| \leq 2^{n-2}$.

Доказательство. $B_n(\xi)$ состоит из значений $F\sigma(d(\xi))$ для всех слов длины $n - 2$. Таких слов 2^{n-2}, поэтому число различных значений не превосходит 2^{n-2}.

Замечание 5.3. Если все значения различны, то $|B_n(\xi)| = 2^{n-2}$. При совпадениях мощность множества может быть меньше. Это ещё одно проявление различия между формальной комбинаторикой и реальной геометрией.

5.7. Формальные ветви и физические радиусы

На физическом уровне радиусы должны принадлежать полуоси $[0, \infty)$. Поэтому отрицательные значения, возникающие в формальном дереве, не имеют непосредственного геометрического смысла.

Определение 5.5. Положительная проекция. Определим отображение:

$$\pi_+(x) = max(x, 0), \quad x \in \mathbb{R},$$

которое оставляет любое неотрицательное вещественное число неизменным, а отрицательные числа переводит в нуль. Это метрическая проекция вещественной прямой на замкнутую полуось $[0, \infty)$. Она преобразует формальный радиус в допустимый неотрицательный радиус.

Замечание 5.4. На уровне одной точки r композиция $\pi_+ \circ F_k^-$ соответствует функции g_{R_k}(r) из главы 3, а F_k^+ соответствует h_{R_k}(r). Однако для полной теории объёма этого недостаточно, поскольку физический объект строится не из одной точки $r = d(\xi)$, а из всего интервала $[0, d(\xi)]$ и его последующих образов.

Иными словами, дерево ветвей в точке $d(\xi)$ описывает формальные граничные дуги, но не заменяет интервальную динамику полного внутреннего радиального множества. Это фундаментальное положение всей монографии.

5.8. Почему дерево ветвей не определяет объём

Даже если известны все формальные значения $F\sigma(d(\xi))$ при фиксированном ξ, этого недостаточно для восстановления $I_n(\xi)$, поскольку:

1. Внутренний объём второго порядка задаётся не единственной точкой $d(\xi)$, а всем интервалом $[0, d(\xi)]$.

2. На каждом шаге оператор действует на весь интервал, а не только на его верхний конец.

3. Различные интервальные зоны после применения Merge могут перекрываться и объединяться.

4. Реальный физический результат зависит от объединения всех промежуточных зон, а не от списка формальных ветвей.

Теорема 5.3. Неполнота дерева ветвей. При фиксированном ξ знания одного лишь множества формальных ветвей $B_n(\xi)$, вообще говоря, недостаточно для восстановления полного интервального состояния $I_n(\xi)$.

Доказательство. $B_n(\xi)$ содержит лишь конечное множество значений, соответствующих образам одного исходного значения $d(\xi)$. Между тем $I_n(\xi)$ получается из образов всего интервала $[0, d(\xi)]$, то есть континуума значений. Кроме того, оператор Merge зависит от взаимного расположения целых зон, а не только их крайних точек. Следовательно, знание одного $B_n(\xi)$ не определяет однозначно $I_n(\xi)$.

Замечание 5.5. Эта теорема вновь подчёркивает, что дерево ветвей представляет собой только вспомогательный комбинаторный каркас.

5.9. Интерпретация, аналогичная IFS, и её ограничения

Поскольку в рекурсии используется конечное семейство отображений, её естественно сопоставить с классическими системами итерируемых функций (IFS). Однако такое сопоставление допустимо лишь с существенными оговорками.

Теорема 5.4. Формальные ветви не образуют классическую сжимающую IFS. Семейство отображений $F_k^+(r) = R_k + r$ и $F_k^-(r) = R_k - r$ не является сжимающей IFS на $\mathbb{R}$ в смысле классической теории Хатчинсона.

Доказательство. Каждое отображение F_k^+ и F_k^- является изометрией: $|F_k^{\pm}(r_1) - F_k^{\pm}(r_2)| = |r_1 - r_2|$. Следовательно, их константа Липшица равна 1, а не строго меньше 1. Таким образом, условие сжатия не выполнено и стандартная теорема о существовании единственного компактного аттрактора для сжимающих IFS неприменима.

Замечание 5.6. Поэтому выражение «IFS-интерпретация» в настоящем томе допустимо только в ослабленном смысле: имеется конечный набор аффинных отображений; происходит генерация ветвей посредством слов; рассматриваются композиции конечной глубины. При этом отсутствуют сжимаемость, аттрактор Хатчинсона и стандартная фрактальная динамика бесконечной глубины.

Определение 5.6. Схема конечной глубины, аналогичная IFS. Под такой схемой в настоящем томе понимается семейство формальных композиций изометрий $F\sigma(r) = C(\sigma) + \varepsilon(\sigma)r$, $\sigma \in \{+1, -1\}^m$, рассматриваемое только при конечном m и используемое для комбинаторного описания ветвления.

5.10. Формальные дуги в двумерных сечениях

На практике дерево ветвей удобно интерпретировать через семейство формальных двумерных дуг.

Определение 5.7. Формальная дуга порядка n. Пусть $d(\xi)$ — исходный профиль. Тогда каждой ветви $\sigma \in \{+1, -1\}^{n-2}$ сопоставляется формальная дуга:

$$r\sigma(\xi) = C(\sigma) + \varepsilon(\sigma)d(\xi).$$

После положительной проекции можно также рассматривать $r\sigma^+(\xi) = \max(r\sigma(\xi), 0)$.

Замечание 5.7. Такие дуги удобны для построения двумерных чертежей с указанием знаков, формального вычисления фокусов, классификации ветвей по знаку ε(σ) и отображения рекурсивной структуры.

Однако даже полное семейство дуг $r\sigma(\xi)$ не заменяет интервальную запись $I_n(\xi)$, поскольку последняя кодирует весь внутренний объём, а не только его формальные границы.

5.11. Фокусы формальных гиперболических дуг

Если исходный профиль гиперболический, каждая формальная дуга представляет собой отражение и/или смещение первоначальной гиперболической дуги. Поэтому её фокусы явно вычисляются по параметрам ветви.

Предложение 5.2. Фокусы формальной вертикальной дуги. Пусть $r\sigma(\xi) = C(\sigma) + \varepsilon(\sigma)d_v(\xi)$, где $\varepsilon(\sigma) \in \{+1, -1\}$, d_v — вертикальный гиперболический исходный профиль, а $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Тогда фокусы соответствующей формальной дуги на плоскости (ρ, ξ) имеют координаты:

$$F_v\pm(\sigma) = (C(\sigma) + \varepsilon(\sigma)R, \pm c).$$

При изображении полного меридионального сечения также показываются точки, зеркально отражённые относительно радиальной оси.

Доказательство. Формальная дуга получается из исходной гиперболической дуги посредством радиального отражения при $\varepsilon(\sigma) = -1$ и радиального переноса на величину $C(\sigma)$. Эти операции преобразуют исходные фокусы в указанные смещённые фокальные координаты.

Замечание 5.8. Аналогичные формулы можно записать и для горизонтального типа, однако их конкретный вид зависит от принятого соглашения о координатах на плоскости сечения. Существенно лишь то, что фокусы формальной дуги вычисляются из фактического смещения $C(\sigma)$ и знака ветви, а не добавляются к изображению декоративно.

5.12. Итоги главы

В этой главе построен формальный комбинаторный уровень теории.

1. Введены формальные аффинные отображения $F_k^+(r) = R_k + r$ и $F_k^-(r) = R_k - r$.

2. Определены знаковые слова и композиции ветвей.

3. Доказано, что любая формальная ветвь имеет вид $F\sigma(r) = C(\sigma) + \varepsilon(\sigma)r$ и, следовательно, является аффинной изометрией.

4. Установлено, что число формальных слов порядка n равно 2^{n-2}.

5. Введено формальное множество ветвей $B_n(\xi)$.

6. Строго показано, что дерево ветвей не определяет полный объём и не заменяет интервальное описание $I_n(\xi)$.

7. Доказано, что рассматриваемая схема не является классической сжимающей IFS.

8. Введено понятие схемы конечной глубины, аналогичной IFS.

9. Разъяснена роль формальных дуг и их фокусов в двумерных сечениях.

Таким образом, установлена корректная связь между двумя уровнями описания — комбинаторным деревом ветвей и основным геометрическим объектом, внутренним объёмом, заданным посредством интервалов.

6. Осевые массивы, параметр осевой компоновки h и топологии взаимодействия экземпляров

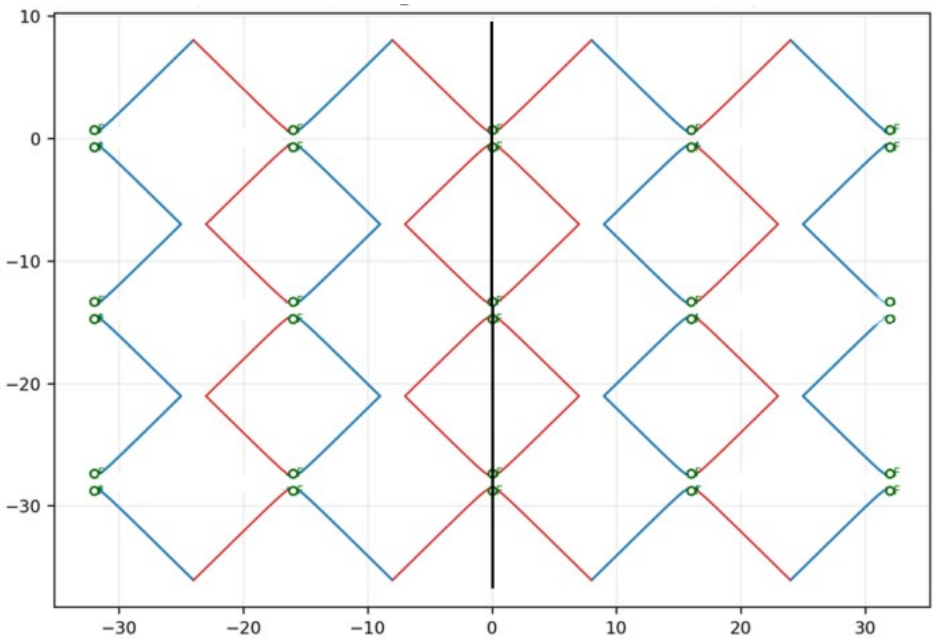

Рисунок 6.1. Вертикальный осевой массив $\Omega_{4,3}$ при h = −2. В двумерном сечении показаны фокальные точки всех образующих.

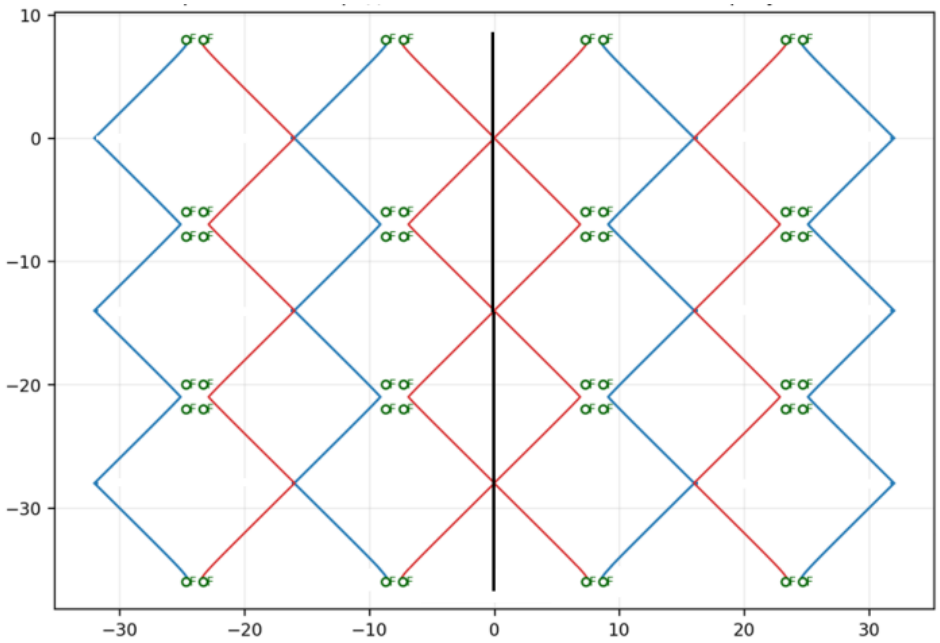

Рисунок 6.2. Горизонтальный осевой массив $\Omega_{4,3}$ при h = −2. В двумерном сечении показаны фокальные точки всех образующих.

6.1. Переход от отдельной области к системе осевых массивов

До сих пор рассматривалась отдельная рекурсивно построенная область Ω_n, полностью определяемая семейством интервальных сечений $I_n(\xi)$. Однако для будущих волновых приложений важны не только отдельные полости, но и их конечные осевые композиции. Такие композиции позволяют моделировать:

- многополостные структуры с соприкасающимися либо разделёнными элементами;
- осевые цепочки геометрически одинаковых элементов;
- режимы внешнего взаимодействия без изменения внутреннего рекурсивного порядка;
- переходы между раздельной и связной геометрией при изменении промежутка между элементами.

Именно для этого вводится понятие системы осевого массива $\Omega_{n,m}$, в которой m экземпляров одной и той же области Ω_n размещены вдоль оси с заданным шагом.

Принципиально важно, что объединение в массив не изменяет внутреннюю рекурсию. Параметр n отвечает за внутреннюю геометрию отдельного экземпляра, тогда как параметры m и h определяют внешнюю осевую компоновку.

6.2. Осевой размер отдельного экземпляра

Для задания осевого массива сначала необходимо определить осевую длину одной области.

Определение 6.1. Полуосевая длина экземпляра. Пусть область Ω_n имеет осевой носитель

$$\mathrm{Ax}(\Omega_n) = \{\xi \in \mathbb{R} : I_n(\xi) \neq \emptyset\}.$$

Если этот носитель симметричен относительно нуля и имеет вид $[-H, H]$, то величина $H > 0$ называется полуосевой длиной экземпляра.

Примечание 6.1. В построенной теории рекурсивный оператор действует только на радиальную координату и не изменяет осевую переменную ξ. Поэтому осевой носитель совпадает с носителем исходного профиля. В частности:

— для вертикального типа: $\mathrm{Ax}(\Omega_n^{(v)}) = [-L, L]$, $H = L$;

— для горизонтального типа: $\mathrm{Ax}(\Omega_n^{(h)}) = [-R, R]$, $H = R$.

Это свойство будет использовано далее.

Теорема 6.1. Сохранение осевого носителя. Пусть исходный профиль $d(\xi)$ имеет носитель supp d. Тогда для любого конечного $n \geq 2$ множество $\{\xi : I_n(\xi) \neq \emptyset\}$ совпадает с supp d в топологическом смысле, если сохраняются вырожденные интервалы $[0, 0]$, и содержится в supp d в объёмном смысле, если при визуализации нулевые интервалы удаляются.

Доказательство. Рекурсивный оператор действует при фиксированном ξ только на радиальные интервалы и не перемещает точки вдоль оси. Следовательно, новые радиальные значения могут появляться только там, где исходный профиль был задан как часть начального семейства $I_2(\xi)$. Поэтому осевой носитель не расширяется и не смещается.

6.3. Шаг компоновки осевого массива

Пусть задана отдельная область Ω_n с полуосевой длиной H. Естественный базовый шаг между центрами двух экземпляров, соприкасающихся вдоль оси, равен 2H. Для возможности задавать промежуток, контакт либо перекрытие вводится дополнительный параметр h.

Определение 6.2. Параметр осевой компоновки. Пусть $h \in \mathbb{R}$. Тогда шаг осевого массива задаётся выражением

$$\text{step} = 2H + h.$$

Параметр h интерпретируется следующим образом:

- $h > 0$ — между соседними экземплярами имеется положительный осевой зазор;
- $h = 0$ — соседние экземпляры соприкасаются вдоль оси;
- $h < 0$ — соседние экземпляры перекрываются вдоль оси.

Примечание 6.2. Параметр h относится исключительно к внешней осевой компоновке и не участвует во внутренней рекурсии $I_n(\xi)$. Следовательно, изменение h не изменяет порядок n и не влияет на структуру ветвей отдельного экземпляра.

6.4. Осевые смещения экземпляров массива

Для построения конечного массива удобно использовать один из двух равноправных способов индексации:

- От нулевого экземпляра в одном направлении.
- Симметрично относительно центра массива.

В данном томе в качестве базовой используется первая схема.

Определение 6.3. Осевые смещения. Для $m \in \mathbb{N}$ определим смещения

$$\Delta_j = -j(2H + h), \quad j = 0, 1, \ldots, m - 1.$$

Соответственно, j-й экземпляр области Ω_n имеет вид

$$\Omega_n^{(j)} = \Omega_n + \Delta_j\, e\xi,$$

где $e\xi$ — единичный вектор осевого направления.

Определение 6.4. Система осевого массива. Конечной системой осевого массива порядка (n, m) называется объединение

$$\Omega_{n,m} = \bigcup_{j=0}^{m-1} (\Omega_n + \Delta_j\, e\xi) = \bigcup_{j=0}^{m-1} \Omega_n^{(j)}.$$

Примечание 6.3. При выбранной индексации первый экземпляр расположен без смещения, а последующие сдвигаются в отрицательном осевом направлении. При необходимости симметричной компоновки относительно нуля можно ввести центрирующее смещение, не изменяющее геометрию конструкции.

6.5. Интервальное описание системы осевого массива

Поскольку отдельная область полностью определяется семейством $I_n(\xi)$, система осевого массива также допускает интервальное представление.

Определение 6.5. Интервальное семейство осевого массива. Пусть $I_n(\xi)$ определяет отдельную область Ω_n. Тогда интервальное семейство осевого массива имеет вид

$$I_{n,m}^{row}(\xi) = \mathrm{Merge}(\bigcup_{j=0}^{m-1} I_n(\xi - \Delta_j)),$$

где осевое смещение интерпретируется как сдвиг аргумента исходного интервального семейства.

Теорема 6.2. Полнота интервального описания осевого массива. Область $\Omega_{n,m}$ полностью определяется семейством $I_{n,m}^{row}(\xi)$. Точнее,

$$\Omega_{n,m} = \{(\xi, \rho, \varphi) : \rho \in I_{n,m}^{row}(\xi),\ 0 \le \varphi < 2\pi\}.$$

Доказательство. Каждый сдвинутый экземпляр $\Omega_n + \Delta_j$ eξ задаётся семейством $I_n(\xi - \Delta_j)$. Их объединение по индексу j даёт полное множество допустимых радиусов в каждой осевой точке ξ. Применение оператора Merge не изменяет множество точек, а лишь приводит представление интервалов к канонической форме. Следовательно, полученное семейство полностью определяет $\Omega_{n,m}$.

6.6. Режимы взаимодействия соседних экземпляров

Теперь можно строго классифицировать осевое взаимное расположение соседних экземпляров.

Пусть осевой носитель отдельной области имеет вид $[-H, H]$. Тогда носитель j-го экземпляра равен $[-H + \Delta_j, H + \Delta_j]$. Расстояние между центрами соседних экземпляров j и j + 1 составляет

$$|\Delta_{j+1} - \Delta_j| = 2H + h.$$

Теорема 6.3. Классификация осевого взаимодействия соседних экземпляров. Пусть область Ω_n имеет осевой носитель $[-H, H]$. Тогда для двух соседних экземпляров $\Omega_n^{(j)}$ и $\Omega_n^{(j+1)}$ выполняется следующее:

- если $h > 0$, их осевые носители разделены промежутком длины h;
- если $h = 0$, их осевые носители соприкасаются в одной точке;
- если $h < 0$, их осевые носители перекрываются на отрезке длины $-h$.

Доказательство. Правая граница носителя экземпляра j + 1 имеет координату

$$H + \Delta_{j+1} = H + \Delta_j - (2H + h) = -H + \Delta_j - h,$$

а левая граница носителя экземпляра j равна $-H + \Delta_j$. Знаковое расстояние между этими границами равно h. Поэтому при $h > 0$ возникает промежуток длины h; при $h = 0$ границы совпадают; при $h < 0$ возникает перекрытие длины $-h$.

Примечание 6.4. Теорема 6.3 классифицирует именно осевое взаимодействие носителей. Фактическая трёхмерная связность объединения зависит также от радиальных сечений и может быть сложнее при наличии вырожденных или нулевых сечений на концах носителя.

6.7. Топологические режимы осевого массива

На основании теоремы 6.3 можно выделить три основных топологических режима.

Определение 6.6. Режим разделения. При $h > 0$ система осевого массива называется разделённой, или разнесённой.

Определение 6.7. Режим касания. При $h = 0$ система осевого массива называется соприкасающейся.

Определение 6.8. Режим перекрытия. При $h < 0$ система осевого массива называется перекрывающейся.

Примечание 6.5. С геометрической точки зрения эти режимы существенно различаются:

- в режиме разделения число компонент системы осевого массива совпадает с числом экземпляров, если отдельная область связна;
- в режиме касания возможны топологические переходы через точки либо сечения контакта;
- в режиме перекрытия соседние экземпляры больше не разделены и могут образовать единую связную область.

6.8. Связность осевого массива

Пусть отдельная область Ω_n связна. Тогда в режиме разделения число компонент системы осевого массива описывается непосредственно.

Теорема 6.4. Число компонент в режиме разделения. Пусть Ω_n связна и $h > 0$. Тогда система $\Omega_{n,m}$ состоит ровно из m связных компонент.

Доказательство. Согласно теореме 6.3, осевые носители соседних экземпляров разделены положительным промежутком. Следовательно, сами экземпляры как подмножества $\mathbb{R}^3$ также разделены положительным расстоянием и не пересекаются. Поскольку каждый экземпляр связен, объединение m попарно непересекающихся связных экземпляров состоит ровно из m компонент.

Примечание 6.6. Если отдельная область Ω_n несвязна, число компонент системы осевого массива может превышать m. В таком случае необходимо отдельно учитывать внутреннюю связность каждого экземпляра.

Теорема 6.5 (связность системы массива при $h < 0$). Пусть Ω_n имеет непустое замкнутое осевое сечение на концах носителя, а система $\Omega_{n,m}$ построена с шагом $\mathrm{step} = 2H + h$, где H — половина осевой длины одного экземпляра. Если $h < 0$, пересечение осевых носителей соседних экземпляров содержит непустой отрезок положительной длины и в некоторой точке этого отрезка существует хотя бы один радиус ρ такой, что

$$\rho \in I_n(\xi - \Delta_j) \cap I_n(\xi - \Delta_{j+1}),$$

то объединение соседних экземпляров принадлежит одной связной компоненте $\Omega_{n,m}$. Если это условие выполняется для каждой соседней пары j и $j + 1$, то вся система осевого массива связна.

Доказательство. При $h < 0$ проекции соседних экземпляров на ось перекрываются на отрезке длиной $|h|$. По предположению, на части этого перекрытия имеется общая радиальная область ненулевой толщины. Следовательно, соответствующие подмножества двух копий Ω_n имеют непустое пересечение. Объединение двух связных множеств с непустым пересечением связно. Индукция по числу экземпляров m завершает доказательство. Если отдельная копия Ω_n имеет несколько компонент, утверждение применяется к тем компонентам, которые действительно пересекаются в области перекрытия; поэтому критерий достаточен, но не необходим.

