Геометрическая волновая инженерия

Теория псевдоэллипсоидов высших порядков
Том 1

Конструктивная геометрия и рекурсивные построения

Хаустов Владимир Игоревич

ORCID: 0009-0007-3657-2309

Лаборатория геометрической волновой инженерии https://vihrihaosa.ru/

Лицензия: CC BY 4.0

Дата публикации: 18 мая 2026 года

DOI: 10.5281/zenodo.20274309

Научно-технический перевод с английского языка.

Редакция, адаптированная для русскоязычного инженера-исследователя.

Оригинал: Khaustov, V. Geometric Wave Engineering. Theory of Higher-Order Pseudoellipsoids. Volume 1. Constructive Geometry: Recursive Constructions and Computational Apparatus. https://doi.org/10.5281/zenodo.20274309

Аннотация

В настоящем томе изложена конструктивная геометрия псевдоэллипсоидов высших порядков — эллиптической ветви исследовательской программы «Геометрическая волновая инженерия». Вводится класс стратифицированных осесимметричных областей, регулярные гладкие фрагменты границ которых обладают отрицательной гауссовой кривизной; при этом негладкие стыки, полюса, переходы огибающих и швы, возникающие после операции Merge, рассматриваются как отдельные граничные страты. Построение основано на составной эллиптической исходной образующей, состояниях радиальных интервалов, рекурсивном операторе C_R, точной канонизации Merge и осевых последовательностях Ω_{n,m}.

Разработаны базовая эллиптическая образующая, псевдоэллипсоиды второго, третьего, четвёртого и произвольных высших порядков, последовательные осевые конфигурации, стратификация границы, анализ кривизны регулярных фрагментов, безразмерные инварианты и масштабная инвариантность. Уточнено также соотношение псевдоэллипсоидов с псевдогиперболоидами и псевдопараболоидами как трёх классов, порождаемых различными исходными профилями в рамках единой интервально-рекурсивной теории псевдоповерхностей. Полученные результаты относятся к конструктивной геометрии. Локализация волн, спектральные окна, направленный вывод излучения, высокая добротность и универсальность для различных физических типов волн не объявляются доказанными в настоящем томе; их исследование отнесено к последующей программе верификации C1–C8.

Ключевые слова: геометрическая волновая инженерия; псевдоэллипсоиды высших порядков; псевдоповерхности; стратифицированные осесимметричные области; отрицательная гауссова кривизна регулярных гладких фрагментов; конструктивная геометрия; рекурсивная геометрия; интервальные состояния; операция Merge; осевое размещение; масштабная инвариантность.

Научный статус

Настоящий том закладывает конструктивно-геометрическую основу исследования. В нём определяется воспроизводимый класс рекурсивных областей и создаются предпосылки для их дальнейшего использования в волновом моделировании. Физические эффекты рассматриваются как задачи верификации в последующих исследованиях, а не как результаты, доказанные в данном томе.

Предмет и ограничения первого тома

Первый том ограничен задачами конструктивной геометрии. В нём определяются класс областей псевдоэллипсоидов высших порядков, их интервальная рекурсия, канонизация Merge, стратификация границы, осевое размещение и безразмерные инварианты.

В томе не представлены численные модели электромагнитных, акустических, оптических или квантово-волновых процессов. Следовательно, в нём не заявляется об экспериментально или численно подтверждённой локализации, повышении добротности, направленном излучении либо технологическом превосходстве над известными геометриями резонаторов.

Подобное ограничение обусловлено требованием научной определённости: настоящая работа создаёт класс расчётных областей; последующие тома должны сформулировать и проверить соответствующие волновые задачи с явным указанием уравнений, источников, граничных условий, материальных предположений и контрольных сравнений.

Содержание

Аннотация 2
1. Предмет, границы и конструктивная программа теории 4
2. Базовая эллиптическая образующая 8
3. Псевдоэллипсоиды второго порядка 17
4. Псевдоэллипсоиды третьего порядка: первый рекурсивный уровень 24
5. Псевдоэллипсоиды четвёртого порядка: второй рекурсивный шаг 32
6. Псевдоэллипсоиды высших порядков 40
7. Операция Merge: формальная спецификация и геометрический смысл 49
8. Рядные псевдоэллипсоиды: осевая компоновка, h_row и численный контроль Merge 55
9. Кривизна, сингулярности и стратификация границы 61
Глава 10. Безразмерные характеристики и масштабная инвариантность 68
11. Связь псевдоэллипсоидов с псевдогиперболоидами и псевдопараболоидами 74
12. Заключение 80
Приложения 83
Приложение A. Обозначения и параметры 83
Приложение B. Литература 86

1. Предмет, границы и конструктивная программа теории

Настоящая глава открывает теорию псевдоэллипсоидов высших порядков как третью конструктивную ветвь геометрической волновой инженерии стратифицированных псевдоповерхностей, регулярные гладкие фрагменты которых имеют отрицательную гауссову кривизну [1]. Задача главы заключается не в немедленном доказательстве волновых эффектов, а во введении нового геометрического объекта с надлежащим научным статусом: воспроизводимой расчётной области, на которой впоследствии могут быть поставлены лучевые, акустические, электромагнитные, оптические и другие волновые задачи.

В предыдущей монографии псевдоэллипсоид второго порядка [1] рассматривался как самостоятельное семейство осесимметричных полостей, получаемых из составной эллиптической образующей вращением относительно смещённой оси. В настоящем томе эта идея получает развитие: псевдоэллипсоид перестаёт быть исключительно объектом второго порядка и становится исходным уровнем рекурсивной конструктивной теории. Второй порядок задаёт начальный внутренний объём; третий возникает после первого радиального смещения; четвёртый впервые демонстрирует собственно многозонную структуру; а произвольный n-й порядок превращает псевдоэллипсоид в иерархический класс внутренних областей.

Основной методологический принцип тома формулируется следующим образом: сначала строится строгая геометрия и лишь затем осуществляется переход к физической верификации. Геометрическое построение нельзя подменять утверждением о якобы уже доказанной возможности управлять волнами. В то же время нельзя недооценивать значение геометрии: именно она определяет расчётную область, топологию, фокальные ориентиры, открытость, осевое размещение и внутреннюю многозонность, без которых невозможна последующая проверка критериев C1–C8.

Конструктивную схему настоящего тома можно представить в виде последовательных уровней.

Уровень 0 — плоские примитивы. Полуэллиптические дуги y_L(x), y_R(x), задаваемые параметрами (a, b, h_1), и горизонтальная прямая y = R = b + h. Эти три объекта образуют профиль, на основе которого строится базовый псевдоэллипсоид.

Уровень 1 — исходное интервальное состояние $I_2(x)$. Для каждого x из области определения множество $I_2(x) \subset [0, R]$ задаётся интервалом (либо объединением интервалов) допустимых радиусов; оно определяет профиль базового псевдоэллипсоида в сечении плоскостью x = const.

Уровень 2 — итерация $I_k \to I_{k+1}$. Применение оператора C_{R_k} порождает новые ветви интервального состояния, а операция Merge объединяет пересекающиеся ветви. Для получения $I_n(x)$ итерация повторяется (n − 2) раз.

Уровень 3 — тело вращения Ω_n. Вращение интервального состояния $I_n(x)$ вокруг оси Ox даёт компактную замкнутую область $\Omega_n \subset \mathbb{R}^3$, представляющую собой тело, в котором потенциально могут присутствовать несколько кольцевых полостей.

Уровень 4 — осевые последовательности $\Omega_{n,m}$. Последовательное размещение m копий области Ω_n с шагом сдвига W + h_row формирует протяжённую вдоль оси Ox структуру.

Уровень 5 — анализ. Исследование объёмов, площадей, кривизны, сингулярностей, безразмерных характеристик и классификация геометрических режимов.