6.9. Режимы касания и перекрытия

При $h = 0$ и $h < 0$ структура уже зависит от конкретной геометрии концов осевого носителя.

Утверждение 6.1. Общая оценка числа компонент. Для любого конечного m

$$\mathrm{Ncomp}(\Omega_{n,m}) \le m \cdot \mathrm{Ncomp}(\Omega_n),$$

где Ncomp(Ω) обозначает число связных компонент области.

Доказательство. Каждый из m экземпляров содержит не более $\mathrm{Ncomp}(\Omega_n)$ компонент. При объединении число компонент может только уменьшаться вследствие касаний либо перекрытий, но не увеличиваться.

Замечание 6.7. В режиме касания:

- число компонент может уменьшиться, если контакт обеспечивает топологическое соединение;
- в объёмном смысле число компонент может не уменьшиться, если контакт происходит лишь по вырожденному множеству и не образует прохода для внутреннего объёма.

В режиме перекрытия:

- компоненты, как правило, объединяются;
- однако точную связность необходимо проверять на конкретном интервальном семействе $I_{n,m}^{\mathrm{row}}(\xi)$.

Поэтому в томе 1 режимы касания и перекрытия рассматриваются как геометрические кандидаты для последующего численного анализа связности и будущих волновых приложений.

6.10. Сохранение внутреннего порядка при построении массива

Для методологической ясности необходимо прямо указать, что формирование массива не изменяет внутренний рекурсивный порядок.

Теорема 6.6. Независимость внутреннего порядка от параметра h. Пусть $\Omega_{n,m}$ и $\Omega'_{n,m}$ — две системы осевого массива, построенные из одной и той же отдельной области Ω_n, но при различных значениях h. Тогда для каждого экземпляра его внутреннее интервальное семейство остаётся равным $I_n(\xi)$ с точностью до осевого смещения.

Доказательство. По определению система осевого массива строится как объединение осевых сдвигов одной и той же области Ω_n. Изменение h меняет лишь величины смещений Δ_j, но не само семейство $I_n(\xi)$, образующее каждый экземпляр.

Следствие 6.1. Параметр h управляет только внешней компоновкой, но не внутренней рекурсией.

6.11. Безразмерная форма параметра массива

Для сравнения разных масштабов полезно ввести безразмерную форму параметра h.

Определение 6.9. Безразмерный параметр массива. При выбранном базовом осевом масштабе $a > 0$ положим

$$\eta = h/a.$$

Тогда $\eta > 0$ соответствует режиму разделения; $\eta = 0$ — режиму касания; $\eta < 0$ — режиму перекрытия.

Примечание 6.8. В безразмерных параметрах компоновка массива описывается не абсолютным зазором, а его отношением к базовому геометрическому масштабу. Это важно для последующего перехода к волновым числам и сравнения геометрий различных физических размеров.

6.12. Вычислительные аспекты осевой компоновки

С точки зрения алгоритмической реализации массив следует формировать после построения отдельной области. Это вытекает из самой логики теории.

Принцип вычислительной реализации. Алгоритм построения $\Omega_{n,m}$ должен включать следующие этапы:

- Построить интервальное семейство $I_n(\xi)$ одной области.
- Вычислить полуосевую длину H.
- Задать шаг step = 2H + h.
- Сформировать смещения Δ_j.
- Объединить сдвинутые интервальные семейства.
- Применить Merge при каждом ξ.

Примечание 6.9. Не допускается включать параметр h во внутреннюю рекурсивную динамику I_n, поскольку это означало бы смешение внутренней структуры порядка с внешней компоновкой. Такое смешение нарушило бы однозначность параметризации.

6.13. Научное значение систем осевых массивов

Осевое размещение массива играет в исследовательской программе две роли.

1. Геометрическая роль. Оно позволяет исследовать переходы:

- от отдельной полости к многополостной системе;
- от разделённой структуры к соприкасающейся;
- от касания к перекрытию;
- от множества копий к единому сложному объёму.

2. Волновая роль. Хотя волновые эффекты ещё не доказаны в томе 1, именно системы осевых массивов естественным образом связаны с будущими вопросами:

- коллективных мод;
- направленности излучения;
- осевого переноса энергии;
- сравнения с цепочками связанных резонаторов;
- влияния шага h на спектральные окна.

Таким образом, параметр h служит связующим звеном между чисто геометрической частью программы и её будущей волновой составляющей.

6.14. Итоги главы

В этой главе построен аппарат конечных систем осевых массивов.

- Введено понятие полуосевой длины H.
- Показано, что рекурсия не изменяет осевой носитель исходного профиля.
- Введены параметр осевой компоновки h и шаг step = 2H + h.
- Определены осевые смещения $\Delta_j = -j(2H + h)$.
- Строго определена система осевого массива $\Omega_{n,m} = \bigcup_{j=0}^{m-1} (\Omega_n + \Delta_j e\xi)$.
- Получено её полное интервальное описание $I_{n,m}^{row}(\xi)$.
- Доказана классификация режимов $h > 0$, $h = 0$ и $h < 0$.
- Установлено, что параметр h не изменяет внутренний порядок n, а управляет только внешней компоновкой.
- Введён безразмерный параметр массива $\eta = h/a$.

Тем самым завершено построение геометрии не только отдельных рекурсивных областей, но и их конечных осевых ансамблей. В следующей главе будет рассмотрен дифференциально-геометрический анализ гладких участков, сопряжений после Merge и локальной кривизны.

7. Дифференциально-геометрический анализ: гладкие участки, сопряжения после Merge и локальная кривизна

7.1. Постановка задачи дифференциально-геометрического анализа

В предыдущих главах была построена теория рекурсивных осесимметричных областей как множеств, заданных посредством интервальных сечений. Для дальнейших вычислительных и, в перспективе, волновых приложений важно дополнительно исследовать локальную геометрию их границ. В частности, интерес представляют:

– гладкие участки поверхностей вращения;

– начальные и конечные точки ветвей исходного профиля;

– линии сопряжения, возникающие после канонизации Merge;

– поведение локальной кривизны;

– области возможного локального сгущения вычислительной сетки.

Эта глава не заменяет общую топологическую теорию предыдущих разделов, а дополняет её локальным дифференциально-геометрическим уровнем. При этом следует сразу подчеркнуть принципиальное ограничение:

Глобальная граница Ω_n в общем случае является лишь кусочно-гладкой. Поэтому классические дифференциально-геометрические величины определены не всюду, а только на регулярных гладких фрагментах.

Именно различие между гладкими участками и швами, возникающими после Merge, составляет центральную тему настоящей главы.

7.2. Гладкие участки границы как поверхности вращения

Пусть одна из граничных дуг области задана на осевом интервале $J \subset \mathbb{R}$ гладкой положительной радиальной функцией $\rho = \psi(\xi)$, $\psi(\xi) > 0$. Соответствующий фрагмент границы представляет собой поверхность вращения вокруг оси ξ с параметризацией

$$X(\xi, \varphi) = (\xi, \psi(\xi)\cos\varphi, \psi(\xi)\sin\varphi), \quad \xi \in J, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Определение 7.1. Гладкий фрагмент границы. Гладким фрагментом границы Ω_n называется участок, представимый как поверхность вращения $X(\xi, \varphi) = (\xi, \psi(\xi)\cos\varphi, \psi(\xi)\sin\varphi)$, где $\psi \in C^2(J)$ и $\psi(\xi) > 0$ на J.

Замечание 7.1. Условие $\psi(\xi) > 0$ исключает вырождение на оси. Точки, в которых $\psi(\xi) = 0$, требуют самостоятельного рассмотрения как края или точки контакта с осью и не являются регулярными точками данной параметризации поверхности вращения.

7.3. Первая и вторая фундаментальные формы

Для гладкой поверхности вращения $X(\xi, \varphi) = (\xi, \psi(\xi)\cos\varphi, \psi(\xi)\sin\varphi)$ частные производные равны:

$$X_\xi = (1, \psi'(\xi)\cos\varphi, \psi'(\xi)\sin\varphi),$$

$$X_\varphi = (0, -\psi(\xi)\sin\varphi, \psi(\xi)\cos\varphi).$$

Следовательно, коэффициенты первой фундаментальной формы имеют вид $E = 1 + \psi'(\xi)^2$, $F = 0$, $G = \psi(\xi)^2$.

Единичную нормаль можно выбрать в виде:

$$N(\xi, \varphi) = [1/\sqrt{(1 + \psi'(\xi)^2)}] \cdot (-\psi'(\xi), \cos\varphi, \sin\varphi).$$

При таком выборе ориентации коэффициенты второй фундаментальной формы равны $L = \psi''(\xi)/\sqrt{(1 + \psi'(\xi)^2)}$, $M = 0$, $N_2 = -\psi(\xi)/\sqrt{(1 + \psi'(\xi)^2)}$. Изменение направления нормали одновременно меняет знаки L и N_2, но не влияет на гауссову кривизну.

7.4. Формула гауссовой кривизны

Теорема 7.1. Гауссова кривизна гладкого фрагмента поверхности вращения. Пусть $\psi \in C^2(J)$ и $\psi(\xi) > 0$. Тогда гауссова кривизна соответствующей поверхности вращения определяется формулой:

$$K_G(\xi) = -\psi''(\xi) / [\psi(\xi)(1 + \psi'(\xi)^2)^2].$$

Доказательство. Для поверхности вращения $K_G = (LN_2 - M^2)/(EG - F^2)$. Подставляя $E = 1 + \psi'^2$, $F = 0$, $G = \psi^2$, $L = \psi''/\sqrt{(1 + \psi'^2)}$, $M = 0$ и $N_2 = -\psi/\sqrt{(1 + \psi'^2)}$, получаем:

$$K_G = \{ [\psi''/\sqrt{(1 + \psi'^2)}] \cdot [-\psi/\sqrt{(1 + \psi'^2)}] \} / [(1 + \psi'^2)\psi^2] = -\psi''/[\psi(1 + \psi'^2)^2].$$

Теорема доказана.

Замечание 7.2. Формула теоремы 7.1 применима только в регулярных точках гладкого фрагмента. На швах Merge, в точках касания компонент, на осевых краях и в точках, где отсутствует гладкость класса C^2, использовать её без дополнительной регуляризации нельзя.

7.5. Вертикальный гиперболический исходный профиль как гладкий участок

Рассмотрим вертикальный базовый профиль $\psi(s) = d_v(s) = R - b\sqrt{((s/a)^2 - 1)}$, $s > a$. На интервале $s \in (a, L)$ эта функция гладкая и положительная.

Лемма 7.1. Производные вертикального профиля. При $s > a$ справедливы формулы:

$\psi'(s) = -bs / [a^2\sqrt{((s/a)^2 - 1)}]$,

$\psi''(s) = b / [a^2((s/a)^2 - 1)^{(3/2)}]$.

Доказательство. Положим $q(s) = \sqrt{((s/a)^2 - 1)}$. Тогда $\psi(s) = R - bq(s)$ и $q'(s) = s/[a^2\sqrt{((s/a)^2 - 1)}]$. Следовательно, $\psi'(s) = -bq'(s) = -bs/[a^2\sqrt{((s/a)^2 - 1)}]$. При повторном дифференцировании получаем $\psi''(s) = b/[a^2((s/a)^2 - 1)^{(3/2)}]$.

Следствие 7.1. Знак гауссовой кривизны на вертикальном исходном фрагменте. На интервале $s \in (a, L)$ гауссова кривизна вертикального исходного фрагмента отрицательна: $K_G(s) < 0$.

Доказательство. Согласно лемме 7.1, $\psi''(s) > 0$; кроме того, $\psi(s) > 0$ и $1 + \psi'(s)^2 > 0$. Поэтому по теореме 7.1 $K_G(s) = -\psi''(s)/[\psi(s)(1 + \psi'(s)^2)^2] < 0$.

Замечание 7.3. Отрицательная гауссова кривизна гладкого гиперболического участка согласуется с общим седловым характером такой геометрии. Однако в настоящем томе этот факт используется исключительно как локальная геометрическая характеристика формы, а не как непосредственное утверждение о волновом эффекте.

Лемма 7.2. Конечность вклада в площадь поверхности вблизи осевых контактов. Пусть гладкий участок поверхности вращения задан радиальной функцией $\psi(\xi) \geq 0$ и $\psi(\xi_0) = 0$ в точке осевого контакта, причём ψ абсолютно непрерывна в проколотой окрестности этой точки. Если интеграл $\int\psi(\xi)\sqrt{(1 + \psi'(\xi)^2)}d\xi$ конечен, то вклад окрестности ξ_0 в площадь боковой поверхности конечен. Для вертикального гиперболического исходного профиля вблизи $|s| = L$ это условие выполнено.

Доказательство. Площадь поверхности вращения на рассматриваемом участке равна $S = 2\pi\int\psi\sqrt{(1 + \psi'^2)}d\xi$. Для вертикального профиля $\psi(s) = R - b\sqrt{((s/a)^2 - 1)}$ обращается в нуль при $|s| = L$. Разложение вблизи L показывает линейное убывание ψ по мере приближения к точке контакта с конечным коэффициентом первого порядка. Поэтому произведение $\psi\sqrt{(1 + \psi'^2)}$ интегрируемо. Следовательно, осевой контакт не создаёт бесконечной площади поверхности. При построении сеток FEM/FDTD это означает, что особая точка требует локального сгущения сетки или сглаживания, но не приводит к бесконечной геометрической мере границы.

7.6. Отражённые и смещённые дуги

Формальные граничные дуги последующих порядков имеют вид $r(\xi) = C + \sigma d(\xi)$, где $\sigma \in \{+1, -1\}$. Сдвиг C не изменяет вторую производную, тогда как знак σ изменяет её знак.

Утверждение 7.1. Изменение кривизны при отражении ветви. Пусть гладкий фрагмент дуги задан функцией $\psi_\sigma(\xi) = C + \sigma d(\xi)$, где $\sigma \in \{+1, -1\}$, $d \in C^2(J)$, $\psi_\sigma(\xi) > 0$. Тогда $\psi_\sigma''(\xi) = \sigma d''(\xi)$. Следовательно, при изменении знака ветви может изменяться и знак гауссовой кривизны.

Доказательство. Имеем $\psi_\sigma'(\xi) = \sigma d'(\xi)$ и $\psi_\sigma''(\xi) = \sigma d''(\xi)$. По теореме 7.1 знак K_G определяется знаком $-\psi_\sigma''$, поскольку знаменатель положителен.

Замечание 7.4. Из утверждения 7.1 следует, что даже если исходный профиль имеет определённый знак кривизны, рекурсивно отражённые ветви могут иметь иной локальный знак.

Поэтому вся граница Ω_n в общем случае представляет собой совокупность гладких участков с различной кривизной.

7.7. Главные кривизны поверхности вращения

Для численного анализа иногда полезно выписать не только гауссову, но и главные кривизны.

Утверждение 7.2. Главные кривизны. Для гладкого фрагмента поверхности вращения $\rho = \psi(\xi)$, $\psi \in C^2(J)$, $\psi > 0$, главные кривизны равны:

$k_mer = \psi''/(1 + \psi'^2)\hat{}(3/2), \quad k_par = -1/[\psi\sqrt{(1 + \psi'^2)}],$

с точностью до одновременной смены знаков, связанной с выбором ориентации нормали. В частности, $K_G = k_mer \cdot k_par$.

Замечание 7.5. Здесь k_mer соответствует кривизне меридиана, а k_par — кривизне параллели. В инженерных сеточных расчётах эти величины полезны как индикаторы участков, где требуется локальное сгущение сетки.

7.8. Негладкие точки и швы Merge

Граница рекурсивной области обычно состоит не только из гладких фрагментов, но и из точек или линий склейки, возникающих при переходах между различными интервальными компонентами и после применения операции Merge.

Определение 7.2. Шов Merge. Швом Merge называется множество точек границы Ω_n, в которых каноническое представление границы изменяет активную ветвь либо где две ранее различные граничные зоны соприкасаются или соединяются после применения Merge.

Замечание 7.6. На языке двумерных сечений шов Merge — это точка или участок, где результирующая граница образуется при соединении различных формальных дуг. После вращения такой шов образует окружность, точку на оси либо более сложное осесимметричное множество.

Теорема 7.2. Ограничение применимости классической кривизны. Если граница Ω_n не принадлежит классу C^2 в точке p, то классическая гауссова кривизна в точке p не определена в стандартном дифференциально-геометрическом смысле.

Доказательство. Для определения гауссовой кривизны требуются касательная плоскость и вторая фундаментальная форма, что, в свою очередь, предполагает достаточную гладкость локальной параметризации, в частности класса C^2. При отсутствии такой гладкости стандартная конструкция неприменима.

Следствие 7.2. Швы Merge, углы, осевые контакты и точки склейки нельзя исследовать с помощью формулы $K_G = -\psi''/[\psi(1 + \psi'^2)^2]$ без предварительной регуляризации.

7.9. Типы особых геометрических точек

В конструкции первого тома естественным образом возникают несколько классов особых точек.

1. Начало ветви при $|s| = a$ для вертикального типа. Здесь модуль производной стремится к бесконечности и меридиональная параметризация теряет обычную гладкость.

2. Конец ветви при $|s| = L$. Здесь радиус может обращаться в нуль и поверхность соприкасается с осью. Это особый тип вырождения параметризации поверхности вращения.

3. Швы Merge. Это точки перехода между различными формальными граничными дугами.

4. Контакты осевых массивов при $h = 0$ или $h < 0$. Это места соприкосновения либо перекрытия отдельных осевых экземпляров.

Замечание 7.7. Указанные классы точек имеют различное происхождение, но объединены общим обстоятельством: все они требуют специальной обработки в численных схемах и без дополнительных оговорок не подпадают под стандартный анализ гладких участков.

7.10. Регуляризация швов

Для практических приложений, особенно при расчётах методами конечных элементов (FEM) и конечных разностей во временной области (FDTD), кусочно-гладкая граница нередко нуждается в контролируемом сглаживании.

Определение 7.3. Регуляризация шва. Под регуляризацией шва понимается локальная замена негладкого участка границы плавным переходом в окрестности некоторого положительного характерного размера, причём вне этой окрестности граница совпадает с исходной.

Замечание 7.8. Регуляризация может быть реализована различными способами:

– локальным скруглением дуги;

– вставкой сплайна;

– сглаженными операциями максимума/минимума;

– аппроксимацией уровня.

В рамках тома 1 единственный способ регуляризации не закрепляется, однако устанавливаются её задачи:

– обеспечить корректность расчётной сетки;

– сделать возможным вычисление кривизны на сглаженном профиле;

– контролировать зависимость будущих волновых результатов от параметра сглаживания.

Принцип 7.1. Контролируемость сглаживания. Любое сглаживание границы, вводимое для численных целей, должно сопровождаться:

1. Указанием параметра сглаживания.

2. Сопоставлением со сглаживанием другого масштаба.

3. Проверкой устойчивости вычисляемых величин при стремлении параметра к нулю, когда это возможно.

7.11. Практические следствия для построения сеток

Из проведённого анализа непосредственно следуют рекомендации по геометрической дискретизации.

Теорема 7.3. Качественные требования к сетке. При численном моделировании областей Ω_n и $\Omega_{n,m}$ сетку следует локально сгущать в следующих зонах:

1. Вблизи точек $|s| = a$ вертикального исходного профиля.

2. Вблизи осевых контактов, где $\psi(\xi) \to 0$.

3. В окрестности швов Merge.

4. В местах соприкосновения либо перекрытия экземпляров в осевом массиве.

5. На участках значительного изменения $\psi'(\xi)$ или $\psi''(\xi)$.

Обоснование. Во всех перечисленных областях либо возрастают производные образующей, либо нарушается гладкость, либо меняется топология локального сечения. Эти обстоятельства повышают чувствительность дискретизации и требуют более мелкой локальной сетки для корректного воспроизведения геометрии.

7.12. Фокусы и кривизна: разграничение геометрических ролей

В гиперболическом классе естественно возникает стремление связать фокусы образующих с локальной кривизной. Однако это различные уровни геометрического описания.

Фокусы являются глобальной характеристикой плоской гиперболической дуги. Кривизна — локальной дифференциальной характеристикой поверхности вращения.

Замечание 7.9. В настоящем томе фокусы используются:

– для маркировки формальных дуг;

– для геометрической интерпретации исходного класса;

– для составления таблиц характеристик эталонных конфигураций.

Однако они не используются в качестве доказательства локальной или глобальной волновой фокусировки в трёхмерной области. Это разграничение особенно важно для научной строгости.

7.13. Дифференциально-геометрический статус всей границы

Теперь можно обобщить свойства границы Ω_n.

Теорема 7.4. Кусочно-гладкий характер границы. Пусть исходный профиль является кусочно-C^2-гладким на своём носителе. Тогда граница Ω_n представляет собой кусочно-гладкую осесимметричную поверхность: она состоит из конечного числа гладких фрагментов поверхностей вращения, соединённых по конечному числу швов и специальных множеств меньшей размерности.

Доказательство. На каждом шаге рекурсии $I_n(\xi)$ строится из конечного числа образов гладких либо кусочно-гладких дуг под действием аффинных преобразований вида $C + \sigma \cdot d(\xi)$, $\sigma \in \{+1, -1\}$. Такие преобразования сохраняют кусочную гладкость класса C^2. Оператор Merge изменяет только каноническое представление объединения зон и приводит к конечному числу соединений между фрагментами. После вращения вокруг оси каждый гладкий радиальный фрагмент порождает гладкую поверхность вращения, а каждая точка склейки — шов.

Следствие 7.3. Дифференциально-геометрический анализ в томе 1 естественным образом разделяется на: 1) классический анализ гладких фрагментов; 2) отдельное исследование швов, контактов и вырожденных точек.

7.14. Итоги главы

В этой главе построен дифференциально-геометрический уровень теории.

1. Гладкие участки границы описаны как поверхности вращения $\rho = \psi(\xi)$.

2. Для гладких фрагментов выведена формула гауссовой кривизны $K_G = -\psi''/[\psi(1 + \psi'^2)^2]$.

3. Вычислены производные вертикального гиперболического исходного профиля и установлен отрицательный знак K_G на его гладком участке.

4. Показано, что при отражении ветвей знак кривизны может изменяться.

5. Введены главные кривизны меридиана и параллели.

6. Строго определён статус соединений Merge и показано, что классическая кривизна в них не определена.

7. Введено понятие регуляризации швов.

8. Сформулированы практические требования к сетке в особых геометрических зонах.

9. Доказано, что вся граница Ω_n является кусочно-гладкой.

Таким образом, теория получила не только теоретико-множественное и топологическое, но и локально-геометрическое описание границы. В следующей главе вводятся количественные функционалы: площади поперечных сечений, объёмы и связанные с ними свойства измеримости.