1.1. Псевдоэллипсоид как третья псевдоповерхность геометрической волновой инженерии

В общей программе геометрической волновой инженерии псевдоэллипсоид занимает особое место [1]. Первая конструктивная ветвь была связана с псевдогиперболоидами, исходная

геометрия которых определяется гиперболической образующей. Вторая — с псевдопараболоидами, где закон построения задаётся параболической образующей. Псевдоэллипсоиды завершают эту исходную триаду, вводя эллиптический закон построения, но не в виде обычного эллипсоида вращения, а как составную, смещённую и впоследствии рекурсивно организованную внутреннюю область.

Смысл этой триады не сводится к перечислению трёх известных конических кривых. Гиперболическая, параболическая и эллиптическая образующие по-разному задают распределение радиального расстояния от оси вращения до границы, фокальные ориентиры, форму центральных и концевых зон, режимы открытости и сценарии последующей рекурсии. Следовательно, переход от псевдогиперболоида к псевдопараболоиду, а затем к псевдоэллипсоиду — не косметическая замена одной кривой другой, а расширение языка конструктивной геометрии.

Псевдоэллипсоид представляет интерес именно благодаря сочетанию компактности, обусловленной эллиптическим происхождением, с нетривиальной геометрией смещённой оси вращения и составной образующей. В классическом эллипсоиде эллиптическая дуга образует при вращении единую гладкую поверхность. В псевдоэллипсоиде исходная геометрия собирается из двух четвертей эллиптических дуг, которые могут соприкасаться, разделяться или перекрываться. Уже для второго порядка это приводит к нескольким геометрическим режимам. При переходе к высшим порядкам та же образующая становится исходными данными интервальной рекурсии, а объект приобретает новые внутренние радиальные зоны.

По этой причине псевдоэллипсоиды высших порядков следует рассматривать как третий новый класс псевдоповерхностей, а не как приложение к классической теории эллипсоидов. Они наследуют эллиптическую фокальную структуру исходных дуг, но не совпадают с классическим эллипсоидом ни способом построения, ни стратификацией границы, ни внутренним объёмом, ни алгоритмической природой высших порядков.

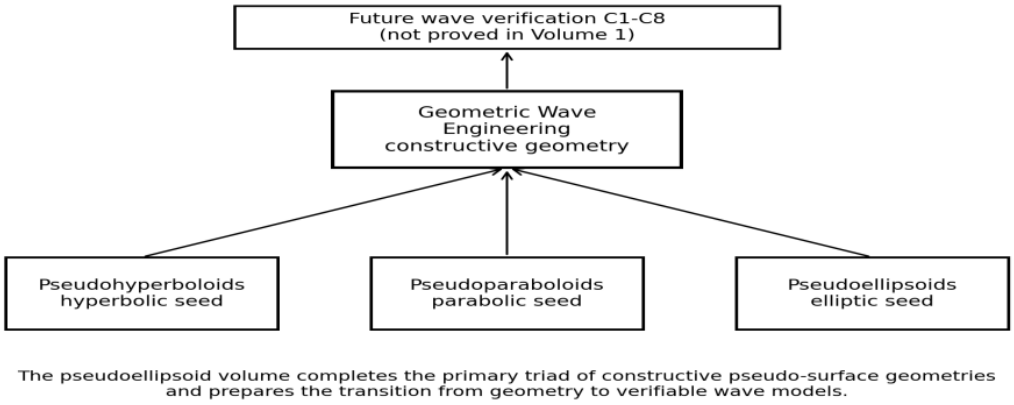

Рисунок 1.1. Место теории псевдоэллипсоидов в триаде конструктивных псевдоповерхностей геометрической волновой инженерии.

1.2. Связь с монографией о псевдоэллипсоидах второго порядка

Настоящий том опирается на опубликованную монографию, посвящённую псевдоэллипсоидам второго порядка. В указанной работе был зафиксирован базовый научный статус объекта: псевдоэллипсоид второго порядка представляет собой новый класс осесимметричных полостей, получаемых вращением составной эллиптической образующей вокруг оси, смещённой относительно естественной оси исходных эллиптических сегментов. Там же было подчёркнуто принципиальное ограничение: сама геометрическая форма может рассматриваться в качестве кандидата на реализацию механизма удержания и вывода излучения, однако не служит автоматическим доказательством волнового эффекта.