8. Количественные функционалы: площади поперечных сечений, объёмы и измеримость

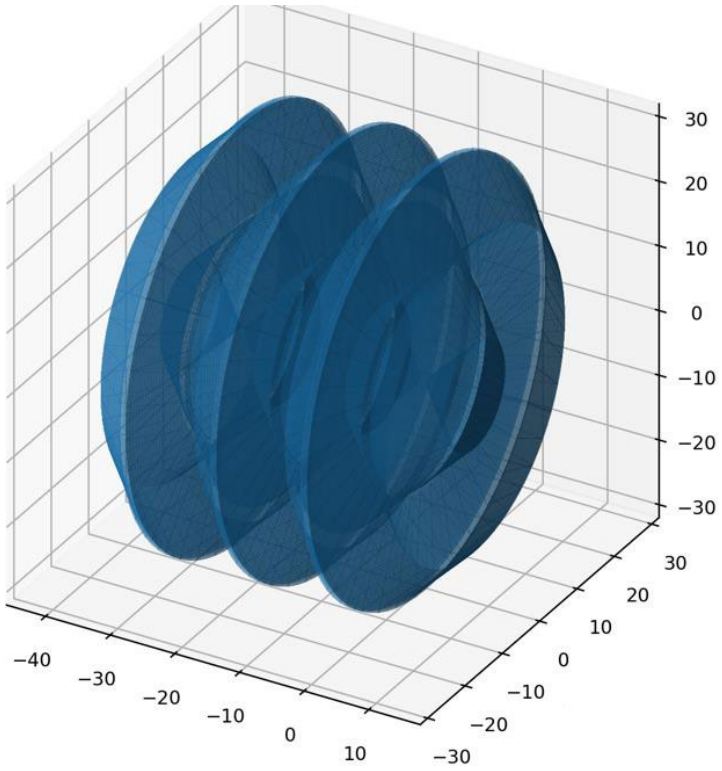

Рисунок 8.1. Вертикальная область $\Omega_{4,3}$: трёхмерная граница.

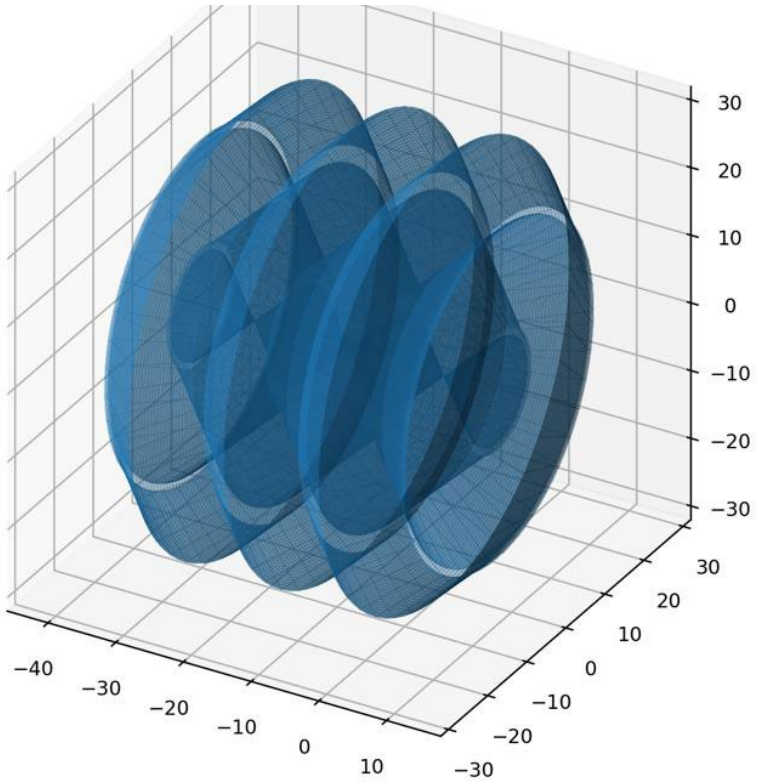

Рисунок 8.2. Горизонтальная область $\Omega_{4,3}$: трёхмерная граница.

8.1. Назначение количественных функционалов

После построения геометрии областей Ω_n и $\Omega_{n,m}$ естественным следующим шагом является введение количественных характеристик, которые:

- зависят только от самого геометрического объекта, а не от способа его визуализации;
- допускают аналитическое и численное вычисление;
- могут служить инвариантами для проверки корректности вычислительной реализации;
- пригодны для последующего сопоставления с волновыми функционалами.

В настоящем томе основными количественными функционалами и характеристиками являются:

- площадь поперечного сечения при фиксированной осевой координате;
- полный объём области;
- число интервальных компонент сечения;
- верхняя граница радиуса;
- для систем осевых массивов — суммарные объёмы и эффекты перекрытия.

При этом центральное значение имеют именно площадь поперечного сечения и объём, поскольку они задают первый уровень интегральной геометрии построенной структуры.

8.2. Площадь поперечного сечения

При фиксированном ξ интервальное состояние $I_n(\xi)$ записывается в канонической форме:

$$I_n(\xi) = \bigcup_{j=1}^{Nn(\xi)} [\alpha_j(\xi), \beta_j(\xi)], \quad 0 \le \alpha_j(\xi) \le \beta_j(\xi).$$

Каждому интервалу $[\alpha_j, \beta_j]$ после вращения вокруг оси соответствует кольцевая область площадью $\pi(\beta_j^2 - \alpha_j^2)$.

Определение 8.1. Площадь поперечного сечения. Площадь поперечного сечения Ω_n при фиксированном ξ определяется формулой:

$$A_n(\xi) = \pi \sum_{j=1}^{Nn(\xi)} [\beta_j(\xi)^2 - \alpha_j(\xi)^2].$$

Если $I_n(\xi) = \emptyset$, то по соглашению $A_n(\xi) = 0$.

Замечание 8.1. Если среди компонент присутствуют вырожденные интервалы $[x, x]$, они не дают вклада в площадь, поскольку $x^2 - x^2 = 0$. Таким образом, сохранение вырожденных интервалов в топологическом описании не создаёт неоднозначности для объёмных функционалов.

8.3. Геометрический смысл формулы площади

Теорема 8.1. Корректность формулы площади сечения. Пусть $I_n(\xi) = \bigcup_{j=1}^{Nn(\xi)} [\alpha_j(\xi), \beta_j(\xi)]$ — каноническое объединение попарно непересекающихся интервалов. Тогда площадь соответствующего двумерного поперечного сечения Ω_n равна:

$$A_n(\xi) = \pi \sum_{j=1}^{Nn(\xi)} [\beta_j(\xi)^2 - \alpha_j(\xi)^2].$$

Доказательство. При фиксированном ξ сечение области плоскостью, перпендикулярной оси, представляет собой объединение круговых колец $\{(\rho, \varphi): \alpha_j(\xi) \le \rho \le \beta_j(\xi), 0 \le \varphi < 2\pi\}$. Площадь j-го кольца составляет $\pi\beta_j(\xi)^2 - \pi\alpha_j(\xi)^2 = \pi[\beta_j(\xi)^2 - \alpha_j(\xi)^2]$. Поскольку интервалы в каноническом представлении попарно не пересекаются и разделены положительными промежутками, соответствующие кольца не перекрываются по площади. Следовательно, полная площадь равна сумме площадей всех кольцевых компонент.

Следствие 8.1. Площадь поперечного сечения зависит только от канонического интервального состояния $I_n(\xi)$ и не зависит от конкретного описания ветвей, приводящего к этому состоянию.

8.4. Альтернативная интегральная форма площади

Полезно представить формулу площади в интегральном виде, не зависящем от явного перечисления интервалов.

Утверждение 8.1. Радиальная интегральная форма. Для каждого ξ площадь поперечного сечения может быть записана в виде:

$$A_n(\xi) = 2\pi \int_0^{\infty} \rho \cdot 1_{\{G_n\}}(\xi, \rho)\, d\rho,$$

где $1_{\{G_n\}}$ — индикатор графика $G_n = \{(\xi, \rho): \rho \in I_n(\xi)\}$.

Доказательство. При фиксированном ξ индикатор $1_{\{G_n\}}(\xi, \rho)$ равен единице в точности для тех радиусов ρ, которые принадлежат интервальному сечению $I_n(\xi)$. Следовательно:

$$\int_0^{\infty} \rho \cdot 1_{\{G_n\}}(\xi, \rho)\, d\rho = \sum_{j=1}^{Nn(\xi)} \int_{\{\alpha_j(\xi)\}}^{\{\beta_j(\xi)\}} \rho\, d\rho$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{Nn(\xi)} [\beta_j(\xi)^2 - \alpha_j(\xi)^2].$$

Умножение полученного выражения на 2π даёт требуемую формулу.

Замечание 8.2. Интегральная форма особенно удобна для доказательства измеримости и для связи с теоремой Фубини при последующем определении объёма.

8.5. Измеримость функции площади

Чтобы объём был строго определён, необходимо показать, что функция $\xi \mapsto A_n(\xi)$ измерима.

Теорема 8.2. Измеримость площади поперечного сечения. Пусть исходный профиль $d(\xi)$ непрерывен и имеет компактный носитель. Тогда для каждого конечного порядка $n \geq 2$ функция $A_n(\xi)$ измерима по Лебегу.

Доказательство. По теореме 4.5 график $G_n = \{(\xi, \rho): \rho \in I_n(\xi)\}$ является замкнутым подмножеством $\mathbb{R}^2$, а значит, борелевски измерим. Следовательно, индикатор $1_\{G_n\}(\xi, \rho)$ является измеримой функцией двух переменных.

Тогда функция $f_n(\xi, \rho) = 2\pi\rho \cdot 1_\{G_n\}(\xi, \rho)$ также измерима на $\mathbb{R} \times [0, \infty)$. По утверждению 8.1:

$$A_n(\xi) = \int_0^{\infty} f_n(\xi, \rho)\, d\rho.$$

Интеграл по одной переменной от неотрицательной измеримой функции является измеримой функцией оставшейся переменной. Поэтому $A_n(\xi)$ измерима.

8.6. Ограниченность площади сечения

Теорема 8.3. Ограниченность площади поперечного сечения. Для каждого конечного $n \geq 2$ и любого $\xi \in \mathbb{R}$ выполняется оценка:

$$0 \leq A_n(\xi) \leq \pi M_n^2,$$

где M_n — верхняя оценка радиуса из теоремы 4.3.

Доказательство. Неотрицательность непосредственно следует из определения. Поскольку все интервалы $I_n(\xi)$ лежат в $[0, M_n]$, всё радиальное множество сечения содержится в круге радиуса M_n. Следовательно, площадь сечения не превосходит площади этого круга: $A_n(\xi) \leq \pi M_n^2$.

Замечание 8.3. Оценка πM_n^2 является грубой: она не учитывает возможные кольцевые пустоты и многокомпонентность, однако достаточна для доказательства конечности объёма.

8.7. Определение объёма

Теперь можно строго ввести объём области.

Определение 8.2. Объём Ω_n. Объём области Ω_n определяется интегралом:

$$V_n = \int_\mathbb{R} A_n(\xi)\, d\xi.$$

Поскольку вне осевого носителя $A_n(\xi) = 0$, интегрирование можно выполнять по любому интервалу, содержащему этот носитель.

Теорема 8.4. Корректность определения объёма. Пусть исходный профиль $d(\xi)$ непрерывен и имеет компактный носитель. Тогда объём $V_n = \int_\mathbb{R} A_n(\xi)d\xi$ корректно определён и конечен для любого конечного $n \geq 2$.

Доказательство. По теореме 8.2 функция $A_n(\xi)$ измерима. Согласно теореме 8.3 выполняется $0 \leq A_n(\xi) \leq \pi M_n^2$. Кроме того, $A_n(\xi) = 0$ вне компактного осевого носителя исходного профиля, сохраняемого рекурсией. Таким образом, A_n ограничена и имеет компактный носитель, а значит, интегрируема по Лебегу. Следовательно, V_n корректно определён и конечен.

8.8. Эквивалентность объёмной формулы цилиндрическому интегрированию

Объём можно также выразить тройным интегралом от индикатора области.

Теорема 8.5. Цилиндрическая формула объёма. Для каждого конечного $n \geq 2$:

$$V_n = \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} 1_{\{\Omega_n\}}(\xi, \rho, \varphi) \cdot \rho \, d\varphi \, d\rho \, d\xi.$$

Доказательство. Поскольку Ω_n осесимметрична, её индикатор не зависит от φ и равен $1_{\{\Omega_n\}}(\xi, \rho, \varphi) = 1_{\{G_n\}}(\xi, \rho)$. Поэтому:

$$\int_0^{2\pi} 1_{\{\Omega_n\}}(\xi, \rho, \varphi) \cdot \rho \, d\varphi = 2\pi\rho \cdot 1_{\{G_n\}}(\xi, \rho).$$

Интегрирование по ρ даёт $A_n(\xi)$ в соответствии с утверждением 8.1, а последующее интегрирование по ξ — V_n. Возможность изменения порядка интегрирования обеспечивается неотрицательностью подынтегральной функции.

Замечание 8.4. Теорема 8.5 связывает чисто интервальное определение объёма с обычной цилиндрической формой объёмного интеграла. Это особенно важно при сопоставлении аналитических формул со стандартными численными схемами.

8.9. Объём области второго порядка

Для второго порядка формула объёма имеет особенно простой вид.

Утверждение 8.2. Объём исходной области. Для второго порядка $I_2(\xi) = [0, d(\xi)]$, поэтому:

$$A_2(\xi) = \pi d(\xi)^2, \qquad V_2 = \pi \int_{\mathbb{R}} d(\xi)^2 \, d\xi.$$

Доказательство. При $I_2(\xi) = [0, d(\xi)]$ имеется один интервал с $\alpha = 0$ и $\beta = d(\xi)$. Тогда по определению 8.1 $A_2(\xi) = \pi[d(\xi)^2 - 0] = \pi d(\xi)^2$. Интегрирование по ξ даёт формулу для V_2.

Замечание 8.5. Формула для V_2 показывает, что исходный профиль входит в выражение для объёма квадратично. Это естественно согласуется с масштабной размерностью объёма как меры в $\mathbb{R}^3$.

8.10. Объём системы осевых массивов и эффект перекрытия

Пусть задана система осевого массива $\Omega_{n,m}$. Её объём может отличаться от mV_n в зависимости от того, пересекаются ли осевые экземпляры.

Определение 8.3. Объём системы осевого массива. Положим:

$$V_{n,m} = \mathrm{Vol}(\Omega_{n,m}).$$

Теорема 8.6. Объём в режиме разнесения. Если $h > 0$, то экземпляры не пересекаются и:

$$V_{n,m} = mV_n.$$

Доказательство. При $h > 0$ по теореме 6.3 соседние экземпляры имеют положительный осевой зазор, поэтому как подмножества $\mathbb{R}^3$ попарно не пересекаются. Тогда объём конечного объединения равен сумме объёмов:

$$V_{n,m} = \sum_{j=0}^{m-1} \mathrm{Vol}(\Omega_n + \Delta_j \cdot e\xi) = mV_n.$$

Замечание 8.6. В режимах $h = 0$ и $h < 0$ уже нельзя автоматически записывать $V_{n,m} = mV_n$, поскольку:

- при $h = 0$ возможны контакты по множествам нулевой либо положительной меры;
- при $h < 0$ возникает реальное объёмное перекрытие.

Определение 8.4. Дефект объёма вследствие перекрытия. Положим:

$$\Delta V_{n,m} = mV_n - V_{n,m}.$$

Тогда $\Delta V_{n,m} = 0$ в режиме разнесения, $\Delta V_{n,m} \geq 0$ в общем случае и $\Delta V_{n,m} > 0$ при наличии объёмного перекрытия.

Утверждение 8.3. Неотрицательность дефекта перекрытия. Для любой конечной системы осевых массивов $\Delta V_{n,m} \geq 0$.

Доказательство. Каждая копия имеет объём V_n. Объём объединения не превосходит суммы объёмов:

$$\mathrm{Vol}(\bigcup_{j=0}^{m-1} \Omega_n^{(j)}) \leq \sum_{j=0}^{m-1} \mathrm{Vol}(\Omega_n^{(j)}) = mV_n.$$

Неотрицательность объёма очевидна.

8.11. Число компонент как дополнительный функционал

Хотя число компонент не является мерой, оно служит важной количественной характеристикой геометрии.

Определение 8.5. Число компонент Merge в сечении. Величина $N_merge(\xi) = N_n(\xi)$ называется числом компонент Merge в сечении ξ.

Замечание 8.7. Функция $N_merge(\xi)$ полезна для:

- диагностики топологических переходов;
- проверки результата операции Merge;
- локализации осевых зон с многокольцевыми сечениями;
- подготовки расчётной сетки и численного разбиения.

Она не является непрерывной и, вообще говоря, может изменяться скачкообразно при прохождении особых значений ξ.

8.12. Численное интегрирование и требования к воспроизводимости

Хотя в томе 1 преимущественно строится аналитический аппарат, объёмы и площади часто вычисляются численно. Поэтому необходимо зафиксировать требования к вычислительной процедуре.

Принцип 8.1. Численная воспроизводимость объёмов. Любое численное значение V_n или $V_{n,m}$, приведённое в таблицах тома 1, должно сопровождаться указанием:

1. способа интегрирования;
2. числа узлов либо критерия адаптивности;
3. допустимой численной погрешности;
4. правил обработки вырожденных интервалов;
5. значений допуска ε_merge, если интервалы объединяются с машинной точностью.

Замечание 8.8. Это требование особенно важно, поскольку одна из целей тома 1 состоит в том, чтобы сделать геометрию предметом независимой программной проверки, а не только аналитического описания.

8.13. Научное значение количественных функционалов

В контексте всей монографии площади и объёмы выполняют сразу несколько функций.

1. Геометрическая функция. Они являются внутренними инвариантами построения и позволяют сравнивать различные порядки n, различные типы исходных профилей и значения параметров.

2. Вычислительная функция. Они обеспечивают непосредственную связь теории с программной реализацией, поскольку могут независимо пересчитываться различными алгоритмами.

3. Эпистемологическая функция. Они обозначают границу между доказанным и гипотетическим: площади и объёмы уже допускают строгое вычисление в томе 1, тогда как волновые функционалы будут введены лишь в последующих томах.

8.14. Итоги главы

В настоящей главе сформирован количественный уровень теории.

1. Введена площадь поперечного сечения $A_n(\xi) = \pi\sum_j[\beta_j(\xi)^2 - \alpha_j(\xi)^2]$.

2. Доказана корректность этой формулы.

3. Получено интегральное представление площади через индикатор графика G_n.

4. Доказана измеримость функции $A_n(\xi)$.

5. Установлена её ограниченность.

6. Строго определён объём $V_n = \int A_n(\xi)d\xi$ и доказана его конечность.

7. Объём связан со стандартной цилиндрической формулой тройного интеграла.

8. Для исходной области получена формула $V_2 = \pi\int d(\xi)^2 d\xi$.

9. Введены объём системы осевых массивов $V_{n,m}$ и дефект перекрытия $\Delta V_{n,m} = mV_n - V_{n,m}$.

10. Сформулированы требования к численной воспроизводимости вычислений объёма.

Таким образом, геометрическая теория получила первый строгий набор количественных функционалов, который в следующей главе будет дополнен безразмерной параметризацией и теоремой масштабной инвариантности.

9. Безразмерные параметры и масштабная инвариантность

9.1. Необходимость безразмерной параметризации

До настоящего момента теория строилась с использованием размерных величин: a, b, R, R_k, h, ξ и ρ. Такой подход естественен на этапе геометрического построения. Однако для сравнительного анализа, численной верификации и, в особенности, последующего перехода к волновым моделям необходимо перейти к безразмерным параметрам.

Необходимость такого перехода определяется тремя обстоятельствами.

1. Геометрическое сравнение. Две области, различающиеся только общим масштабом, следует рассматривать как геометрически подобные и не смешивать с конфигурациями, действительно различающимися по форме.

2. Переход к волновым задачам. Любая волновая задача зависит не от абсолютных длин как таковых, а от их отношения к длине волны. Поэтому геометрический объём необходимо заранее представить в форме, совместимой с такими параметрами, как ka, kR и отношение размеров зазоров к длине волны.

3. Вычислительная воспроизводимость. Безразмерные параметры позволяют сопоставлять результаты разных исследователей, программных реализаций и физических платформ независимо от выбранной системы единиц.

По этим причинам в настоящей главе вводится набор безразмерных параметров и затем доказывается теорема о масштабной инвариантности.

9.2. Основные безразмерные параметры геометрии

Пусть исходные размерные параметры удовлетворяют условиям $a > 0$, $b > 0$, $R > 0$, $R_k \geq 0$ и $h \in \mathbb{R}$. В качестве базового масштаба длины выберем a. Тогда вводятся следующие безразмерные отношения.

Определение 9.1. Основные безразмерные параметры.

$$\beta = b/a, \quad \rho_0 = R/a, \quad \gamma_k = R_k/R, \quad \eta = h/a.$$

Здесь:

— β — отношение характерных масштабов базовой гиперболической образующей;

— ρ_0 — безразмерный радиальный масштаб исходного профиля;

— γ_k — относительное смещение на k-м шаге рекурсии;

— η — безразмерный параметр компоновки осевого массива.

Примечание 9.1. Во избежание неоднозначности обозначений символ ρ без индекса в настоящем томе сохраняется за радиальной координатой, тогда как безразмерное отношение R/a обозначается через ρ_0.

9.3. Безразмерные координаты

Переход к безразмерной форме осуществляется посредством замены координат:

$$\xi = a\,\bar{\xi}, \quad \rho = a\,\bar{\rho}.$$

Определение 9.2. Безразмерные координаты. Величины $\bar{\xi} = \xi/a$ и $\bar{\rho} = \rho/a$ называются соответственно безразмерной осевой и безразмерной радиальной координатами.

После такой замены все геометрические уравнения могут быть записаны в форме, зависящей только от β, ρ_0, γ_k и η.

9.4. Безразмерная форма базовых гиперболических профилей

Вертикальный тип

Исходный профиль имеет вид:

$$d_v(s) = R - b\sqrt{((|s|/a)^2 - 1)}.$$

Разделив выражение на a и введя безразмерную координату $\bar{s} = s/a$, получаем:

$$\bar{d}_v(\bar{s}) = d_v(a\,\bar{s})/a = \rho_0 - \beta\sqrt{(\bar{s}^2 - 1)}, \quad 1 \le |\bar{s}| \le \bar{L},$$

$$\bar{L} = L/a = \sqrt{(1 + (R/b)^2)} = \sqrt{(1 + (\rho_0/\beta)^2)}.$$

Горизонтальный тип

Исходный профиль записывается следующим образом:

$$d_h(u) = a\sqrt{(1 + ((R - |u|)/b)^2)}.$$

После деления на a и замены $\bar{u} = u/a$ получаем:

$$\bar{d}_h(\bar{u}) = \sqrt{(1 + ((\rho_0 - |\bar{u}|)/\beta)^2)}, \quad |\bar{u}| \le \rho_0.$$

Примечание 9.2. Таким образом, оба исходных профиля в безразмерной форме зависят только от двух параметров: $\beta = b/a$ и $\rho_0 = R/a$.

9.5. Безразмерная форма рекурсии

Пусть интервальное состояние в размерной форме задано как $I_n(\xi) \subset [0, \infty)$. Определим безразмерное семейство следующим образом:

$$\tilde{I}_n(\xi) = \{\bar{\rho} \ge 0 : a\bar{\rho} \in I_n(a\xi)\}.$$

Утверждение 9.1. Безразмерный оператор одного шага.

В безразмерных координатах оператор C с безразмерным смещением $\rho_k = R_k/a$ имеет вид:

$$C_\{\rho_k\}([\alpha, \beta]) = [\max(\rho_k - \beta, 0), \max(\rho_k - \alpha, 0)] \cup [\rho_k + \alpha, \rho_k + \beta].$$

Доказательство. Если исходный размерный интервал имеет вид $a[\alpha, \beta]$, а $R_k = a\rho_0\gamma_k$, то деление формулы из главы 3 на a непосредственно приводит к указанному выражению.

Замечание 9.3. Следовательно, сама структура интервальной рекурсии не изменяется: безразмерными становятся только численные значения её параметров.

9.6. Безразмерная система осевого массива

Поскольку шаг размещения экземпляров определяется соотношением $\text{step} = 2H + h$, после деления на a получаем:

$$\bar{\text{step}} = 2\bar{H} + \eta, \quad \bar{H} = H/a.$$

Соответственно, безразмерные осевые смещения имеют вид:

$$\bar{\Delta}_j = -j(2\bar{H} + \eta).$$

Замечание 9.4. Это показывает, что компоновка осевого массива полностью определяется безразмерной полудлиной $\bar{H}$ и безразмерным параметром зазора η.

9.7. Масштабное преобразование

Теперь можно сформулировать основное преобразование подобия.

Определение 9.3. Однородное масштабирование. Пусть $s > 0$. Однородным масштабированием называется одновременная замена параметров

$$(a, b, R, R_k, h) \mapsto (sa, sb, sR, sR_k, sh)$$

с соответствующим масштабированием координат: $\xi \mapsto s\xi$, $\rho \mapsto s\rho$. Здесь масштабированные значения координат относятся к новой системе.

9.8. Инвариантность безразмерных параметров

Лемма 9.1. Сохранение безразмерных отношений. При однородном масштабировании согласно определению 9.3 величины $\beta = b/a$, $\rho_0 = R/a$, $\gamma_k = R_k/R$, $\eta = h/a$, $\bar{L} = L/a$ и $\bar{H} = H/a$ не изменяются.

Доказательство. Имеем:

$$sb/(sa) = b/a, \quad sR/(sa) = R/a,$$

$$sR_k/(sR) = R_k/R, \quad sh/(sa) = h/a.$$

Следовательно, β, ρ_0, γ_k и η инвариантны относительно однородного масштабирования.

Примечание 9.5. Именно поэтому данные отношения являются естественными геометрическими параметрами формы, в отличие от её абсолютных размеров.

9.9. Теорема о масштабной инвариантности

Теорема 9.1. Масштабная инвариантность геометрии. При однородном масштабировании $(a, b, R, R_k, h) \mapsto s(a, b, R, R_k, h)$, $s > 0$, форма областей Ω_n и $\Omega_{n,m}$ в безразмерных координатах не изменяется. Точнее:

1. безразмерные исходные профили сохраняют свой вид;

2. безразмерная интервальная рекурсия сохраняет свой вид;

3. безразмерная компоновка осевого массива сохраняет свой вид;

4. длины масштабируются с коэффициентом s, площади — с коэффициентом s^2, объёмы — с коэффициентом s^3.

Доказательство.

Шаг 1. Исходные профили. Согласно формулам раздела 9.4, безразмерные исходные профили зависят только от β и ρ_0, которые инвариантны в силу леммы 9.1.

Шаг 2. Рекурсия. Согласно утверждению 9.1, безразмерный оператор зависит только от безразмерных смещений $\rho_k = \rho_0\gamma_k$. Поскольку ρ_0 и γ_k инвариантны, последовательность безразмерных интервальных семейств $\tilde{I}_n$ сохраняет свой вид.

Шаг 3. Осевой массив. Безразмерный шаг $\text{step} = 2\bar{H} + \eta$ определяется только безразмерными величинами, которые при масштабировании не изменяются.

Шаг 4. Масштабирование мер. При умножении линейных координат на s площади умножаются на s^2, а объёмы — на s^3. Это стандартное свойство евклидовых мер.

Следовательно, все рассматриваемые геометрические области остаются подобными исходным, изменяются лишь их абсолютные масштабы. Теорема доказана.

9.10. Следствия теоремы о масштабной инвариантности

Следствие 9.1. Инвариантность числа компонент. При однородном масштабировании число интервальных компонент $N_n(\xi)$ и число связных компонент области Ω_n не изменяются.

Доказательство. Масштабирование представляет собой гомеоморфизм пространства, сохраняющий топологическую структуру множества. Следовательно, число компонент остаётся неизменным.

Следствие 9.2. Масштабирование функционалов. При масштабировании с коэффициентом $s > 0$ справедливы соотношения:

$$M_n \mapsto sM_n, \quad A_n(\xi) \mapsto s^2 A_n(\xi/s), \quad V_n \mapsto s^3 V_n.$$

Замечание 9.6. Следствие 9.2 особенно важно для проверки программной реализации: оно позволяет независимо контролировать корректность расчётов площадей и объёмов при искусственном изменении масштаба всех параметров.

9.11. Безразмерные параметры для перехода к волновым задачам

Хотя в настоящем томе волновые уравнения не решаются, необходимо заранее определить естественные безразмерные комбинации, которые будут использоваться в последующих физических моделях.

Определение 9.4. Волновые безразмерные параметры. Пусть k — характерное волновое число. Тогда естественными безразмерными комбинациями являются ka, kR, kR_k, kh, а также отношение характерных геометрических зазоров к длине волны.

В безразмерной форме получаем:

$$kR = (ka)\rho_0, \quad kR_k = (ka)\rho_0\gamma_k, \quad kh = (ka)\eta.$$

Примечание 9.7. Это означает, что геометрическая и волновая части будущей теории естественным образом сопрягаются посредством двух групп параметров:

1. параметров формы β, ρ_0 и γ_k;

2. параметров масштаба относительно длины волны, например ka.

Именно поэтому теорема 9.1 имеет методологическое значение: она показывает, что сама геометрия уже приведена к форме, пригодной для постановки задач в частных производных.

9.12. Итоги главы

В настоящей главе построена безразмерная форма геометрической теории.

1. Введены основные безразмерные параметры $\beta = b/a$, $\rho_0 = R/a$, $\gamma_k = R_k/R$, $\eta = h/a$, $\bar{L} = L/a$ и $\bar{H} = H/a$.

2. Введены безразмерные координаты $\bar{\xi} = \xi/a$ и $\bar{\rho} = \rho/a$.

3. Получены безразмерные формы исходных профилей вертикального и горизонтального типов.

4. Показано, что интервальная рекурсия и осевая компоновка сохраняют свою форму при безразмерной записи.

5. Доказана инвариантность основных безразмерных отношений при однородном масштабировании.

6. Доказана теорема 9.1 о масштабной инвариантности геометрии.

7. Установлены стандартные законы масштабирования: длины изменяются пропорционально s, площади — s^2, объёмы — s^3.

8. Определены безразмерные параметры, которые в последующих томах будут связаны с волновыми числами.

10. Конструктивный атлас псевдогиперболоидов по порядкам и типам

10.0. Безразмерный паспорт эталонной конфигурации атласа

В представленном ниже атласе используется единая размерная эталонная конфигурация и соответствующее ей безразмерное представление. Благодаря этому глава 10 непосредственно связана с аппаратом масштабной инвариантности, изложенным в главе 9, и содержит независимый численный паспорт, позволяющий воспроизвести все контрольные рисунки и таблицы.

Параметр	Значение	Физико-геометрический смысл
a	0.05	Осевой масштаб исходного профиля
b	0.5	Радиальный гиперболический масштаб
R	10.0	Базовый радиальный уровень
R_1, R_2, R_3	20.0; 40.0; 80.0	Рекурсивные смещения, используемые в атласе
$\beta = b/a$	10.000000	Отношение параметров формы
$\rho_0 = R/a$	200.000000	Безразмерный базовый радиус
$\gamma_1 = R_1/R$	2.000000	Первое безразмерное смещение
$\gamma_2 = R_2/R$	4.000000	Второе безразмерное смещение
$\gamma_3 = R_3/R$	8.000000	Третье безразмерное смещение
$L/a = \sqrt{(1 + (R/b)^2)}$	20.024984	Безразмерная половина длины вертикального профиля
$c/a = \sqrt{(1 + \beta^2)}$	10.049876	Безразмерное фокальное расстояние

10.1. Построение псевдогиперболоида второго порядка

В данном разделе вертикальный и горизонтальный типы рассматриваются как две реализации одного и того же интервального закона. Рекурсивный оператор в обоих случаях одинаков; различаются только исходная функция $d(\xi)$, осевой носитель и пространственная ориентация поверхности вращения.

Второй порядок задаёт исходный внутренний объём. На этом уровне рекурсивные смещения ещё отсутствуют. На уровне ветвей имеется одна функция $d(\xi)$, однако физически значимым объектом является не линия $\rho = d(\xi)$, а весь радиальный интервал от нуля до $d(\xi)$.

Формула второго порядка в явном виде: $I_2(\xi) = [0, d(\xi)]$.

Это означает, что при каждом допустимом значении осевой координаты ξ внутреннему объёму принадлежат все радиусы от нуля до граничного радиуса $d(\xi)$.

Признак	Вертикальный тип	Горизонтальный тип
Осевая переменная	s	u
Носитель	Два участка: [−L, −a] и [a, L]	Один непрерывный отрезок: [−R, R]
Базовая функция	$d_v(s) = R - b\cdot\sqrt{((\lvert s\rvert/a)^2 - 1)}$	$d_h(u) = a\cdot\sqrt{(1 + ((R - \lvert u\rvert)/b)^2)}$
Фокусы	Радиальная координата C ± R; осевая координата ±c	Радиальная координата C ± c; осевая координата ±R
Роль Merge	Объединение пересекающихся и касающихся интервалов	Объединение пересекающихся и касающихся интервалов

Контрольные точки построения

Следующая таблица фиксирует общие данные исходного профиля, используемые в атласе. Она приводится один раз; в последующих разделах вместо повторного описания исходного профиля используются проверочные таблицы, относящиеся к соответствующему порядку.

Тип	Точка	ξ	d(ξ)	$I_2(\xi)$	$A_2(\xi) = \pi d(\xi)^2$
Вертикальный	a	0.050000	10.000000	[0.000000, 10.000000]	314.159265
Вертикальный	(a + L)/2	0.525625	4.767589	[0.000000, 4.767589]	71.426889
Вертикальный	L	1.001249	0.000000	[0.000000, 0.000000]	0.000000
Горизонтальный	0	0.000000	1.001249	[0.000000, 1.001249]	3.149451
Горизонтальный	R/2	5.000000	0.502494	[0.000000, 0.502494]	0.793251
Горизонтальный	R	10.000000	0.050000	[0.000000, 0.050000]	0.007854

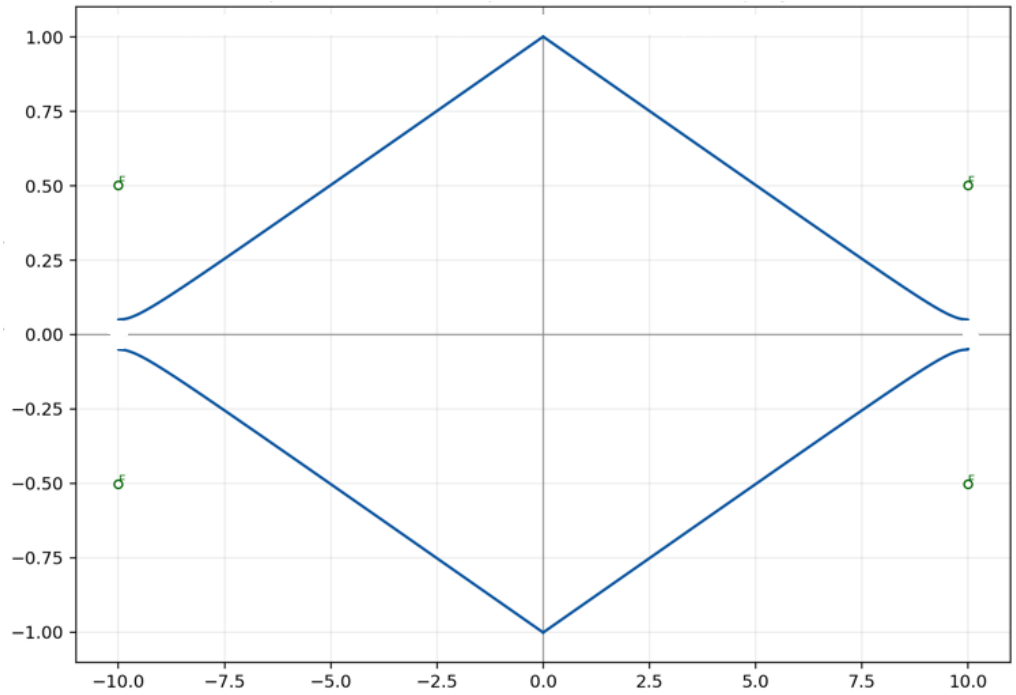

Рисунок 10.1. Вертикальный тип, порядок 2: двумерное сечение с фокусами всех формальных гиперболических образующих. Параметры: a = 0.05, b = 0.5, R = 10.0, R_1 = 20.0.

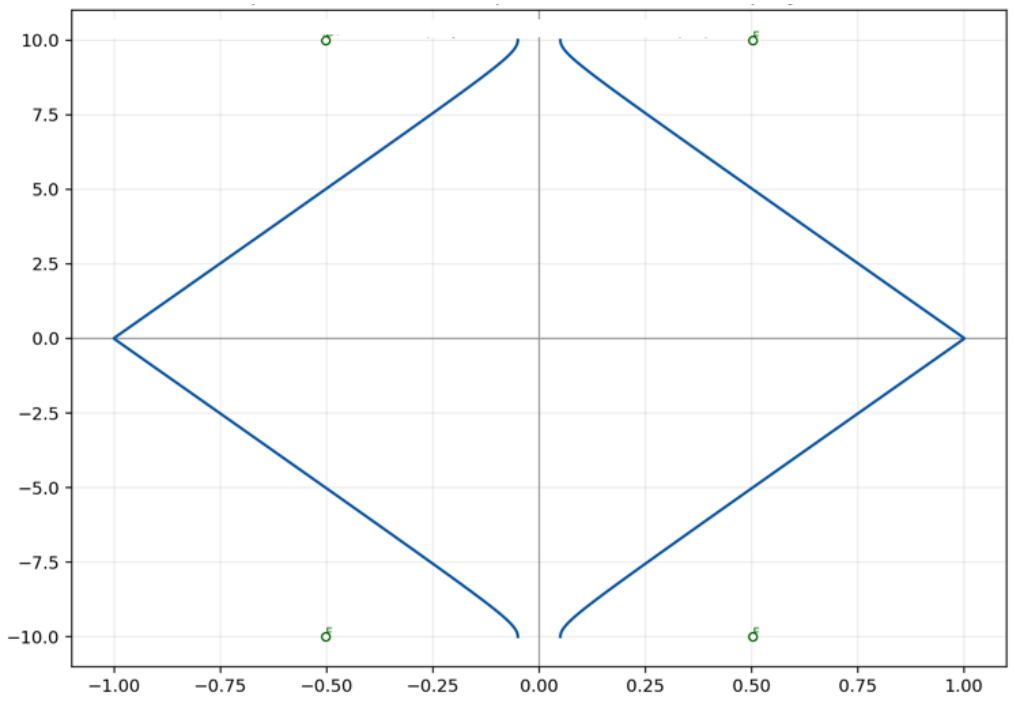

Рисунок 10.2. Горизонтальный тип, порядок 2: двумерное сечение с фокусами всех формальных гиперболических образующих. Параметры: a = 0.05, b = 0.5, R = 10.0, R_1 = 20.0.

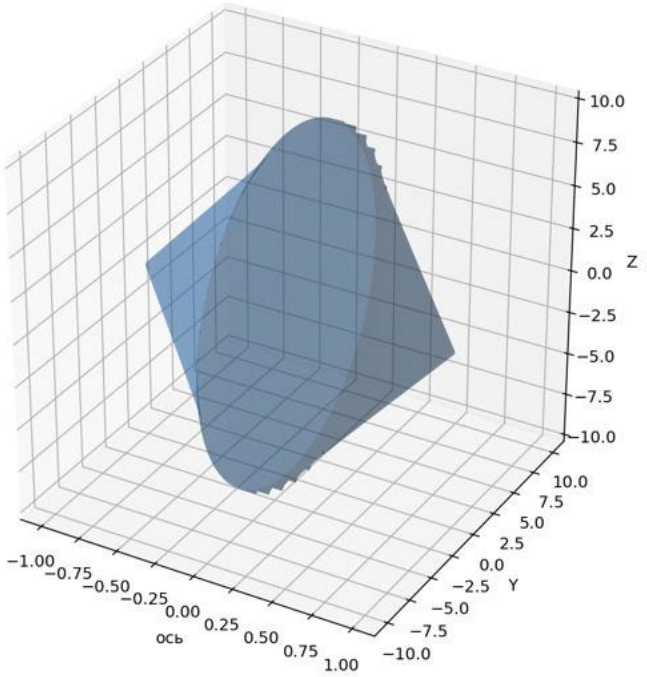

Рисунок 10.3. Вертикальный тип, порядок 2: трёхмерные граничные поверхности одного и того же внутреннего объёма.

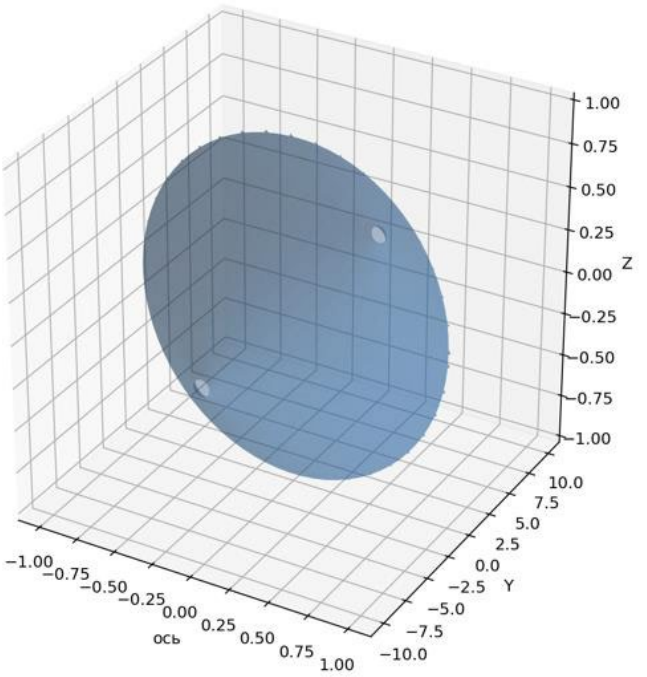

Рисунок 10.4. Горизонтальный тип, порядок 2: трёхмерные граничные поверхности одного и того же внутреннего объёма.

10.2. Построение псевдогиперболоидов третьего порядка

В данном разделе представлено конструктивное выведение геометрии третьего порядка. Вертикальный и горизонтальный типы рассматриваются как две реализации одного интервального закона. Рекурсивный оператор остаётся неизменным; различие состоит в исходной функции d(ξ), осевом носителе и ориентации вращения.

Третий порядок возникает после введения первого рекурсивного смещения R_1. Каждый исходный интервал [0, d] порождает две зоны: разностную и суммарную. После применения Merge эти зоны, как правило, образуют один радиальный интервал, если соприкасаются или пересекаются.

Формула третьего порядка в явном виде: $I_3(\xi) = \mathrm{Merge}([\max(R_1 - d(\xi), 0), R_1] \cup [R_1, R_1 + d(\xi)])$.

Смысл формулы заключается в следующем: внутренняя радиальная область переносится на уровень R_1, после чего строятся её внутренняя и внешняя границы. В эталонной конфигурации $R_1 = 20$ превышает максимальное значение d, поэтому отрицательные радиусы не возникают.

Для эталонных параметров a = 0.05, b = 0.5, R = 10, $R_1 = 20$ максимальное значение d у вертикального типа составляет 10. Следовательно, максимальный радиус третьего порядка равен 30, а оценка $M_3 = M_2 + R_1$ достигается в точности при |s| = a.

Показатель	Вертикальный тип	Горизонтальный тип
Порядок	n = 3	n = 3
Рекурсивные смещения	$R_1 = 20.0$	$R_1 = 20.0$
Формальные ветви	2	2
Максимальный радиус исходного профиля M_2	10.000000	1.001249
Верхняя оценка радиуса $M_3 = M_2 + R_1$	30.000000	21.001249

Контрольные точки построения

Следующая проверочная таблица третьего порядка построена при тех же эталонных размерных параметрах. В разделе второго порядка она не дублируется, поскольку относится именно к первому рекурсивному смещению R_1.

Тип	Точка	ξ	d(ξ)	Интервал после R_1	Площадь $A_3(\xi)$
Вертикальный	a	0.050000	10.000000	[(10.0, 30.0)]	2513.274123
Вертикальный	(a + L)/2	0.525625	4.767589	[(15.232411, 24.767589)]	1198.225850
Вертикальный	L	1.001249	0.000000	[(20.0, 20.0)]	0.000000
Горизонтальный	0	0.000000	1.001249	[(18.998751, 21.001249)]	251.641375

Горизонтальный	R/2	5.000000	0.502494	[(19.497506, 20.502494)]	126.290462
Горизонтальный	R	10.000000	0.050000	[(19.95, 20.05)]	12.566371

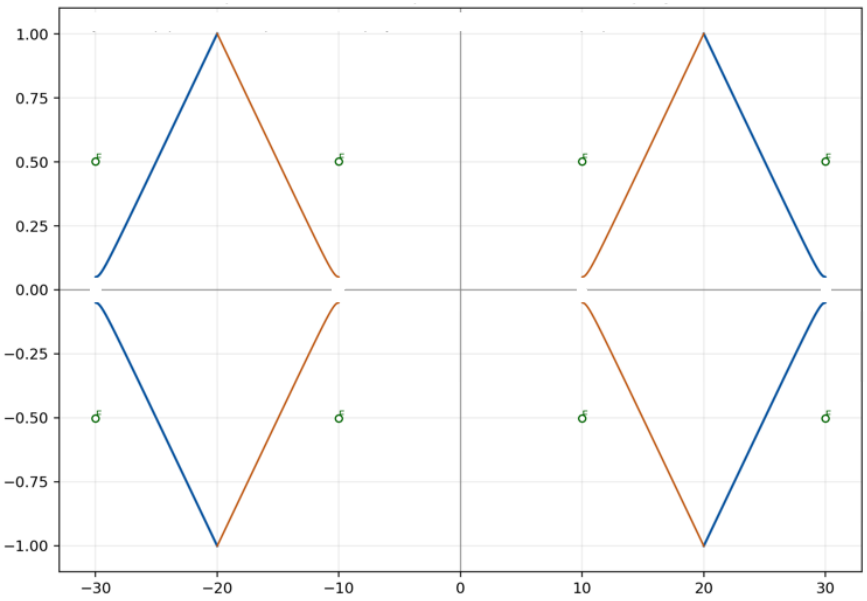

Рисунок 10.5. Вертикальный тип, порядок 3: двумерное сечение с фокусами всех формальных гиперболических образующих. Параметры: a = 0.05, b = 0.5, R = 10.0, R_1 = 20.0.