Для настоящей книги это положение является отправной точкой. Теория высших порядков не отменяет монографию о втором порядке, а развивает её положения на новом уровне. Второй порядок становится базовым внутренним объёмом, из которого посредством рекурсивных радиальных преобразований строятся третий, четвёртый и произвольный n-й порядки. Тем самым теория одного канонического семейства преобразуется в теорию иерархии псевдоэллипсоидных областей.

Важно разграничить две различные задачи. Монография о втором порядке была ориентирована на каноническую геометрию, режимы открытости, лучевую постановку, статистику Монте-Карло и программу критериев C1–C8 для базового семейства. Предмет настоящего тома иной: построение геометрии высших порядков. Поэтому результаты второго порядка используются как исходная основа, но весь лучевой и волновой исследовательский комплекс здесь не воспроизводится. Собственная задача настоящей книги — показать, каким образом геометрия псевдоэллипсоидов обобщается на рекурсивные внутренние объёмы и осевые системы.

Такой переход особенно важен для всей серии работ по геометрической волновой инженерии. После построения теорий псевдогиперболоидов, псевдопараболоидов и псевдоэллипсоидов высших порядков серия конструктивных теорий псевдоповерхностей становится завершённой. Следующий естественный шаг состоит не во введении очередной новой формы, а в волновой верификации уже построенной триады. Таким образом, настоящая книга одновременно завершает геометрический этап и подготавливает переход к исследованиям волновых свойств.

1.3. Почему псевдоэллипсоид не является классическим эллипсоидом

Термин «псевдоэллипсоид» может быть истолкован неверно, если воспринимать его как обычный эллипсоид вращения с несколько изменёнными параметрами. В настоящей теории это не так. Классический эллипсоид — гладкое тело, получаемое вращением одной эллиптической дуги либо определяемое стандартным квадратичным уравнением. Псевдоэллипсоид строится иначе: его базовая образующая составная и образована двумя четвертьэллиптическими сегментами.

В исходном режиме стыковки оба сегмента встречаются в общей внутренней точке. При положительном смещении между ними возникает экваториальный разрыв, который в рабочей геометрической интерпретации после вращения может рассматриваться как кольцевое окно. При отрицательном смещении сегменты перекрываются, а активная образующая определяется верхней огибающей двух дуг. Следовательно, уже на уровне плоской образующей объект обладает структурой, отсутствующей у классического эллипсоида.

Дополнительное различие обусловлено смещением оси вращения. В обычном эллипсоиде вращение выполняется вокруг естественной оси симметрии. В псевдоэллипсоиде ось вращения смещена относительно исходной эллиптической системы. Именно это смещение преобразует эллиптическую дугу в новую поверхность вращения, регулярные гладкие фрагменты которой могут иметь внутреннюю отрицательную гауссову кривизну, тогда как точки соединения, концевые вырождения или зоны горловины требуют отдельной стратифицированной интерпретации.

Таким образом, приставка «псевдо» не является декоративной. Она фиксирует три обстоятельства. Во-первых, объект имеет эллиптическое происхождение, но не совпадает с классическим эллипсоидом. Во-вторых, физически значимым объектом служит не только поверхность, но и внутренний объём. В-третьих, при переходе к высшим порядкам геометрия строится не по одной элементарной формуле, а посредством рекурсивной интервальной процедуры с последующей операцией Merge.

1.4. Основной объект теории — полный внутренний объём, а не отдельная линия

Уже в первой главе необходимо исключить методологическую ошибку, состоящую в подмене внутренней области её граничной линией. В волновой задаче поле существует не на изображении образующей и не только на поверхности, а внутри расчётного объёма. Поэтому главным объектом настоящей теории является полный внутренний объём псевдоэллипсоида n-го порядка, а в случае осевой компоновки — полный внутренний объём соответствующей последовательности.

Базовая эллиптическая образующая определяет границу второго порядка, но сама по себе ещё не образует расчётной области. После выбора активного профиля строится радиальная функция расстояния от оси вращения до рабочей границы. В меридиональном сечении второй порядок задаётся интервалом $I_2(x) = [0, d(x)]$. После вращения этот интервал формирует внутренний объём. Именно этот объём может быть передан трассировщику лучей, использован при построении сетки FEM/FDTD либо для постановки уравнения Гельмгольца.

Для высших порядков это обстоятельство приобретает ещё более фундаментальное значение. Вместо одного радиального интервала при фиксированном x возникает система интервалов. Некоторые из них остаются разделёнными, другие соприкасаются или перекрываются. Операция Merge объединяет пересекающиеся и соприкасающиеся интервалы, преобразуя формальную конструкцию ветвей в реально используемый полный внутренний объём. Поэтому теорию высших порядков следует описывать не как набор отдельных оболочек, а как геометрию допустимых внутренних зон.

Перенос центра внимания с поверхности на объём делает псевдоэллипсоиды пригодными для последующей физической постановки. Поверхность важна как носитель граничных условий, отражений, апертур и стратификации. Однако расчётная область определяется полным множеством внутренних точек. Именно поэтому обозначения Ω_n и $\Omega_{n,m}$ в настоящем томе следует понимать прежде всего как внутренние объёмы отдельного объекта и осевой системы, а не просто как внешние оболочки.

1.5. Место тома в серии и переход к волновой верификации

Серия конструктивных теорий псевдоповерхностей имеет собственную внутреннюю логику. Сначала разрабатывается теория псевдогиперболоидов высших порядков, затем — псевдопараболоидов высших порядков и, наконец, — псевдоэллипсоидов высших порядков. Каждая книга вводит собственный тип базовой образующей и собственный класс внутренних объёмов. Вместе они формируют триаду геометрических платформ геометрической волновой инженерии.

Том о псевдоэллипсоидах завершает эту триаду. Это важно не только с редакционной, но и с научной точки зрения. Теперь становится возможным сопоставлять три семейства не на уровне отдельных привлекательных изображений, а на основе единого аппарата: исходной образующей, второго порядка, третьего порядка, четвёртого порядка, произвольного n-го порядка, осевого размещения, Merge, внутреннего объёма, кривизны и подготовки к физической постановке.

Следующая серия исследований будет посвящена уже не созданию новых геометрических классов, а волновой верификации построенной триады. Для каждого семейства предстоит установить, возникают ли устойчивые зоны удержания, каким образом организуются спектральные окна, какие апертуры обеспечивают управляемый вывод, возможна ли направленность и сохраняются ли результаты при масштабировании и переходе между различными классами волн. Без такого этапа геометрическая волновая инженерия останется исключительно геометрической программой. При его успешном выполнении она сможет стать проверяемым научно-техническим направлением.

1.6. Цели настоящего тома

а) Дать строгое формальное определение семейств Ω_n и $\Omega_{n,m}$ на основе явных формул и итерационной схемы, исключающей неоднозначность.

б) Установить конструктивные свойства итерации, включая завершимость, корректность операторов и оценку количества кольцевых ветвей.

в) Выполнить геометрический анализ отдельных областей Ω_n и осевых последовательностей $\Omega_{n,m}$: объёмов, площадей, областей определения и систематического построения сингулярностей.

г) Описать дифференциально-геометрические характеристики гладких частей границы, включая гауссову кривизну и рёбра возврата, а также сформулировать их связь с теоремой Гаусса — Бонне.

д) Ввести безразмерную систему характеристик и масштабную инвариантность, обеспечивающие классификацию форм независимо от абсолютного размера.

2. Базовая эллиптическая образующая

2.1. Составная образующая из четвертей эллипсов

Исходное построение на плоскости определяется двумя положительными полуосями a и b. Полуось a откладывается вдоль координаты x и определяет продольный масштаб каждой исходной четверти эллипса. Полуось b задаёт поперечный масштаб. Их отношение $K=b/a$ служит основным безразмерным параметром базовой формы. При $K<1$ исходные эллипсы вытянуты вдоль оси x, и образующая относится к горизонтальному типу. При $K>1$ эллипсы вытянуты в вертикальном направлении, что соответствует вертикальному типу. Предельный случай $K=1$ геометрически соответствует четвертям окружностей; в рамках данной конструктивной схемы он рассматривается как калибровочная граница между горизонтальным и вертикальным режимами.