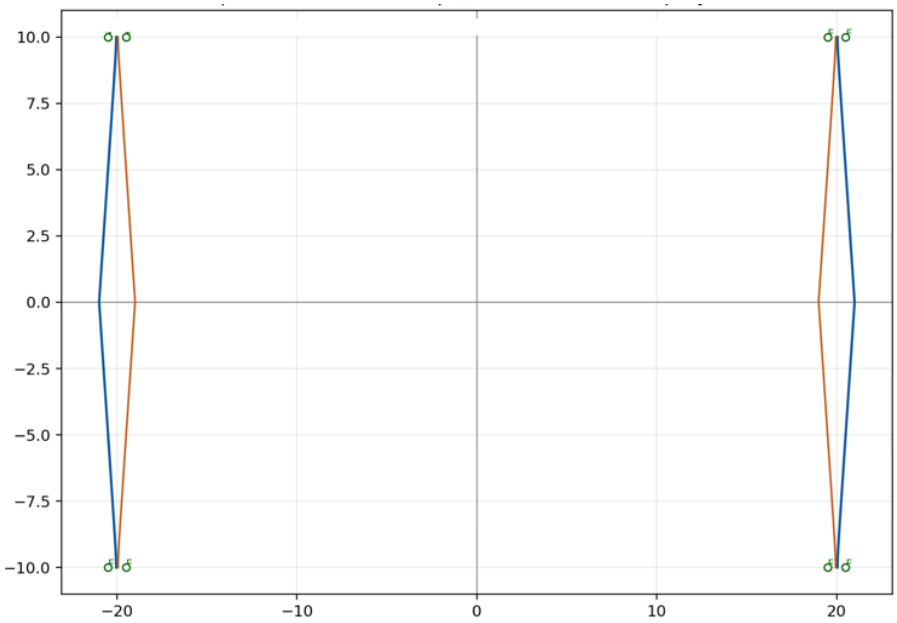

Рисунок 10.6. Горизонтальный тип, порядок 3: двумерное сечение с фокусами всех формальных гиперболических образующих. Параметры: a = 0.05, b = 0.5, R = 10.0, R_1 = 20.0.

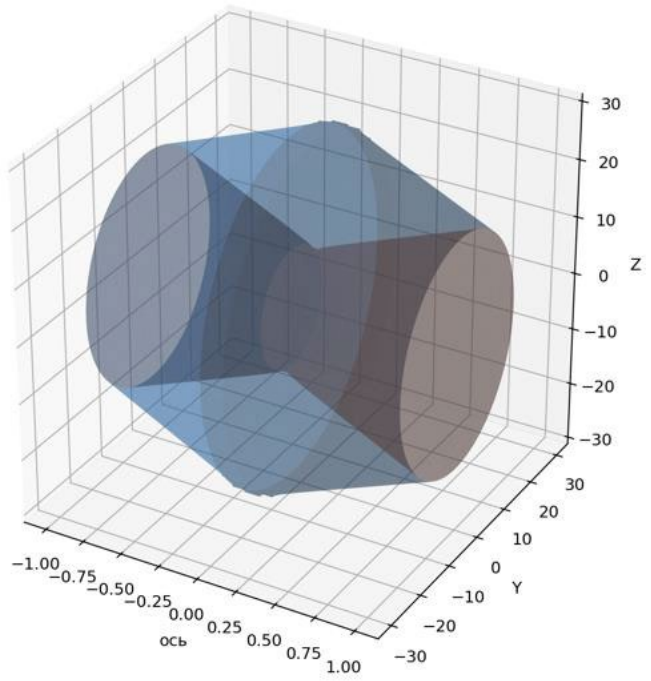

Рисунок 10.7. Вертикальный тип, порядок 3: трёхмерные граничные поверхности одного и того же внутреннего объёма.

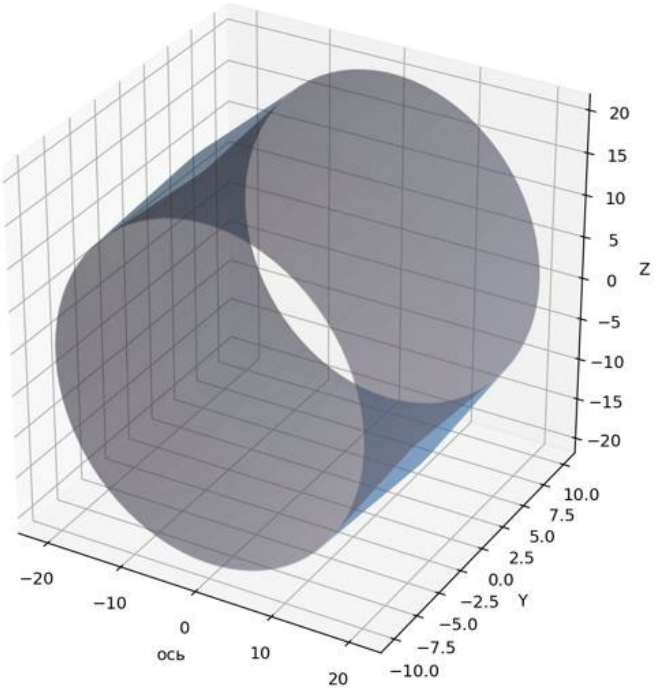

Рисунок 10.8. Горизонтальный тип, порядок 3: трёхмерные граничные поверхности одного и того же внутреннего объёма.

10.3. Построение псевдогиперболоидов четвёртого порядка

В этом разделе приведено конструктивное выведение геометрии четвёртого порядка. Вертикальный и горизонтальный типы выступают двумя реализациями одного интервального закона. Рекурсивный оператор не меняется; различия определяются исходной функцией d(ξ), осевым носителем и ориентацией вращения.

При переходе к четвёртому порядку вводится второе рекурсивное смещение. Дерево ветвей содержит четыре формальные гиперболические дуги. Однако физическая область по-прежнему определяется не деревом ветвей, а интервалами, полученными после применения C_R и Merge.

Выражение для ядра ветвей четвёртого порядка в явном виде: $B_4 = \{R_2 + (R_1 + d), R_2 - (R_1 + d), R_2 + (R_1 - d), R_2 - (R_1 - d)\}$.

Эта запись отражает вложенность построения: смещение R_2 действует на весь результат третьего порядка, а не применяется повторно к исходной функции d.

В качестве иллюстрации в атласе принято $R_2 = 40$. Тогда верхняя оценка радиуса вертикальной геометрии четвёртого порядка составляет 10 + 20 + 40 = 70. Это контрольное значение используется при визуализации и проверке таблиц.

Показатель	Вертикальный тип	Горизонтальный тип
Порядок	n = 4	n = 4
Рекурсивные смещения	$R_1 = 20.0$; $R_2 = 40.0$	$R_1 = 20.0$; $R_2 = 40.0$
Формальные ветви	4	4
Верхняя оценка радиуса $M_4 = M_2 + R_1 + R_2$	70.000000	61.001249
Интерпретация	Второе рекурсивное разделение до Merge	Второе рекурсивное разделение до Merge

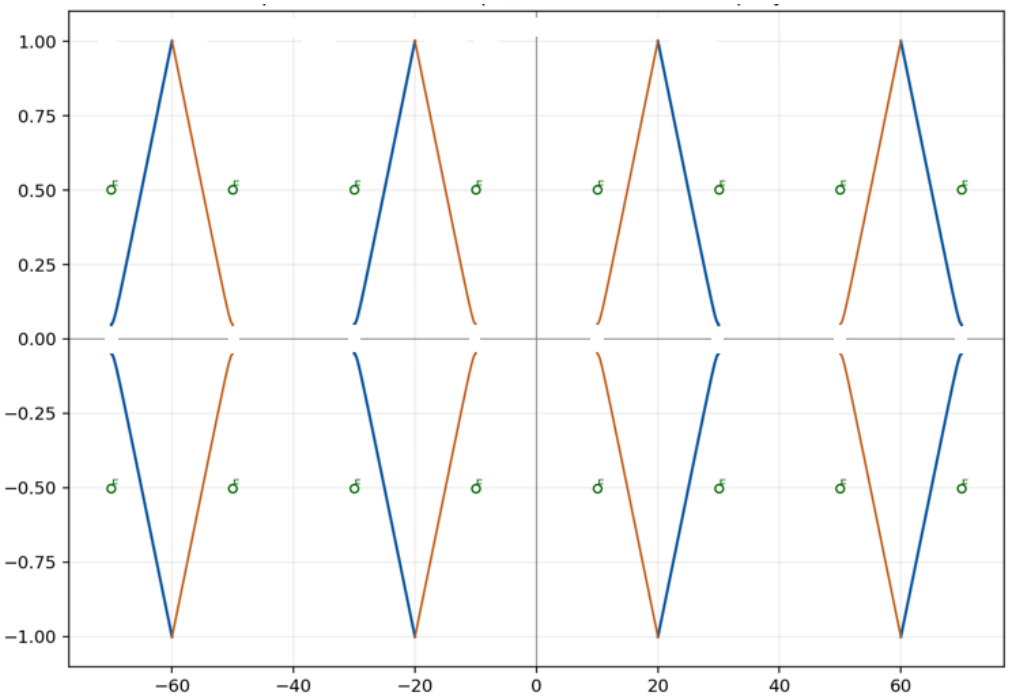

Рисунок 10.9. Вертикальный тип, порядок 4: двумерное сечение с фокусами всех формальных гиперболических образующих. Параметры: a = 0.05, b = 0.5, R = 10.0, R_1 = 20.0, R_2 = 40.0.

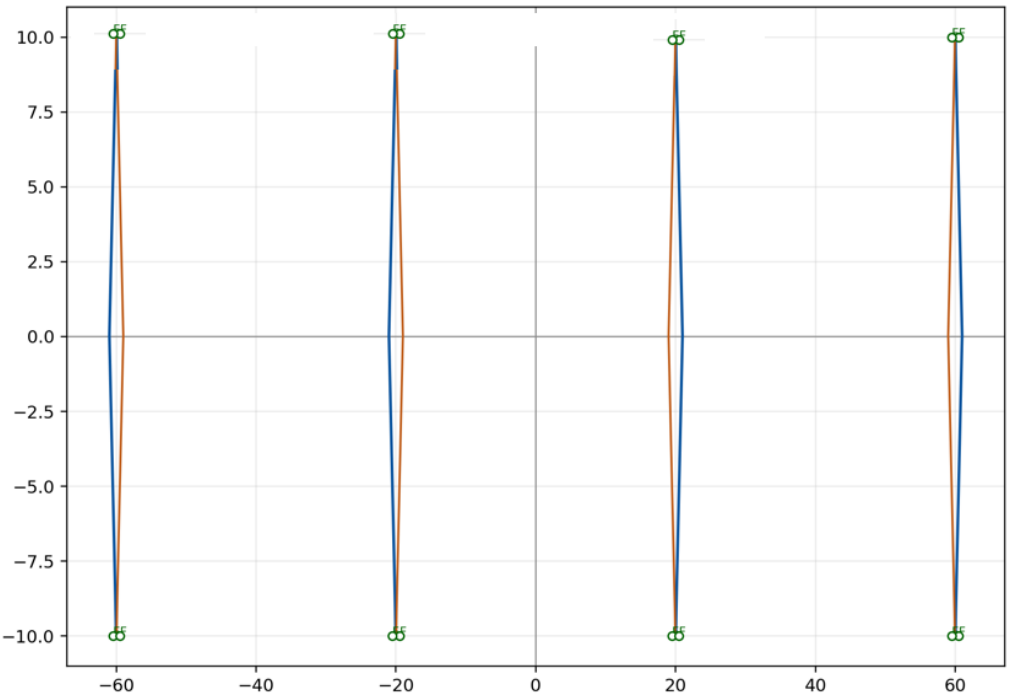

Рисунок 10.10. Горизонтальный тип, порядок 4: двумерное сечение с фокусами всех формальных гиперболических образующих. Параметры: a = 0.05, b = 0.5, R = 10.0, R_1 = 20.0, R_2 = 40.0.

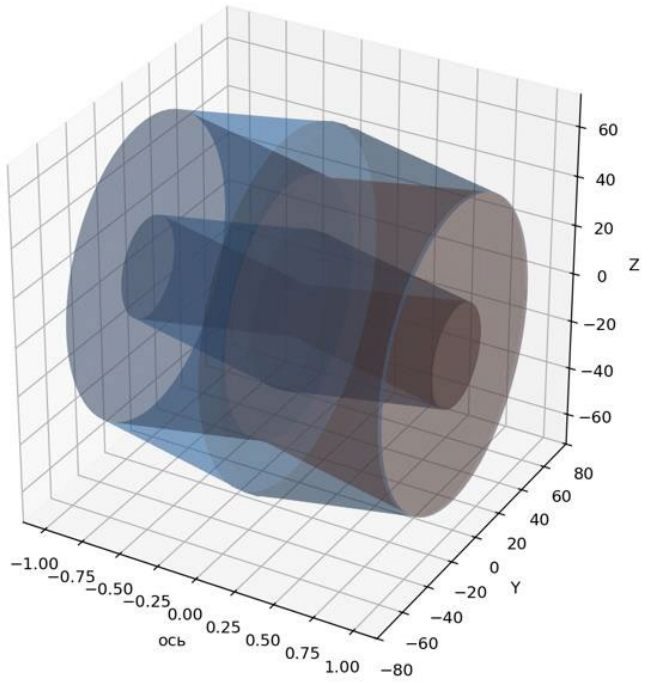

Рисунок 10.11. Вертикальный тип, порядок 4: трёхмерные граничные поверхности одного и того же внутреннего объёма.

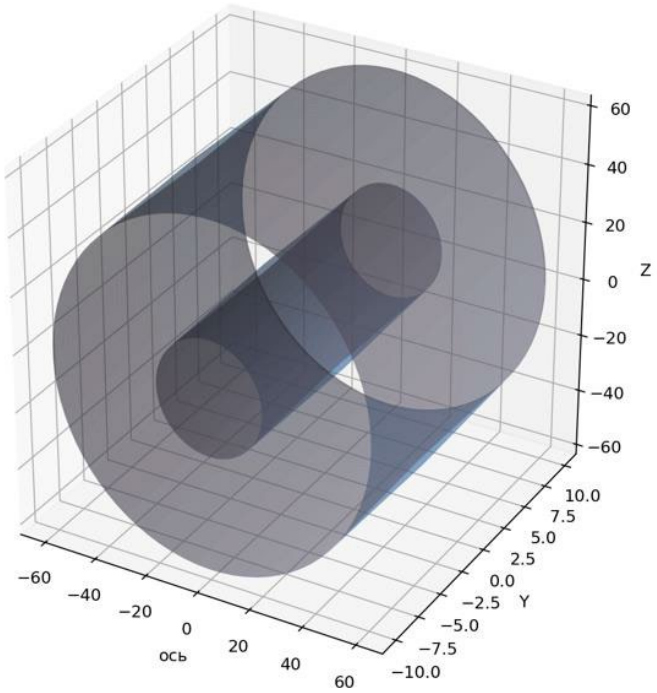

Рисунок 10.12. Горизонтальный тип, порядок 4: трёхмерные граничные поверхности одного и того же внутреннего объёма.

10.4. Построение псевдогиперболоидов общего n-го порядка

В данном разделе дано конструктивное построение геометрии общего n-го порядка. Вертикальный и горизонтальный типы вновь рассматриваются как две реализации одного интервального закона. Рекурсивный оператор не изменяется; различия обусловлены исходной функцией d(ξ), осевым носителем и ориентацией вращения.

Общий n-й порядок задаётся вложенной композицией операторов. Его нельзя представлять в виде произвольной суммы всех R_j с независимо выбранными знаками: построение осуществляется последовательно, и каждый новый параметр действует на уже сформированную интервальную структуру.

Общая формула в явном виде: I_{k+1}(ξ) — объединение, приведённое оператором Merge к канонической форме, всех интервалов C_{R_k}([α, β]), порождённых каноническими компонентами [α, β] множества I_k(ξ).

Смысл формулы состоит в том, что на каждом шаге все интервалы предыдущего порядка порождают новые интервалы, а Merge преобразует их в каноническую систему, не допуская повторного учёта одного и того же объёма.

На рисунках в качестве контрольного представителя общего порядка используется n = 5. Такая геометрия уже содержит восемь формальных ветвей и потому особенно наглядно показывает различие между формальным деревом ветвей и реальными компонентами после Merge.

Показатель	Вертикальный тип	Горизонтальный тип
Представительный порядок	n = 5	n = 5
Рекурсивные смещения	$R_1 = 20.0$; $R_2 = 40.0$; $R_3 = 80.0$	$R_1 = 20.0$; $R_2 = 40.0$; $R_3 = 80.0$
Формальные ветви	8	8
Верхняя оценка радиуса $M_5 = M_2 + R_1 + R_2 + R_3$	150.000000	141.001249
Роль в атласе	Контрольный представитель общего n-го порядка	Контрольный представитель общего n-го порядка

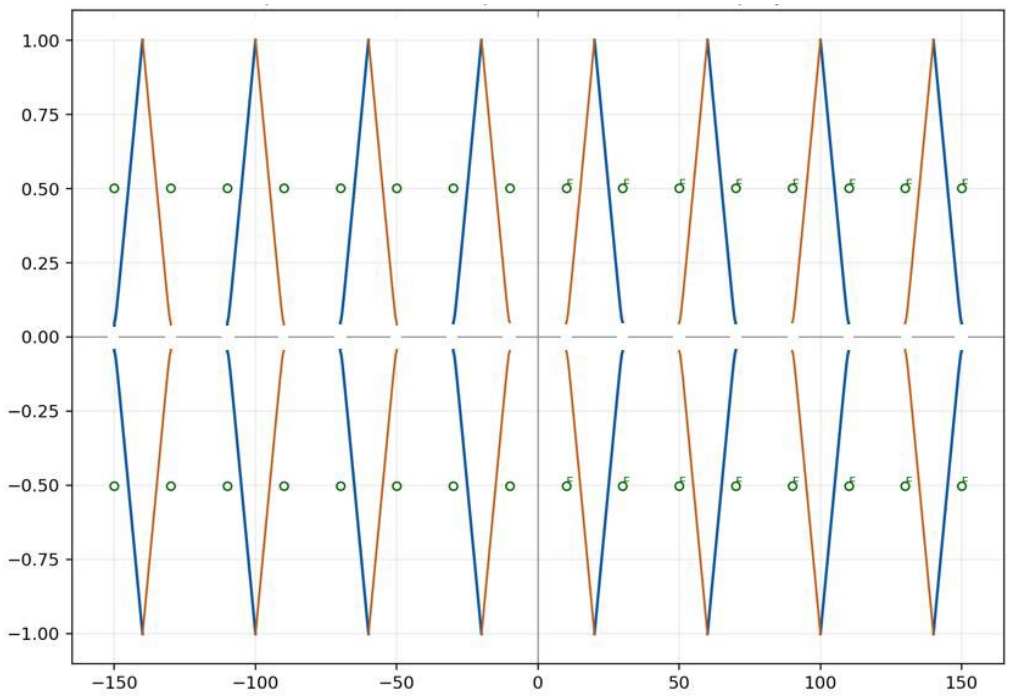

Рисунок 10.13. Вертикальный тип, порядок n = 5 как представитель общего n: двумерное сечение с фокусами всех формальных гиперболических образующих. Параметры: a = 0.05, b = 0.5, R = 10.0, R_1 = 20.0, R_2 = 40.0, R_3 = 80.0.

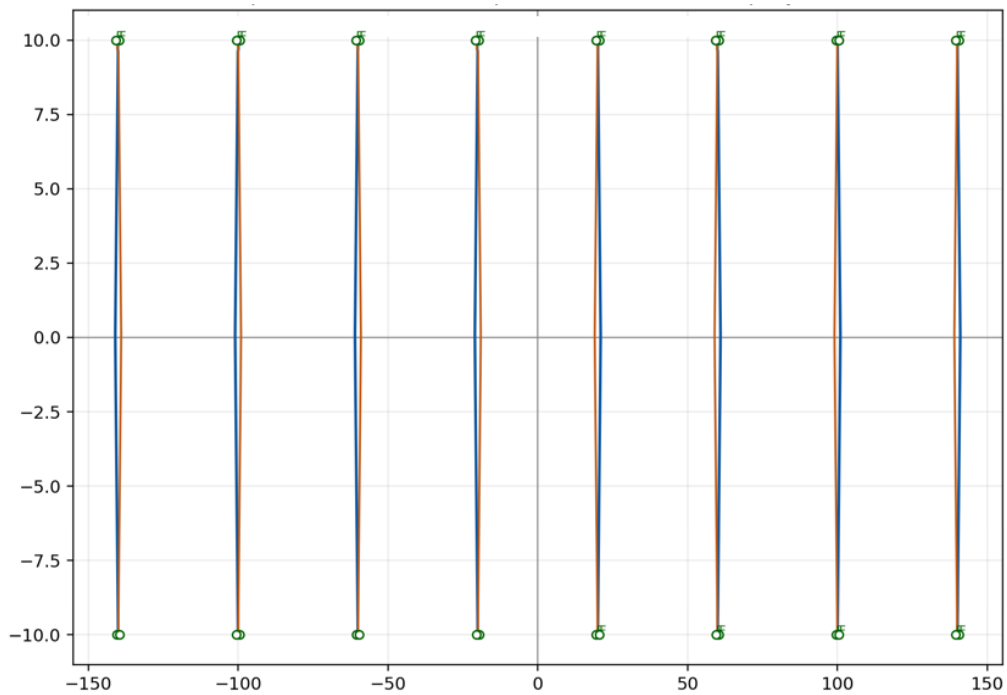

Рисунок 10.14. Горизонтальный тип, порядок n = 5 как представитель общего n: двумерное сечение с фокусами всех формальных гиперболических образующих. Параметры: a = 0.05, b = 0.5, R = 10.0, R_1 = 20.0, R_2 = 40.0, R_3 = 80.0.

10.5. Осевые системы псевдогиперболоидов как самостоятельный структурный класс

Осевой ряд представляет собой внешнюю операцию над уже построенным объёмом Ω_n. Он не повышает порядок, не вводит нового рекурсивного параметра и не изменяет число ветвей N_n. При этой операции несколько одинаковых экземпляров размещаются вдоль общей оси, образуя область Ω_{n,m} как объединение их внутренних объёмов.

При h > 0 между экземплярами сохраняется пустой промежуток. При h = 0 наблюдается предельное касание. При h < 0 соседние экземпляры перекрываются, вследствие чего общий объём перестаёт быть простой суммой объёмов отдельных объектов. В режиме перекрытия Merge лишь исключает двойной учёт общей части, но не устраняет исходные компоненты как структурные элементы.

Формула осевого ряда в явном виде: Ω_{n,m} представляет собой объединение копий Ω_n, сдвинутых вдоль общей оси на Δ_j, где Δ_j = −j(2H + h).

Смысл формулы: сначала строится один объект порядка n, затем m его копий располагаются вдоль оси с шагом 2H + h.