Левая четверть является частью эллипса с центром (-a, 0). Правая четверть принадлежит такому же эллипсу, центр которого расположен в точке $(a+h_1, 0)$. Следовательно, параметр h_1 не изменяет форму отдельной дуги, а определяет взаимное расположение двух одинаковых четвертьэллиптических сегментов. Это принципиальное обстоятельство: параметр K задаёт тип самой эллиптической дуги, тогда как h_1 управляет способом объединения двух дуг в единую составную образующую.

Для левой ветви используется верхняя часть эллипса на участке от $x=-a$ до $x=0$. Для правой ветви используется верхняя часть правого эллипса на участке от $x=h_1$ до $x=a+h_1$. Формулы имеют вид:

$$y_L(x) = b\,\sqrt{[1-(x+a)^2/a^2]}, \qquad -a \le x \le 0;$$

$$y_R(x) = b\,\sqrt{[1-(x-a-h_1)^2/a^2]}, \qquad h_1 \le x \le a+h_1.$$

Эти формулы ещё не являются полным определением образующей псевдоэллипсоида: они описывают только локальные порождающие дуги. Полная образующая возникает после применения правила сборки. При $h_1=0$ дуги соединяются в общей нижней точке; при $h_1>0$ между ними появляется промежуточный участок; при $h_1<0$ дуги перекрываются, и действующий профиль задаётся их верхней огибающей. Именно в этом заключается основное отличие рассматриваемой геометрии от обычного эллипса: объект определяется не одной элементарной кривой, а парой эллиптических сегментов вместе с правилом их объединения.

На гладких участках каждая четверть наследует свойства эллипса. В частности, ей присущи определённая фокальная структура, конечная кривизна вне предельных точек и монотонное изменение высоты от верхнего конца до нижнего соединения. Однако в точках стыка, разрыва

либо перехода между ветвями огибающей гладкость может нарушаться. Поэтому базовая образующая является кусочно-гладкой кривой: она содержит гладкие эллиптические участки и особые точки, которые необходимо выделять отдельно, а не скрывать за общей формулой.

Горизонтальный и вертикальный типы различаются не правилом сборки, а геометрией исходных эллипсов. При K<1 фокусы каждого исходного эллипса лежат на горизонтальной оси, при K>1 — на вертикальной. Уже на уровне плоской образующей это различие меняет расположение фокальных ориентиров и характер центральной области. Поэтому горизонтальный и вертикальный псевдоэллипсоиды нельзя считать одним и тем же объектом, просто растянутым в разных направлениях. Это две ветви одного конструктивного семейства.

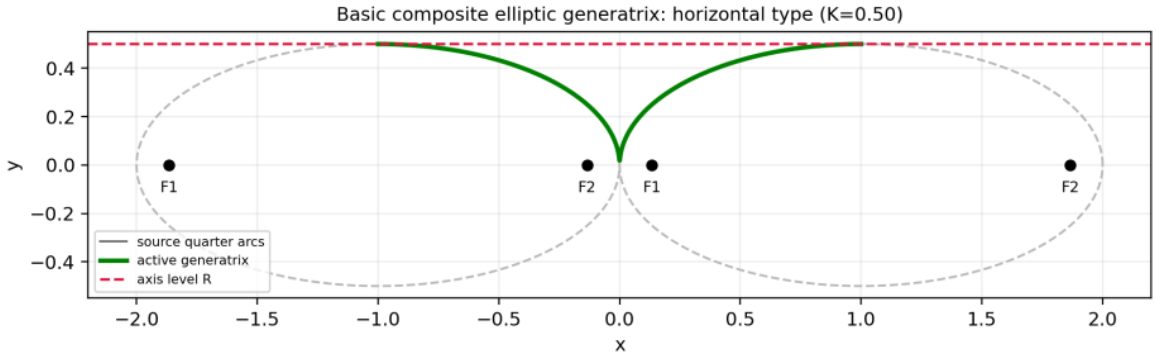

Рисунок 2.1. Базовая составная эллиптическая образующая горизонтального типа. Параметры: a=1, K=0,50, h_1=0, h=0. Показаны две исходные эллиптические дуги, действующая составная образующая, уровень смещённой оси R и действительные фокусы исходных эллипсов.