Режим	Условие	Геометрический смысл	Что проверять в будущих физических моделях
Раздельный	h > 0	Между экземплярами имеется пустой зазор	Независимость мод
Контактный	h = 0	Экземпляры касаются в предельных точках	Пороговые состояния
Перекрывающийся	h < 0	Возникает общий многокамерный объём	Каналы связи и медленные моды

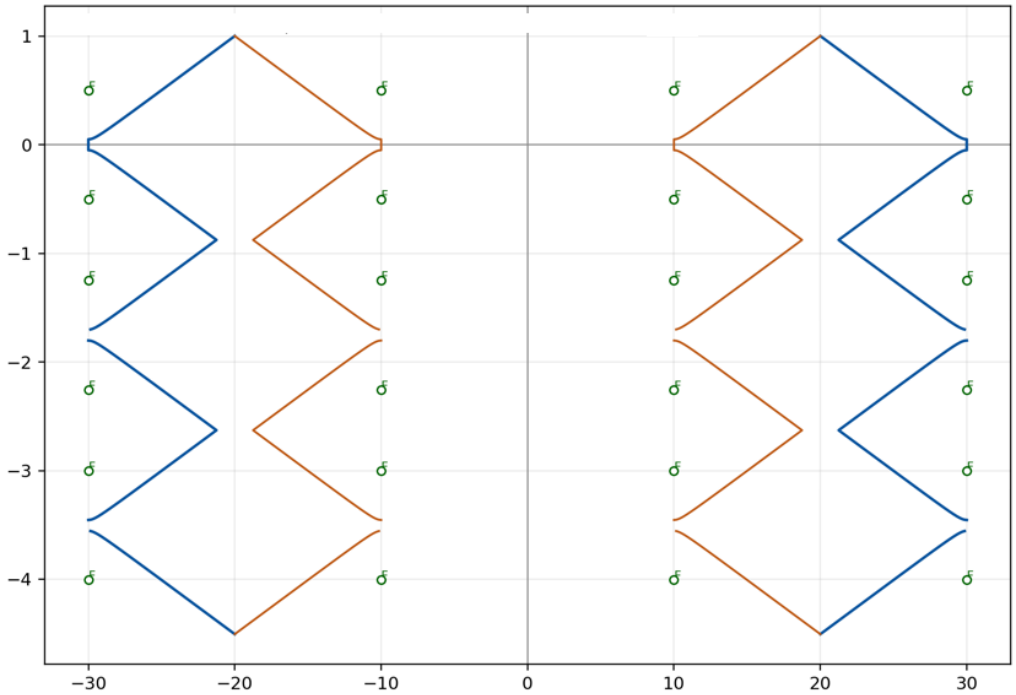

Рисунок 10.15. Вертикальная осевая система третьего порядка: двумерное сечение с фокусами всех формальных образующих каждого экземпляра ряда. Параметры: a = 0.05, b = 0.5, R = 10.0, R_1 = 20.0, m = 3, h = −0.25.

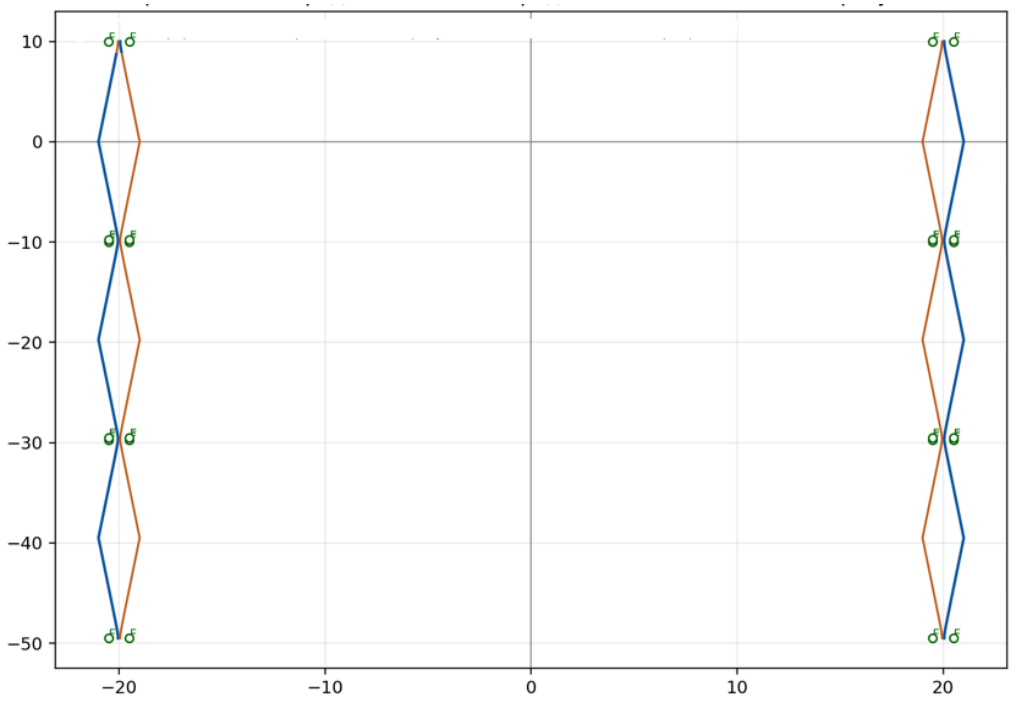

Рисунок 10.16. Горизонтальная осевая система третьего порядка: двумерное сечение с фокусами всех формальных образующих каждого экземпляра ряда. Параметры: a = 0.05, b = 0.5, R = 10.0, R_1 = 20.0, m = 3, h = −0.25.

11. Формальные результаты разграничения и методологический контекст

11.1. Назначение главы

В предшествующих главах настоящего тома установлены основные геометрические, топологические и теоретико-мерные свойства класса $\{\Omega_n, \Omega_{n,m}\}$: корректность интервальной рекурсии (главы 3–4), регулярность границы на гладких фрагментах и в местах сопряжений, возникающих после Merge (глава 7), измеримость площадей поперечных сечений и конечность объёма (глава 8), а также точная масштабная инвариантность при однородном изменении масштаба (глава 9). В главе 10 закреплён численный эталон. Глава 12 содержит фальсифицируемую программу верификации C1–C8, а глава 13 устанавливает трёхуровневый эпистемологический статус всех положений тома.

Настоящая глава занимает промежуточное положение. Её цель — доказать два формальных результата, позволяющих отличить класс $\{\Omega_n\}$ от двух наиболее естественных известных математических классов, с которыми можно ошибочно отождествить предложенную конструкцию: (i) аттракторов сжимающих систем итерируемых функций в смысле Хатчинсона и (ii) гладких поверхностей вращения класса C^2. Для каждого класса доказывается отдельная теорема разграничения. Других формальных результатов независимости здесь не заявляется.

Сопоставление с резонаторами мод шепчущей галереи, цепочками CROW, структурами DBR/Брэгга, платформами BIC и фрактальными антеннами имеет методологический, а не формальный характер: эти семейства определяются физическими режимами либо дополнительными, не чисто геометрическими данными. Поэтому формальная теорема разграничения с ними в рамках данного тома не имела бы корректной постановки. Методологический контекст приведён в § 11.4.

11.2. Теорема о несовпадении с аттракторами сжимающих IFS

Напомним стандартную конструкцию Хатчинсона. Конечное семейство отображений $\{F_i: X \to X\}$, $i=1,\dots,N$, полного метрического пространства (X,d) называется сжимающей системой итерируемых функций (IFS), если существует $\lambda<1$ такое, что $\mathrm{Lip}(F_i)\le\lambda$ для всех $i=1,\dots,N$; здесь $\mathrm{Lip}(F)$ — константа Липшица отображения F. Теорема Хатчинсона—Барнсли утверждает существование единственного непустого компактного множества $K\subset X$ (аттрактора), удовлетворяющего равенству $K=\bigcup_{i=1}^{N} F_i(K)$.

Рассмотрим формальные отображения ветвей, возникающие в рекурсии настоящего тома.

Определение 11.1. Пусть $n\ge 3$ и заданы рекурсивные смещения $R_1,\dots,R_{n-2}>0$. Соответствующее семейство формальных ветвей имеет вид $\boldsymbol{\mathcal{F}}_n=\{F_k^{+}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F_k^{-}:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid k=1,\dots,n-2\}$, где $F_k^{+}(r)=R_k+r$ и $F_k^{-}(r)=R_k-r$. Это элементарные отображения, которые на уровне формальной символьной рекурсии порождают радиальные концы дочерних интервалов из концов родительских интервалов до канонизации Merge (ср. главу 4, определение 4.2).

Теорема 11.1 (формальное семейство ветвей не является сжимающей IFS). Для $n\ge 3$ и всех $R_k>0$ верно следующее:

(а) Каждое $F\in\boldsymbol{\mathcal{F}}_n$ — изометрия $\mathbb{R}$ с константой Липшица, в точности равной единице: $|F(r_1)-F(r_2)|=|r_1-r_2|$ для всех $r_1,r_2\in\mathbb{R}$.

(б) Семейство $\boldsymbol{\mathcal{F}}_n$ не удовлетворяет условию сжатия Хатчинсона: не существует $\lambda<1$, для которого $\mathrm{Lip}(F)\le\lambda$ для всех $F\in\boldsymbol{\mathcal{F}}_n$.

(в) Следовательно, теорема Хатчинсона—Барнсли о существовании и единственности компактного аттрактора сжимающей IFS к $\mathcal{F}_n$ неприменима.

(г) Орбита любой точки $r_0 \in \mathbb{R}$ относительно произвольных конечных композиций отображений семейства $\mathcal{F}_n$ неограниченна в $\mathbb{R}$.

Доказательство. (а) Для F_k^+ имеем $|F_k^+(r_1)-F_k^+(r_2)|=|(R_k+r_1)-(R_k+r_2)|=|r_1-r_2|$. Для F_k^- аналогично: $|F_k^-(r_1)-F_k^-(r_2)|=|(R_k-r_1)-(R_k-r_2)|=|r_2-r_1|=|r_1-r_2|$. Следовательно, $\mathrm{Lip}(F)=1$ для каждого $F \in \mathcal{F}_n$.

(б) Из пункта (а) следует $\sup_{F\in\mathcal{F}_n}\mathrm{Lip}(F)=1$. Таким образом, равномерная оценка $\mathrm{Lip}(F)\le\lambda$ с $\lambda<1$ невозможна.

(в) Для применения теоремы Хатчинсона—Барнсли необходимо строгое условие $\sup_{F\in\mathcal{F}_n}\mathrm{Lip}(F)<1$. По пункту (б) оно нарушается. Поэтому существование единственного непустого компактного $K\subset\mathbb{R}$ с $K=\bigcup_{F\in\mathcal{F}_n}F(K)$ не следует из этой теоремы применительно к $\mathcal{F}_n$.

(г) Рассмотрим m-кратную композицию F_1^+: $(F_1^+)^m(r_0)=r_0+mR_1$. Так как $R_1>0$, то $|(F_1^+)^m(r_0)|\to\infty$ при $m\to\infty$. Следовательно, орбита r_0 неограниченна. □

Следствие 11.1. Конструкцию Ω_n нельзя представить как реализацию аттрактора классической сжимающей IFS Хатчинсона в $\mathbb{R}$, порождённой формальным семейством ветвей $\mathcal{F}_n$, при любом выборе положительных смещений R_k.

Замечание 11.1. Тем не менее конструкция Ω_n даёт корректно определённое компактное множество в $\mathbb{R}^3$ (теорема 4.6). Противоречия с теоремой 11.1 нет: компактность обеспечивается тремя внешними механизмами, не входящими в стандартную схему Хатчинсона: (i) рекурсия применяется к ограниченному радиальному множеству $I_2(\xi)\subset[0,M_2]$, а не к неограниченной орбите; (ii) глубина рекурсии конечна и равна $n-2$; (iii) ограничение радиальной полуоси $\rho\ge0$ и канонический оператор Merge (глава 4, определение 4.6) на каждом шаге отсекают и канонизируют итерационные образы.

Таким образом, динамика $\{\Omega_n\}$ структурно отличается от классической динамики IFS: в схеме Хатчинсона компактность возникает внутренним образом вследствие равномерного сжатия, а в рассматриваемом построении — благодаря ограниченному носителю исходного профиля, конечной глубине и отсечению при Merge.

Замечание 11.2. Теорема 11.1 не исключает возможности альтернативного IFS-подобного описания Ω_n при другом выборе базовых отображений, например специально подобранных аффинных сжатий $\mathbb{R}^2$, согласованных с носителем исходного профиля. Построение такого описания, если оно существует, выходит за рамки данного тома.

Замечание 11.3. Известны обобщения теории Хатчинсона на неравномерно сжимающие, конформные и граф-ориентированные IFS (Маулдин—Урбаньский, Кигами). Теорема 11.1 не относится к этим обобщениям: она исключает только классическую равномерно сжимающую интерпретацию, задаваемую семейством $\mathcal{F}_n$.

11.3. Теорема о негладкости границы

Теперь докажем второй результат разграничения. Напомним верхнюю оценку радиуса из главы 4: $M_n=M_2+\sum_{k=1}^{n-2}R_k$, $M_2=\max_\xi d(\xi)$, где $d(\xi)$ — исходный профиль (глава 2). По

соглашению полагаем $M_1:=M_2$. На рекурсивные смещения наложим условие (*): R_k>2M_k для всех k=1,…,n−2.

Условие (*) является достаточным, но не необходимым режимом, при котором ветви разности и суммы не сталкиваются преждевременно. Его всегда можно обеспечить выбором достаточно больших R_k, поскольку M_k=M_2+Σ_{j=1}^{k−2}R_j зависит только от M_2 и ранее выбранных смещений R_1,…,R_{k−2}.

Теорема 11.2 (типичное отсутствие гладкости класса C^2 у формального комплекса ветвей при n≥3). Пусть d — вертикальный или горизонтальный гиперболический исходный профиль главы 2 с параметрами a,b,R>0; n≥3; смещения R_1,…,R_{n−2} удовлетворяют (*). Определим формальный комплекс ветвей порядка n как объединение плоских дуг r_σ(ξ)=C(σ)+ε(σ)d(ξ), ξ∈supp d, по всем знаковым словам σ длины n−2. Обозначим это множество $\mathcal{A}$_n⊂{(ξ,ρ)}.

Тогда существует точка (ξ*,ρ*)∈$\mathcal{A}$_n, в которой две различные формальные дуги встречаются, имея односторонние вторые производные противоположных знаков. Следовательно, $\mathcal{A}$_n не является локально кривой класса C^2 на полуплоскости (ξ,ρ); соответствующая осесимметричная формальная поверхность, полученная вращением $\mathcal{A}$_n вокруг оси ξ, не является гладкой поверхностью вращения класса C^2, порождённой одной образующей C^2.

Доказательство. Шаг 1. Выберем ξ* в точке максимума исходного профиля d(ξ*)=M_2. Для вертикального гиперболического профиля главы 2 это ξ*=±a, для горизонтального — ξ*=0.

Шаг 2. Рассмотрим два знаковых слова длины n−2: σ^+=(+,+,…,+) и σ^-=(+,+,…,+,−). По теореме 5.1 им отвечают дуги r_{σ^+}(ξ)=C(σ^+)+d(ξ) и r_{σ^-}(ξ)=C(σ^-)−d(ξ). Непосредственное вычисление аффинных смещений даёт в ξ=ξ* одно и то же радиальное значение ρ*=R_1+R_2+…+R_{n−2}. Таким образом, дуги встречаются в точке (ξ*,ρ*).

Шаг 3. Дважды дифференцируя по ξ, получаем (r_{σ^+})″(ξ*)=+d″(ξ*), (r_{σ^-})″(ξ*)=−d″(ξ*). Для гиперболических профилей второй производной в максимуме приписывается ненулевое значение в соответствующем смысле: для вертикального профиля при ξ*=±a вторая производная неограниченна, но знак определён в одностороннем пределе; для горизонтального при ξ*=0 в исходном тексте приведена формула d″(0)=(a/b^2)(1+(R/b)^2)^(−1/2)≠0. Таким образом, односторонние вторые производные двух ветвей различаются знаками: (r_{σ^+})″(ξ*)≠(r_{σ^-})″(ξ*).

Шаг 4. Для локально C^2-гладкой кривой в полуплоскости (ξ,ρ) в каждой точке существует единственная вторая производная, не зависящая от направления приближения. Здесь две дуги встречаются с производными противоположных знаков. Поэтому одной C^2-параметризацией нельзя одновременно описать обе дуги в окрестности данной точки. Комплекс $\mathcal{A}$_n в этой точке, следовательно, не обладает гладкостью класса C^2 (в формулировке оригинала — не выше C^1).

Шаг 5. Вращение $\mathcal{A}$_n вокруг оси ξ даёт осесимметричную поверхность в $\mathbb{R}^3$. Из-за осевой симметрии нарушение гладкости распространяется на окружность {(ξ*,ρ*cosφ,ρ*sinφ): φ∈[0,2π)} при ρ=ρ*. Поэтому формальная поверхность комплекса ветвей не является гладкой поверхностью вращения класса C^2 с единой образующей C^2. □

Следствие 11.2 (пересмотренная формулировка). При условиях теоремы 11.2 комплекс $\mathcal{A}$_n нельзя параметризовать одной C^2-образующей; соответственно формальная осесимметричная поверхность комплекса не является классической гладкой поверхностью вращения класса C^2. Однако фактическая граница ∂Ω_n канонической области Ω_n наследует негладкость только от

тех частей $\mathcal{A}_n$, которые после Merge остаются граничными точками. Формальные контакты ветвей разности и суммы одного родительского интервала после Merge попадают внутрь объединённого интервала и перестают быть точками границы Ω_n. Глобальная C^2-гладкость самой $\partial\Omega_n$ зависит от дополнительных условий столкновения и видимости внешней огибающей комплекса $\mathcal{A}_n$; этот вопрос в настоящем томе не рассматривается.

Замечание 11.4 (пересмотренная формулировка). Установленный теоремой 11.2 структурный факт — рекурсия порождает формальный комплекс ветвей, не являющийся глобально C^2-гладким, — достаточен для разграничения данной конструкции и гладких поверхностей вращения с единой C^2-образующей. Только в этом точном смысле здесь заявляется формальное различие.

11.4. Методологический контекст: связь с известными классами

Теоремы 11.1 и 11.2 устанавливают формальное разграничение с двумя математически определёнными классами. Далее обсуждаются родственные геометрические и физико-инженерные направления, для которых такое формальное разграничение было бы некорректно: они определяются приближёнными физическими режимами или данными, не сводимыми к **геометрии.**

11.4.1. Обобщённые системы итерируемых функций

В теории фракталов и размерностей известны расширения схемы Хатчинсона на неравномерно сжимающие, конформные, бесконечные и граф-ориентированные IFS. Теорема 11.1 не исключает подобных описаний Ω_n; она касается исключительно классической равномерно сжимающей IFS, порождаемой формальными ветвями $\boldsymbol{\mathcal{F}}_n$. Возможность и полезность обобщённого IFS-описания остаются открытыми вопросами.

11.4.2. Анализ на фракталах и самоподобных множествах

Исследования самоподобных множеств типа ковра Серпинского (Стричартц, Кигами) рассматривают спектры внутренних операторов Лапласа на фракталах, хаусдорфова размерность которых строго меньше размерности пространства вложения и на которых заданы самоподобные формы Дирихле или гармонические структуры. В отличие от них Ω_n — полноразмерные подмножества $\mathbb{R}^3$ с $\mathscr{H}^3(\Omega_n)>0$. Операторы, рассматриваемые в главе 12 и последующих томах, — обычный лапласиан Δ в $\mathbb{R}^3$ на Ω_n с классическими условиями Дирихле, Неймана или Робена. Таким образом, основные объекты изучения различаются: анализ фракталов относится к нижеразмерным предельным множествам и внутренним операторам, а настоящая работа — к полноразмерным областям и классическим операторам.

11.4.3. Фрактальные антенны и резонаторные полости

Существует обширная инженерная литература по рекурсивным границам электромагнитных антенн и полостей (Вернер, Гангули, Пуэнте и др.). Обычно рассматриваются двумерные фрактальные кривые (Коха, Гильберта, граница Серпинского), образующие периметр плоской антенны, либо самоподобные масштабы периметра, обеспечивающие многополосный резонанс за счёт согласования длины волны с последовательными масштабами.

Настоящее построение отличается тремя обстоятельствами: оно объёмно и трёхмерно; основано на интервальной рекурсии радиальных сечений (глава 4), а не на самоподобии периметра; исходный профиль гиперболический (глава 2), а не полигональный. Формальная теорема

отделения от данного инженерного класса не формулируется, поскольку класс задаётся рабочими физическими режимами. Их сравнение предусмотрено программой C1–C8 и последующими томами.

11.4.4. Платформы WGM, CROW, DBR и BIC

Каждая из перечисленных архитектур определяется физическим режимом, реализованным на геометрической либо материальной структуре: WGM — удержанием азимутальных мод вблизи гладкой выпуклой границы; CROW — слабо связанными резонаторными полостями с зонной структурой вследствие межрезонаторной связи; DBR/брэгговские структуры — периодическими диэлектрическими или акустическими слоями с фотонными либо фононными запрещёнными зонами; BIC — локализованными состояниями, вложенными в континуум излучения благодаря симметрии либо интерференции.

Это не геометрические классы в смысле настоящего тома. Формальная теорема их отделения на чисто геометрическом уровне не имеет корректной постановки. Сравнение имеет методологический характер и переносится в программу C1–C8 и последующие волновые тома.

11.4.5. Процедурная геометрия и методы функций уровня

Процедурная геометрия (конструктивное геометрическое моделирование, CAD) и методы функций уровня (Сетиан, Ошер) дают алгоритмические средства представления сложных областей через рекурсивные правила или нулевые уровни функций, эволюционирующих по заданным дифференциальным уравнениям в частных производных. Ω_n в принципе может быть встроена в любую из этих схем, поскольку задаётся рекурсивно и ограничена кусочно-гладкой поверхностью, представимой нулевым уровнем. Это удобно для вычислительной реализации (глава 10), но не означает появления иного теоретического описания в смысле теорем 11.1–11.2. Формальная теорема отделения от этих классов не заявляется.

11.5. Сводка формальных результатов главы

В главе доказаны два результата: (1) семейство формальных ветвей $\boldsymbol{\mathcal{F}}$_n состоит из изометрий $\mathbb{R}$ с константой Липшица 1, не образует сжимающей IFS и не имеет аттрактора в классическом смысле теоремы Хатчинсона—Барнсли; (2) при условии (*) комплекс формальных ветвей $\mathcal{A}$_n для n≥3 содержит точку встречи дуг с односторонними вторыми производными противоположного знака и, следовательно, не задаёт гладкую поверхность вращения класса C^2 посредством одной C^2-образующей.

Именно этими двумя результатами ограничены формальные утверждения о независимости в настоящем томе. Сравнения с обобщёнными IFS, анализом на фракталах, фрактальными антеннами, WGM/CROW/DBR/BIC и процедурной геометрией остаются методологическими. Более сильные различия — особенно различия в волновых режимах {Ω_{n,m}} и инженерных платформ § 11.4.3–11.4.4 — подлежат проверке в программе главы 12 и дальнейших томах.

11.6. Место главы в структуре тома

Главы 2–9 конструируют класс {Ω_n,Ω_{n,m}} и доказывают его основные геометрические, топологические и теоретико-мерные свойства; глава 10 задаёт воспроизводимый численный стандарт; глава 11 формально отделяет построенный класс от сжимающих IFS-аттракторов (теорема 11.1) и гладких поверхностей вращения класса C^2 (теорема 11.2); глава 12 формулирует фальсифицируемую программу C1–C8 для последующей проверки волновых эффектов; глава 13

закрепляет трёхуровневый статус утверждений: доказанные теоремы, численные эталоны и физические гипотезы.

Таким образом, две теоремы главы составляют формальную основу независимости конструкции. Они не доказывают новизну волновых эффектов и не означают, что {Ω_{n,m}} уже образует самостоятельный класс в эксплуатационном, спектральном либо инженерном смысле. Более сильные утверждения допускаются здесь только как фальсифицируемые гипотезы главы 12.

11.7. Заключительное замечание о границах главы

Назначение главы — структурное, а не рекламное. Рассматриваемая конструкция занимает определённое место среди осесимметричных геометрических объектов: она не является аттрактором IFS Хатчинсона и не сводится к гладкой поверхности вращения с единой C^2-образующей; это кусочно-гладкая полноразмерная осесимметричная область, полученная конечной интервальной рекурсией гиперболического исходного профиля с ограничением радиальной полуоси и каноническим оператором Merge. Её полезность для волновых, спектральных либо инженерных задач в настоящем томе не устанавливается; соответствующие вопросы отнесены к главе 12 и последующим томам программы ГВИ.

12. Программа полноволновой верификации C1–C8

12.1. Назначение главы

В предшествующих главах разработаны строгий геометрический аппарат, численный эталон и сравнительный контекст. Однако сама геометрия области не устанавливает её волновых свойств. Научно допустимый переход от геометрии к физике должен быть не декларативным, а фальсифицируемым.

Именно эту задачу решает настоящая глава: формулируется программа полноволновой верификации, предназначенная для проверки возможных нетривиальных волновых эффектов в областях Ω_n и Ω_{n,m} при решении физических задач различной природы.

Полноволновая верификация здесь не означает, что свойства «волн любой природы» уже доказаны. Это строго организованная исследовательская программа, в которой (1) выбирается конкретный волновой оператор; (2) задаются граничные условия; (3) определяется диапазон безразмерных параметров; (4) выбираются контрольные геометрии; (5) фиксируются измеримые метрики; (6) заранее устанавливаются условия опровержения гипотез. Только такой порядок превращает будущие физические исследования из обещаний в проверяемую науку.

12.2. Почему одной геометрии недостаточно

Даже новизна геометрической конструкции сама по себе не гарантирует локализации мод, высокой добротности, узких спектральных окон, направленного излучения или универсальности в различных физических областях. Эти эффекты зависят как минимум от геометрии области, волнового оператора, граничных условий и масштаба относительно длины волны.

Правильная научная логика такова: геометрия → кандидат для проверки с помощью уравнений в частных производных, а не геометрия → автоматически доказанный волновой эффект. Поэтому глава 12 служит необходимым завершением первого тома: она связывает доказанный геометрический аппарат с пока недоказанными физическими последствиями.

12.3. Общий принцип фальсифицируемости

Принцип 12.1. Фальсифицируемость волнового утверждения. Любое утверждение о потенциальном волновом преимуществе геометрии Ω_n или Ω_{n,m} должно сопровождаться: (1) точной метрикой; (2) конкретным вычислительным методом; (3) набором контрольных геометрий; (4) диапазоном параметров; (5) условием, при котором гипотеза считается опровергнутой.

Замечание 12.1. Если не задано последнее условие — условие неудачи, — исследование перестаёт быть строгой проверкой и превращается в подбор удачных изображений либо частных случаев.

12.4. Проверяемые волновые операторы

В настоящем томе волновые уравнения не решаются, однако заранее указываются классы уравнений в частных производных, на которых предстоит проверять геометрию.

12.4.1. Электромагнитный класс

Верификация должна включать задачи, выводимые из уравнений Максвелла: поиск собственных мод, рассеяние, открытые резонаторные постановки с идеально согласованными слоями PML либо эквивалентными открытыми границами.

12.4.2. Акустический класс

Рассматриваются скалярные задачи Гельмгольца, линейная акустика замкнутых и открытых областей, постановки с акустически жёсткими и мягкими стенками.

12.4.3. Квантово-волновой класс

Предусматриваются стационарные задачи типа Шрёдингера, ловушки и квазиловушки в потенциальных или геометрически ограниченных областях, открытые постановки с корректно заданными утечками.

Замечание 12.2. Смысл междисциплинарной проверки не в смешении разных теорий, а в выяснении того, проявляет ли один геометрический класс нетривиальные эффекты в различных классах уравнений при корректном безразмерном согласовании.

12.5. Контрольные геометрии

Для серьёзной верификации Ω_n и Ω_{n,m} недостаточно абсолютных численных значений. Необходимы эталонные геометрии для сравнения.

Определение 12.1. Контрольная геометрия — объект, который (1) принадлежит известному классу; (2) сопоставим по масштабу и внешним размерам; (3) рассчитывается тем же численным методом; (4) служит базовой моделью для сравнения метрик.

Минимальный рекомендуемый набор: 1) цилиндрическая полость сопоставимого объёма; 2) единичная гладкая поверхность вращения без рекурсивного многозонного строения; 3) отдельный исходный объект второго порядка Ω_2; 4) осевой массив без внутренней рекурсии — аналог простой осевой цепочки; 5) при необходимости специализированные эталоны типа WGM, CROW, Брэгга/DBR и гладкого гиперболоида.

Замечание 12.3. Контроли следует подбирать так, чтобы различие результатов можно было связать с рекурсивной интервальной геометрией, а не с тривиальными различиями объёмов, масштабов или качества сетки.

12.6. Сводная таблица критериев

Таблица 12.1. Программа полноволновой верификации C1–C8. Для каждого критерия устанавливаются метрика, метод, контроль и условие опровержения.

Критерий	Проверяемое свойство	Основная метрика	Метод	Контроль	Условие опровержения
C1	Геометрическая корректность	V_n, A_n, N_merge, M_n	Основная и независимая реализации	Эталон главы 10	Несовпадение формул, кода и эталонных таблиц
C2	Локализация	E_zone/E_total	FEM/FDTD, собственные моды	Ω_2, цилиндр, гладкая одиночная область	Отсутствие статистически значимого преимущества
C3	Спектральные окна	$\Delta(ka)$, запрещённые области, минимумы пропускания	Частотное сканирование	Контрольные полости и цепочки	Нет окна, отличимого от контроля
C4	Утечки/добротность	Q, P_out/P_in, комплексная собственная частота	Открытые границы, PML	Гладкая область той же размерности	Добротность не выше контроля либо утечки не уменьшены
C5	Направленность	$\Delta\theta$_div, боковые лепестки, коэффициент направленности	Анализ дальнего поля	Осесимметричный эталон	Нет выделенного направленного максимума
C6	Масштабная согласованность	Инвариантность β, ρ_0, ka	Проверка изменения масштаба	Та же задача в различных единицах	Зависимость от единиц или нарушение подобия
C7	Межфизическое пересечение	U_EM ∩ U_AC ∩ U_Q	Три независимых решателя PDE	Одинаковый паспорт геометрии	Пустое пересечение рабочих режимов

C8	Устойчивость	δ*	Возмущения формы, сопряжений и параметров	Эталон и близкие варианты	Эффект исчезает при сколь угодно малом возмущении

12.7. Общая структура критериев C1–C8

Программа включает восемь критериев: C1 — геометрическая корректность; C2 — локализация; C3 — спектральные окна; C4 — утечки и добротность; C5 — направленность; C6 — масштабная согласованность; C7 — межфизическое пересечение; C8 — устойчивость.

Они охватывают три уровня проверки. Уровень A — дофизический: соответствие вычислительной геометрии определённому в томе объекту (C1). Уровень B — внутри одной физической платформы: нетривиальные эффекты в одном классе PDE (C2–C6). Уровень C — межплатформенный: сохранение геометрически обусловленных эффектов в различных физических постановках и при возмущениях (C7–C8).

12.8. Критерий C1: геометрическая корректность

Полноволновые утверждения лишаются научного смысла, если переданная решателю геометрия отличается от аналитически определённого объекта. Поэтому C1 — базовый критерий всей программы.

Определение 12.2. Метрики C1. Необходимо проверить как минимум M_n, A_n(ξ), V_n, N_merge(ξ) и I_n(ξ) в контрольных точках.

Метод: 1) построить геометрию основной эталонной вычислительной реализацией; 2) построить её повторно в независимой реализации; 3) сопоставить интервалы в контрольных точках, площади сечений, объёмы, число компонент и фокальные таблицы формальных дуг.

Опровержение C1 происходит, если аналитические формулы и код дают разные интервалы; независимая реализация не воспроизводит таблицы главы 10; в численном эксперименте нарушается теорема 4.3 или 9.1; поведение вырожденных интервалов [x,x] оказывается несогласованным между теорией и программой.

Замечание 12.4. C1 необходимо выполнить до волновых расчётов; иначе все последующие результаты теряют интерпретируемость.

12.9. Критерий C2: локализация

Проверяется, существуют ли в Ω_n зоны, где энергия собственных или вынужденных мод статистически заметно сильнее сосредоточена по сравнению с контрольными геометриями.

Определение 12.3. Метрика локализации. Пусть U(x) — плотность энергии соответствующего поля. Для выбранной зоны Z⊂Ω определим η_Z=[∫_Z U(x)dV]/[∫_Ω U(x)dV]. В электромагнитной постановке может применяться U_EM=(1/2)(|E|²+|H|²), в акустической — стандартная акустическая энергия, в квантовой — |ψ|² либо соответствующий функционал.

Метод: поиск собственных мод методом конечных элементов FEM или FDTD; при необходимости — вынужденный отклик на внешнее возбуждение; статистика по нескольким модам и/или частотным интервалам.

Контроли: Ω_2 с тем же исходным профилем; цилиндр сопоставимого объёма; гладкая осесимметричная область без рекурсии.

C2 не подтверждается, если η_Z не превышает контроль с заранее установленной статистической значимостью; предполагаемый эффект исчезает при умеренном уточнении сетки; локализация связана лишь с численной особенностью единственной моды.

Замечание 12.5. В первом томе локализация остаётся гипотезой. C2 задаёт только порядок её проверки.

12.10. Критерий C3: спектральные окна

Проверяется возникновение конечных частотных интервалов, в которых спектральное поведение исследуемой геометрии устойчиво отличается от контрольной.

Определение 12.4. Метрики спектрального окна. В зависимости от постановки используются разрыв между собственными значениями, окно пропускания или отражения, интервал усиленной локализации, диапазон комплексных частот с особыми режимами утечек. Обобщённая ширина окна: $\Delta(ka)=ka_max-ka_min$, где [ka_min,ka_max] определяется выбранным диагностическим критерием.

Методы: сканирование по ka, анализ собственных частот, вычисление рассеяния/прохождения, сравнение порядков n и значений h. Контроли: Ω_2, гладкая исходная геометрия, простая осевая цепочка без внутренней рекурсии.

C3 не подтверждается, если искомое окно не обнаружено; выявленное окно неотличимо от контрольного; окно исчезает при повышении точности расчёта либо умеренных изменениях параметров.

12.11. Критерий C4: утечки и добротность

Проверяется, обеспечивает ли рекурсивная геометрия моды с меньшими утечками или повышенной добротностью относительно контроля.

Определение 12.5. Метрики C4: $Q=\omega/(2|\gamma|)$, P_out/P_in, τ_decay, δ_decay — в зависимости от конкретной постановки.

Метод: открытая задача на собственные моды, PML или эквивалентная открытая граница, расчёт по комплексной частоте, при необходимости — затухание во временной области.

Контроли: гладкая осесимметричная область того же внешнего масштаба, исходный объект Ω_2, одиночная полость без осевой цепочки.

C4 не подтверждается, если Q систематически не превышает контроль; снижение утечек обусловлено исключительно искусственными особенностями сетки/PML; мода неустойчива к небольшим изменениям геометрии или граничных условий.

Замечание 12.6. Высокая добротность в первом томе не считается доказанным свойством; требуется успешная проверка C4.

12.12. Критерий C5: направленность

Проверяется, создаёт ли осевой массив или рекурсивная геометрия устойчивую пространственную направленность излучения либо рассеяния.

Определение 12.6. Основные метрики направленности: $\Delta\theta_div$ — угловая ширина главного лепестка; D_max — максимальная направленность; S_side — уровень боковых лепестков.

Метод: обработка дальнего поля, открытая задача излучения, сканирование по h, m и n. Контроли: осесимметричный эталон сравнимого размера, осевой массив без внутренней рекурсии и единичная область.

C5 не подтверждается, если выраженный направленный максимум отсутствует; сужение главного лепестка сопровождается неконтролируемым усилением боковых; эффект исчезает при небольшом изменении возбуждения.

12.13. Критерий C6: согласованность масштабирования

Проверяется соответствие волновых расчётов геометрической теореме о масштабной инвариантности. В геометрической части уже показано сохранение формы в безразмерных координатах при равномерном масштабировании. Теперь требуется убедиться, что волновые метрики зависят от безразмерных комбинаций, а не от выбора единиц измерения.

Определение 12.7. Проверка C6. Если две задачи имеют одинаковые $\beta,\rho_0,\gamma_k,\eta,ka$, но различный абсолютный масштаб, то их безразмерные волновые метрики должны совпадать в пределах численной ошибки.

Метод: решение одной задачи при масштабах s и s′, сопоставление безразмерных спектральных и энергетических метрик при одинаковой относительной точности сетки.

C6 не подтверждается, если при фиксированных безразмерных параметрах результаты существенно зависят от системы единиц; нарушается масштабное подобие за пределами объяснимой численной ошибки; выявленный эффект оказывается артефактом дискретизации.

Замечание 12.7. C6 особенно важен для любых утверждений о переносимости геометрии между СВЧ-, оптическими, акустическими и квантовыми постановками.

12.14. Критерий C7: межфизическое пересечение

Проверяется существование непустой области параметров, в которой Ω_n демонстрирует сходный качественный эффект не в одном, а в нескольких классах уравнений в частных производных.

Определение 12.8. Рабочие множества режимов. Пусть U_EM — множество безразмерных параметров с подтверждённым эффектом в электромагнитной задаче; U_AC — соответствующее множество для акустики; U_Q — для квантово-волновой модели. Критерий межфизической непустоты задаётся пересечением $U_EM \cap U_AC \cap U_Q$.

Метод: выбрать единый паспорт геометрии, сравнить безразмерные параметры, решить три независимые задачи PDE, выделить общую качественную особенность (локализация, окно, рост Q, устойчивая мода и т. п.). C7 не подтверждается, если $U_EM \cap U_AC \cap U_Q = \emptyset$.

Замечание 12.8. Даже непустое пересечение ещё не доказывает «полноволновую универсальность», а показывает лишь наличие непустого межфизического класса режимов.

12.15. Критерий C8: устойчивость

Проверяется сохранение эффекта при небольших, но неизбежных отклонениях формы, параметров и сглаживании сопряжений.

Определение 12.9. Метрика устойчивости. Для интересующей волновой метрики M(Ω) вводится предельно допустимое возмущение δ*, при котором M(Ω^δ) остаётся в заранее заданном допуске относительно исходного значения или не опускается ниже порога.

Рассматриваются: изменения R_k; изменения h; изменения a,b,R; локальное сглаживание сопряжений Merge заданным параметром; случайный шум границы; осевые и радиальные смещения экземпляров массива.

Метод: параметрическое исследование возмущений, анализ Монте-Карло для случайных изменений, оценка чувствительности, сравнение до и после регуляризации.

C8 не подтверждается, если δ* практически равно нулю; эффект исчезает при сколь угодно малом возмущении; результат существует лишь для одной тонко настроенной геометрии.

Замечание 12.9. Именно C8 отделяет потенциально пригодную инженерную геометрию от чисто математически необычной, но физически неустойчивой формы.

12.16. Минимальный протокол численного эксперимента

Чтобы критерии C1–C8 не оставались общими пожеланиями, необходимо закрепить минимальный стандарт полного расчётного исследования.

Протокол 12.2. Минимальный стандарт волновой проверки. Каждый эксперимент должен содержать: 1) паспорт геометрии a,b,R,R_k,h,n,m,β,ρ₀,γ_k,η; 2) описание PDE-задачи (оператор, граничные условия, открытая/замкнутая постановка); 3) численный метод (FEM/FDTD или другой решатель, размерность, тип сетки, критерий сходимости); 4) контрольные геометрии; 5) метрики, соответствующие одному или нескольким критериям C1–C8; 6) сеточную сходимость; 7) условие неудачи, зафиксированное до анализа результатов.

Замечание 12.10. Именно последнее требование отличает честную проверку от интерпретации, подобранной после получения результата.

12.17. Порядок применения критериев

Критерии C1–C8 следует применять не в произвольном порядке. Научно корректная последовательность такова: (1) C1 — вначале геометрия; (2) C6 — затем согласованность масштабирования; (3) C2–C5 — физические эффекты внутри одной платформы; (4) C8 — устойчивость обнаруженных эффектов; (5) C7 — лишь затем межфизическое сопоставление.

Замечание 12.11. Переход непосредственно к C7 или к сильным прикладным утверждениям без выполнения C1, C6 и C8 методологически неверен.

12.18. Что считать успешным результатом второго тома

Для следующего этапа исследований успешным результатом может быть не «доказательство всего сразу», а любой из следующих сценариев: 1) обнаружение устойчивого усиления локализации в определённом классе параметров; 2) выявление конечного спектрального окна, отсутствующего у контроля; 3) обнаружение моды с улучшенной добротностью Q при фиксированном типе открытой границы; 4) выявление непустого пересечения по меньшей мере двух физических классов; 5) установление диапазона устойчивости δ*>0.

Замечание 12.12. Даже один такой результат станет существенным продолжением тома 1. И напротив, отрицательный результат по одному или нескольким критериям не опровергает геометрическую теорию, а лишь уточняет пределы её физической применимости.

12.19. Эпистемологический статус программы C1–C8

Программа C1–C8 не входит в состав уже доказанной геометрии. Она имеет статус формализованной исследовательской гипотезы и методологического протокола. Её научная сила состоит в том, что она допускает независимое воспроизведение, отрицательный результат, корректные сравнения с эталонными моделями и не смешивает геометрическую новизну с физическим доказательством.

Именно в этом смысле глава 12 завершает том 1: она не подменяет отсутствующие физические свидетельства, а добросовестно организует путь к их получению.

12.20. Итоги главы

Сформулирована программа полноволновой верификации для следующих томов. Установлена необходимость фальсифицируемости волновых утверждений; введён набор контрольных геометрий; определены восемь критериев C1–C8 (геометрическая корректность, локализация, спектральные окна, утечки и добротность, направленность, масштабная согласованность, межфизическое пересечение, устойчивость). Для каждого определены метрика, метод, контроль и условие опровержения. Введён минимальный стандарт численного волнового эксперимента, закреплён правильный порядок критериев и уточнён эпистемологический статус программы как проверяемого перехода от геометрии к физике.

Таким образом, математический и вычислительный объект, построенный в первом томе, получает наряду со строгой геометрической основой научно корректную программу дальнейшей проверки в электромагнитных, акустических и квантово-волновых моделях.

13. Эпистемологический статус тома 1: доказанные положения, численно установленные результаты и сохраняющиеся гипотезы

13.1. Почему необходимо разграничение научного статуса

В любой новой исследовательской программе особенно важно различать три уровня утверждений: (1) строго доказанные результаты; (2) численно воспроизведённые факты, не доказанные для всех возможных случаев; (3) гипотезы, ожидающие последующей физической проверки.

Без такого разграничения геометрический аппарат, численные примеры и физические ожидания смешиваются. Возникает неверное впечатление, будто математическая корректность объекта автоматически означает доказанную волновую эффективность. Настоящая глава устанавливает необходимую границу. Её цель — не ослабить первый том, а обеспечить его научную устойчивость: строгая теория должна точно знать пределы собственного доказанного содержания.

13.2. Три уровня научного статуса

Уровень A — доказано. Сюда относятся положения, строго выведенные в главах 3–9 в форме определений, лемм, теорем и следствий.

Уровень B — численно установлено. Сюда входят результаты главы 10: эталонные таблицы, значения объёмов, контрольные интервалы, фокальные таблицы, численные проверки формул. Эти сведения воспроизводимы и проверяемы, но не являются теоремами «для всех параметров».

Уровень C — гипотеза. К этому уровню относятся полноволновые утверждения: локализация, спектральные окна, высокая добротность Q, направленность, применимость в разных физических областях, технологическая устойчивость. Они не отвергаются и не объявляются доказанными; их проверка формально передаётся программе C1–C8.

13.3. Что доказано в первом томе

Ниже систематизированы строго доказанные либо строго обоснованные положения.

13.3.1. Уровень исходных профилей

В главе 2 строго введены допустимые исходные профили, вертикальный и горизонтальный гиперболические типы, базовые значения L и c, свойства чётности, ограниченности и допустимости профилей.

13.3.2. Интервальный аппарат

В главе 3 установлены существование и единственность канонического представления, корректность оператора Merge, 1-липшицевость элементарных отображений, корректность оператора C_R, локальное разделение двух зон одного интервала и монотонность C_R.

13.3.3. Рекурсивная теория

В главе 4 строго доказаны корректность определения I_n(ξ), неотрицательность интервальных состояний, ограниченность радиусов, конечность числа компонент, замкнутость графика G_n, компактность Ω_n и Ω_{n,m}, полнота интервального описания как множества и как характеристики объёмной меры.

13.3.4. Геометрия и функционалы

В главах 7–9 получены формула гауссовой кривизны на гладких участках, кусочно-гладкий характер границы, формулы площадей и объёмов, измеримость и конечность этих функционалов, масштабная инвариантность.

Замечание 13.1. Именно данный корпус результатов образует математическое ядро первого тома. Он не зависит от того, окажутся ли будущие волновые эффекты сильными, слабыми либо отсутствующими.

13.4. Что остаётся гипотезой

Перечислим положения, не доказанные в настоящем томе и подлежащие дальнейшей проверке исключительно по критериям главы 12.

13.4.1. Гипотезы локального и спектрального поведения

Не доказаны усиленная локализация, наличие спектральных окон, селективное модовое поведение, подавление либо усиление утечек.

13.4.2. Гипотезы свойств открытых резонаторов

Не доказаны высокая добротность Q, режимы BIC или квази-BIC, исключительное подавление радиационных потерь.

13.4.3. Гипотезы эффектов осевых массивов

Не доказаны направленность излучения, увеличение эффективной апертуры, коллективные моды осевых массивов, преимущества относительно базовых цепочек.

13.4.4. Гипотезы межфизической применимости

Не доказано, что один геометрический класс обеспечивает сходные эффекты в электромагнитных, акустических и квантово-волновых моделях.