Случай K=1 требует отдельного рассмотрения. В этом случае два фокуса эллипса вырождаются в один центр окружности.

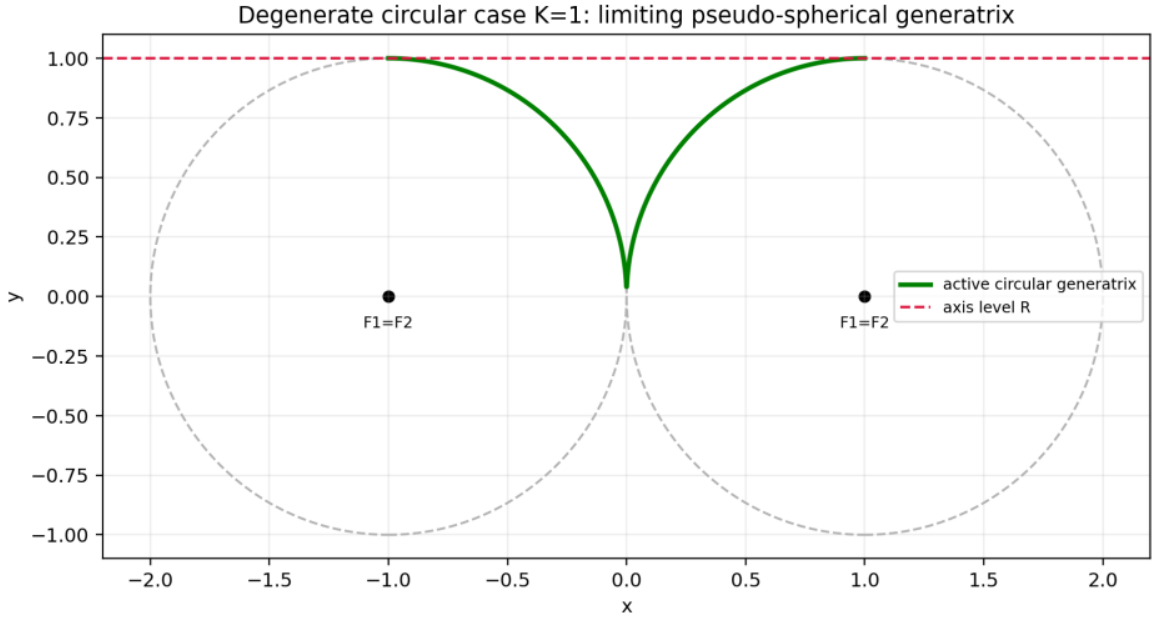

Рисунок 2.2. Образующая вырожденного псевдоэллипсоида для построения псевдосферы. Показано построение из двух симметричных окружностей, касающихся вдоль линии фокусов и расположенных горизонтально. Ось вращения обозначена сверху красной пунктирной линией.