13.5. Гипотезы технологической реализации

Не доказаны технологическая оптимальность, устойчивость к реальным производственным погрешностям, преимущества при аддитивном, литографическом или механическом изготовлении.

13.6. Сводная таблица эпистемологического статуса

Таблица 13.1. Доказанные положения, соответствующие критерии проверки и гипотезы.

Утверждение	Статус в томе 1	Где установлено / проверяется	Примечание
Корректность канонического представления	Доказано	Лемма 3.1	Базовая корректность
Корректность Merge	Доказано	Теорема 3.1	Корректность оператора
1-липшицевость g_R,h_R	Доказано	Лемма 3.2	Регулярность отображений
Локальное разделение двух зон одного интервала	Доказано	Теорема 3.2	Топологическое свойство
Монотонность C_R	Доказано	Теорема 3.3	Порядковое свойство
Корректность рекурсии I_n	Доказано	Теорема 4.1	Корректность конструкции
Неотрицательность интервальных состояний	Доказано	Теорема 4.2	Допустимость состояний
Ограниченность M_n	Доказано	Теорема 4.3	Параметрическая оценка
Конечность числа компонент	Доказано	Теорема 4.4	Топологическая оценка
Замкнутость графика G_n	Доказано	Теорема 4.5	Структурная замкнутость
Компактность Ω_n	Доказано	Теорема 4.6	Топологическая компактность
Компактность Ω_{n,m}	Доказано	Теорема 4.7	Обобщённая компактность
Полнота интервального описания	Доказано	Теоремы 4.8–4.9	Полнота описания

Кусочно-гладкий характер границы	Доказано	Теорема 7.4	Регулярность границы
Формула гауссовой кривизны	Доказано	Теорема 7.1	Геометрическая характеристика
Корректность площади сечения	Доказано	Теорема 8.1	Размерностная корректность
Измеримость A_n(ξ)	Доказано	Теорема 8.2	Измеримость функционала
Конечность объёма V_n	Доказано	Теорема 8.4	Теоретико-мерная оценка
Масштабная инвариантность	Доказано	Теорема 9.1	Инвариантность преобразования
Локализация поля	Гипотеза	C2	Требуется физическая верификация
Спектральные окна	Гипотеза	C3	Требуется физическая верификация
Высокая добротность Q	Гипотеза	C4	Требуется физическая верификация
Фокусировка / направленность	Гипотеза	C5	Требуется физическая верификация
Межфизическое пересечение	Гипотеза	C7	Требуется межфизическая проверка
Устойчивость волнового эффекта	Гипотеза	C8	Требуется проверка устойчивости

Таблица проверки верхних радиальных границ для той же конфигурации атласа. Значения не являются новыми допущениями: они непосредственно следуют из $M_n \le M_2 + \Sigma R_k$ и приведены для аудита численного эталона.

Порядок	Формальных ветвей	Верхний радиус, верт.	Верхний радиус, гориз.	Безразмерный радиус, верт.	Безразмерный радиус, гориз.
2	1	10.000000	1.001249	200.000000	20.024984
3	2	30.000000	21.001249	600.000000	420.024984
4	4	70.000000	61.001249	1400.000000	1220.024984
5	8	150.000000	141.001249	3000.000000	2820.024984

13.7. Почему разграничение укрепляет, а не ослабляет теорию

На первый взгляд строгое разграничение может показаться ограничением масштаба заявленного исследовательского направления. В действительности оно даёт противоположный эффект.

Причина 1. Исключается псевдодоказательность: теория не предполагает, что геометрическая новизна автоматически означает физическую универсальность.

Причина 2. Повышается доверие к доказанному: добросовестное отделение доказанных положений от недоказанных делает математическое ядро исследования более убедительным.

Причина 3. Программа становится фальсифицируемой: физические ожидания перестают быть лозунгом и превращаются в систему проверок.

Причина 4. Допускается отрицательный результат: если некоторые гипотезы не подтвердятся, геометрическая теория сохранится, а границы её физической применимости будут уточнены.

13.8. Корректная формулировка научного результата тома 1

По итогам всех глав монографию следует характеризовать следующим образом: том 1 вводит и строго формализует новый класс рекурсивно формируемых осесимметричных областей, доказывает их основные геометрические и вычислительные свойства, закрепляет стандарт воспроизводимости и формирует фальсифицируемую программу перехода к волновым задачам.

Такая формулировка является научно обоснованной и достаточно сильной. В конце первого тома нельзя утверждать, что уже доказаны управление волнами любой природы, универсальная локализация, высокая добротность во всех диапазонах, межчастотная и межфизическая универсальность либо прикладное превосходство над известными платформами. Эти утверждения должны оставаться за пределами нынешнего тома.

13.9. Итоги главы

Зафиксирован эпистемологический статус всей монографии. Разделены три уровня утверждений: доказанные положения, численно установленные результаты и сохраняющиеся гипотезы. Собран и систематизирован перечень строгих результатов первого тома; уточнён статус эталонных числовых данных; перечислены пока недоказанные полноволновые свойства; показано, что такое разграничение повышает научную достоверность работы; закреплена корректная формулировка её главного результата.

Таким образом, логическая архитектура книги завершается: читатель точно понимает, где проходит граница между строго установленной конструктивной геометрией и физикой, которая ещё должна быть подтверждена.

Заключение

В настоящем томе создан и формализован первый уровень исследовательской программы «Геометрическая волновая инженерия» — уровень конструктивной геометрии, интервальной рекурсии и вычислительной воспроизводимости. Главный результат заключается в том, что введённый класс рекурсивно формируемых осесимметричных областей Ω_n и $\Omega_{n,m}$ может задаваться не описательно или эвристически, а строго: через исходный профиль, семейства радиальных интервалов, рекурсивный оператор C_R, канонический оператор Merge, осевую компоновку и безразмерную параметризацию.

1. Создан новый геометрический объект

Центральным объектом служит не отдельная ветвь, не визуальная оболочка и не формальная гиперболическая дуга, а полный внутренний объём, определяемый интервальными сечениями

$I_n(\xi)\subset[0,\infty)$. Это позволило перейти от образных описаний геометрии к строгому языку множеств, операторов и функционалов.

2. Разработан аппарат интервальной рекурсии

Введены пространство интервальных состояний $I([0,\infty))$, каноническое представление конечных объединений интервалов, оператор Merge, элементарные радиальные отображения, рекурсивный оператор C_R и правило полного шага $I_{k+1}(\xi)=Merge(C_{R_{k-1}}(I_k(\xi)))$. Именно этот аппарат образует математическое ядро всей теории.

3. Доказаны основные геометрические свойства

Строго установлены корректность канонизации Merge; 1-липшицевость элементарных отображений; неотрицательность и ограниченность интервальных состояний; конечность числа компонент; замкнутость графика семейства интервалов; компактность Ω_n и $\Omega_{n,m}$; полнота интервального описания; корректность и конечность функционалов площади и объёма; масштабная инвариантность. Тем самым геометрический объект получил полноценное математическое обоснование.

4. Исключено смешение методологических уровней

Последовательно разграничены формальное дерево ветвей и реальный внутренний объём; гладкие участки границы и сопряжения после Merge; фокусы гиперболических дуг и волновая фокусировка; доказанные геометрические факты и предполагаемые физические эффекты. Это позволяет избежать двух типичных ошибок ранних исследовательских программ: подмены строгого объекта рисунком и преждевременного объявления физических эффектов доказанными.

5. Сформирован вычислительный стандарт

В монографии задан численный эталон с фиксированными параметрами, включая интервальные сечения, площади, объёмы, верхние радиальные оценки, таблицы формальных фокусов и контрольные соотношения для независимой проверки. Следовательно, первый том представляет собой не только аналитическое изложение, но и воспроизводимую вычислительную геометрию.

6. Определено место нового класса среди известных архитектур

Сравнительный анализ показал, что рекурсивные псевдогиперболоидные области не сводятся к обычным гладким поверхностям вращения и не отождествляются напрямую с платформами WGM, CROW, DBR, BIC либо аттракторами классических сжимающих IFS. С этими классами они могут пересекаться по отдельным структурным признакам, но образуют особую геометрическую конструкцию благодаря интервальной рекурсии, канонизации Merge и разделению внутреннего порядка и внешней осевой компоновки. Таким образом, геометрическая новизна первого тома определена без риторического преувеличения.

7. Сформулирована программа дальнейшей физической верификации

Предложена система критериев C1–C8, определяющая фальсифицируемый переход от геометрии к волновым моделям. Дальнейшие тома и статьи должны основываться не на декларациях, а на проверке локализации, спектральных окон, добротности Q, направленности, масштабной согласованности, межфизического пересечения и устойчивости. Эта программа переводит исследовательскую идею от интуитивного этапа к строгой научной валидации.

Итоговый научный статус первого тома

Первый том пока не является завершённой универсальной теорией управления волнами произвольной природы и частоты: такое заявление было бы преждевременным. Вместе с тем он уже представляет самостоятельный результат иного характера: вводит строгую структурно-геометрическую основу новой исследовательской программы, задаёт воспроизводимый класс областей, доказывает их основные свойства и формирует корректную дорожную карту перехода к физике. Именно в этом смысле настоящий труд следует рассматривать как первый том новой научной теории.

Перспективы последующих томов

Следующий этап должен быть посвящён не усилению общих формулировок, а реализации формализованной программы проверки: 1) независимой верификации эталонной геометрии и кода; 2) постановке электромагнитных задач на собственные моды и рассеяние; 3) акустическим задачам; 4) квантово-волновым задачам; 5) сравнению с контрольными геометриями; 6) анализу устойчивости к сглаживанию сопряжений и параметрическим возмущениям; 7) выделению непустых областей параметров, где геометрия действительно создаёт нетривиальный физический эффект.

После выполнения этих шагов геометрическая волновая инженерия сможет перейти от строго организованной геометрической программы к многоуровнево подтверждённой теории.

Итоговая формулировка тома 1

Рекурсивные псевдогиперболоидные области высших порядков образуют структурно выделенный класс осесимметричных внутренних объёмов, формально отделённый от сжимающих систем итерируемых функций (теорема 11.1) и от гладких поверхностей вращения с единой C^2-образующей (теорема 11.2). Этот класс задаётся интервальной рекурсией, операторной канонизацией и безразмерной параметризацией и потому пригоден для последующей строгой постановки волновых задач различной природы.

Список обозначений

Ниже приведены основные обозначения, используемые в первом томе; для удобства они сгруппированы по смысловым категориям.

1. Геометрические объекты

Ω_n — осесимметричная область n-го рекурсивного порядка.

$\Omega_{n,m}$ — конечная система осевой компоновки из m копий области Ω_n.

$\partial\Omega_n$ — граница области Ω_n.

$Ax(\Omega_n)$ — осевой носитель области Ω_n, то есть множество значений осевой координаты с непустым сечением.

$G_n=\{(\xi,\rho):\rho\in I_n(\xi)\}$ — график семейства интервалов $I_n(\xi)$ на плоскости (ξ,ρ).

2. Координаты и переменные

ξ — осевая координата.

ρ — радиальная координата в цилиндрической системе.

φ — угловая координата вращения вокруг оси.

s — осевая переменная вертикального исходного профиля.

u — осевая переменная горизонтального исходного профиля.

$\bar{\xi}=\xi/a$ — безразмерная осевая координата.

$\bar{\rho}=\rho/a$ — безразмерная радиальная координата.

3. Исходные профили и базовая гиперболическая геометрия

d(ξ) — общий исходный профиль: неотрицательная ограниченная функция, задающая базовое радиальное сечение.

d_v(s) — вертикальный гиперболический исходный профиль.

d_h(u) — горизонтальный гиперболический исходный профиль.

$a>0$ — базовый осевой масштаб исходного профиля.

$b>0$ — базовый радиальный параметр гиперболической образующей.

$R>0$ — базовый радиальный уровень исходного профиля.

$L=a\sqrt{[1+(R/b)^2]}$ — продольная полудлина носителя вертикального типа.

$c=\sqrt{(a^2+b^2)}$ — фокальное расстояние исходной гиперболы.

$\Omega_2(d)$ — исходная область второго порядка, порождённая профилем d.

$\Omega_2^{\wedge}(v)$, $\Omega_2^{\wedge}(h)$ — области второго порядка соответственно для вертикального и горизонтального типов исходного профиля.

4. Интервальные состояния

I([0,∞)) — пространство конечных объединений замкнутых ограниченных интервалов на полуоси [0,∞), включая пустое множество.

I_n(ξ) — интервальное состояние порядка n при фиксированной осевой координате ξ.

[α,β] — отдельная компонента-интервал, $\alpha\le\beta$.

N_n(ξ) — число интервальных компонент в каноническом представлении I_n(ξ).

N_comp(X) — число интервальных компонент состояния X.

N_merge(ξ) — число компонент после канонизации Merge в сечении ξ.

∅ — пустое интервальное состояние.

[x,x] — вырожденный интервал нулевой длины.

5. Операторы и отображения

g_R(r)=max(R−r,0) — элементарное разностное отображение радиуса: отражение относительно R с отсечением отрицательных значений.

h_R(r)=R+r — элементарное суммарное отображение радиуса.

C_R([α,β])=[max(R−β,0),max(R−α,0)]∪[R+α,R+β] — действие оператора C_R на отдельный интервал.

C_R(X) — действие оператора C_R на произвольное интервальное состояние X∈I([0,∞)).

Merge — оператор канонизации, переводящий конечное объединение интервалов в каноническое представление попарно разделённых интервалов.

Č_R=Merge∘C_R — нормализованный рекурсивный шаг: исходный оператор C_R с последующей канонизацией Merge.

max(x,0) — проекция формального радиуса на полуось [0,∞).

6. Рекурсивные параметры

R_k≥0 — k-е рекурсивное смещение.

n — внутренний рекурсивный порядок области.

m — число экземпляров в осевой системе.

$I_2(\xi)=[0,d(\xi)]$ — базовое интервальное состояние второго порядка.

I_{k+1}(ξ)=Č_{R_{k−1}}(I_k(ξ)) — правило перехода к следующему порядку.

7. Формальные ветви и дерево ветвей

$F_k^+(r)=R_k+r$ — формальное отображение суммарной ветви.

$F_k^-(r)=R_k-r$ — формальное отображение разностной ветви без отсечения.

$\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)\in\{+1,-1\}^m$ — знаковое слово дерева формальных ветвей.

F_σ — композиция формальных отображений, соответствующая знаковому слову σ.

$\varepsilon(\sigma)=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m$ — итоговый знак формальной ветви.

C(σ) — аффинное смещение формальной ветви.

F_σ(r)=C(σ)+ε(σ)r — общий вид формальной ветви.

B_n(ξ) — множество формальных ветвей порядка n при ξ.

N_n^formal=2^(n−2) — формальное число ветвей порядка n.

r_σ(ξ)=C(σ)+ε(σ)d(ξ) — формальная дуга, соответствующая ветви.

8. Системы осевых массивов

H — осевая полудлина одного экземпляра Ω_n согласно определению компоновки.

h — размерный параметр осевой компоновки системы.

step=2H+h — расстояние между центрами соседних экземпляров.

Δ_j=−j(2H+h) — осевое смещение j-го экземпляра.

e_ξ — единичный вектор осевого направления.

I_{n,m}^row(ξ) — интервальное семейство осевого массива.

Ω_n^(j)=Ω_n+Δ_j e_ξ — j-й осевой экземпляр области Ω_n.

9. Радиальные, площадные и объёмные функционалы

M_n — верхняя радиальная граница порядка n: $M_n=\sup_\xi\{\rho:\rho\in I_n(\xi)\}$.

$A_n(\xi)$ — площадь поперечного сечения Ω_n при фиксированном ξ: $A_n(\xi)=\pi\Sigma_j[\beta_j(\xi)^2-\alpha_j(\xi)^2]$.

V_n — объём одной области: $V_n=\int A_n(\xi)d\xi$.

$V_{n,m}$ — объём осевой системы $\Omega_{n,m}$.

$\Delta V_{n,m}=mV_n-V_{n,m}$ — объёмный дефект, обусловленный пересечениями экземпляров системы.

10. Дифференциально-геометрические обозначения

ψ(ξ) — локальная гладкая образующая поверхности вращения.

X(ξ,φ) — параметризация гладкого фрагмента поверхности вращения.

E,F,G — коэффициенты первой фундаментальной формы.

L,M,N_2 — коэффициенты второй фундаментальной формы.

K_G — гауссова кривизна гладкого участка: $K_G=-\psi''/[\psi(1+\psi'^2)^2]$.

k_{mer} — главная кривизна в меридиональном направлении.

k_{par} — главная кривизна в направлении параллели.

δ — параметр локальной регуляризации сопряжения Merge.

11. Фокальные обозначения

$F_v^\pm$ — базовые фокусы вертикального исходного профиля.

$F_h^\pm$ — базовые фокусы горизонтального исходного профиля.

Для вертикальной формальной дуги $F_v^\pm(\sigma)=(C(\sigma)+\varepsilon(\sigma)R,\pm c)$; при показе полного меридионального сечения дополнительно изображаются зеркальные радиальные точки.

ρ_F,ξ_F — радиальная и осевая координаты фокуса на плоскости двумерного сечения.

12. Безразмерные параметры

β=b/a — отношение параметров гиперболической образующей.

$\rho_0=R/a$ — безразмерный радиус исходного профиля.

$\gamma_k=R_k/R$ — относительное k-е рекурсивное смещение.

η=h/a — безразмерный параметр осевого массива.

$\bar{L}=L/a$ — безразмерная вертикальная полудлина.

$\bar{H}=H/a$ — безразмерная полудлина экземпляра.

13. Волновые и верификационные обозначения

k — характерное волновое число.

ka, kR, kR_k, kh — безразмерные волново-геометрические параметры.

Q — добротность резонансной моды.

P_in,P_out — входная и выходная мощность.

E_zone/E_total — метрика локализации энергии в выделенной зоне.

Δθ_div — угловая ширина главного лепестка.

U_EM,U_AC,U_Q — области параметров, в которых эффект подтверждён в электромагнитной, акустической и квантово-волновой постановках.

δ* — характерный порог устойчивости к возмущению.

Литература

[1] Rayleigh, Lord (J. W. Strutt). “CXII. The Problem of the Whispering Gallery.” Philosophical Magazine, Series 6, 20(120), 1910, pp. 1001–1004. DOI: 10.1080/14786441008636993.

[2] Vahala, K. J. “Optical Microcavities.” Nature 424, 2003, pp. 839–846. DOI: 10.1038/nature01939.

[3] Yariv, A.; Xu, Y.; Lee, R. K.; Scherer, A. “Coupled-Resonator Optical Waveguide: A Proposition and Analysis.” Optics Letters 24(11), 1999, pp. 711–713. DOI: 10.1364/OL.24.000711.

[4] Yeh, P.; Yariv, A.; Hong, C.-S. “Electromagnetic Propagation in Periodic Stratified Media. I. General Theory.” Journal of the Optical Society of America 67(4), 1977, pp. 423–438. DOI: 10.1364/JOSA.67.000423.

[5] Erdogan, T. “Fiber Grating Spectra.” Journal of Lightwave Technology 15(8), 1997, pp. 1277–1294. DOI: 10.1109/50.618322.

[6] Yablonovitch, E. “Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics.” Physical Review Letters 58(20), 1987, pp. 2059–2062. DOI: 10.1103/PhysRevLett.58.2059.

[7] John, S. “Strong Localization of Photons in a Disordered Dielectric Superlattice.” Physical Review Letters 58(23), 1987, pp. 2486–2489. DOI: 10.1103/PhysRevLett.58.2486.

[8] Hsu, C. W.; Zhen, B.; Stone, A. D.; Joannopoulos, J. D.; Soljačić, M. “Bound States in the Continuum.” Nature Reviews Materials 1, 16048, 2016. DOI: 10.1038/natrevmats.2016.48.

[9] Stillinger, F. H.; Herrick, D. R. “Bound States in the Continuum.” Physical Review A 11(2), 1975, pp. 446–454. DOI: 10.1103/PhysRevA.11.446.

[10] Hutchinson, J. E. “Fractals and Self-Similarity.” Indiana University Mathematics Journal 30(5), 1981, pp. 713–747. DOI: 10.1512/iumj.1981.30.30055.

[11] Barnsley, M. F. Fractals Everywhere. Academic Press, 1988. ISBN: 978-0120790623.

[12] Falconer, K. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. Wiley, 3rd ed., 2014. ISBN: 978-1119942399.

[13] do Carmo, M. P. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, 1976. ISBN: 978-0132125895.

[14] Kreyszig, E. Differential Geometry. Dover Publications, 1991. ISBN: 978-0486667218.

[15] Joannopoulos, J. D.; Johnson, S. G.; Winn, J. N.; Meade, R. D. Photonic Crystals: Molding the Flow of Light. 2nd ed., Princeton University Press, 2008. ISBN: 978-0691124568.

[16] Braginsky, V. B.; Gorodetsky, M. L.; Ilchenko, V. S. “Quality-Factor and Nonlinear Properties of Optical Whispering-Gallery Modes.” Physics Letters A 137(7–8), 1989, pp. 393– 397. DOI: 10.1016/0375-9601(89)90912-2.

[17] Jackson, J. D. Classical Electrodynamics. 3rd ed., Wiley, 1999. ISBN: 978-0471309321.

[18] Taflove, A.; Hagness, S. C. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time- Domain Method. 3rd ed., Artech House, 2005. ISBN: 978-1580538329.

[19] Jin, J. The Finite Element Method in Electromagnetics. 3rd ed., Wiley, 2014. ISBN: 978-1118571361.

[20] Monk, P. Finite Element Methods for Maxwell’s Equations. Oxford University Press, 2003. ISBN: 978-0198508885.

[21] Morse, P. M.; Ingard, K. U. Theoretical Acoustics. Princeton University Press, 1968. ISBN: 978-0691024011.

[22] Moore, R. E.; Kearfott, R. B.; Cloud, M. J. Introduction to Interval Analysis. SIAM, 2009. ISBN: 978-0898716696.

[23] de Berg, M.; Cheong, O.; van Kreveld, M.; Overmars, M. Computational Geometry: Algorithms and Applications. 3rd ed., Springer, 2008. ISBN: 978-3540779735.

[24] Mauldin, R. D., Urbański, M. Graph Directed Markov Systems: Geometry and Dynamics of Limit Sets. Cambridge University Press, 2003. ISBN: 978-0521825382.

[25] Kigami, J. Analysis on Fractals. Cambridge University Press, 2001. ISBN: 978- 0521793216.

[26] Strichartz, R. S. Differential Equations on Fractals: A Tutorial. Princeton University Press, 2006. ISBN: 978-0691127316.

[27] Sethian, J. A. Level Set Methods and Fast Marching Methods. Cambridge University Press, 1999. ISBN: 978-0521645577.

[28] Werner, D. H., Ganguly, S. “An overview of fractal antenna engineering research.” IEEE Antennas and Propagation Magazine, 45(1):38–57, 2003. DOI: 10.1109/MAP.2003.1189650

[29] Puente, C., Romeu, J., Pous, R., Cardama, A. “On the behavior of the Sierpinski multiband fractal antenna.” IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 46(4):517–524, 1998. DOI: 10.1109/8.664115