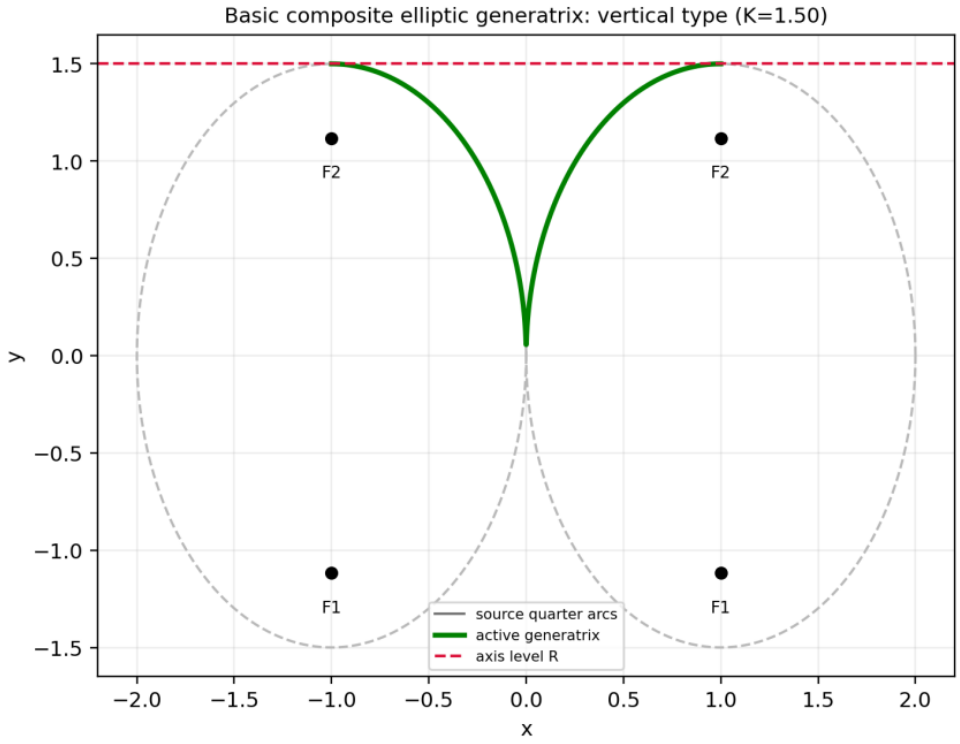

Рисунок 2.3. Базовая составная эллиптическая образующая вертикального типа. Параметры: a=1, K=1,50, h_1=0, h=0. В отличие от горизонтального типа, фокальная ось исходных эллипсов ориентирована вертикально.

Рисунки 2.1–2.3 иллюстрируют один и тот же алгоритм построения для различных геометрических типов. Во всех случаях действующая кривая не является полным эллипсом: она представляет собой только ту часть исходной эллиптической геометрии, которая участвует в формировании образующей псевдоэллипсоида. Серые пунктирные эллипсы не вводят нового элемента теории, а служат наглядным указанием на исходные полные эллипсы, из которых взяты четвертьсегменты.

Из этого локального построения следует ещё одно важное обстоятельство. Если от плоской образующей перейти к поверхности вращения с радиальной функцией d(x)=R−y_act(x), то на гладких участках, где d(x)>0 и действующий профиль совпадает с эллиптической дугой, гауссова кривизна поверхности вращения отрицательна. Для поверхности, полученной вращением радиуса d(x) вокруг оси x, справедлива стандартная формула:

$$K_G(x) = -d''(x) / \{d(x)[1+d'(x)^2]^2\}.$$

У рассматриваемых верхних эллиптических ветвей вторая производная y″(x) отрицательна. Поскольку d(x)=R−y(x), получаем d″(x)=−y″(x)>0. Следовательно, при d(x)>0 гладкие регулярные участки канонической поверхности вращения имеют отрицательную гауссову кривизну. Это утверждение относится исключительно к гладким участкам. В точках соединения, разрыва, активного усечения или вырождения радиуса гладкую кривизну нельзя задавать без дополнительной стратифицированной интерпретации.

Данное уточнение важно для всей серии исследований стратифицированных псевдоповерхностей с регулярными участками отрицательной кривизны. Отрицательная кривизна здесь не является декларацией и не вводится по аналогии: она следует из конкретного вида действующего радиального профиля на гладких эллиптических участках. Одновременно теория явно выделяет особые точки, к которым обычная дифференциальная геометрия гладкой поверхности неприменима.

2.2. Определение образующей при различных h_1 и трёхфокусное подсемейство

Параметр h_1 является самостоятельным морфологическим параметром образующей псевдоэллипсоида. В псевдогиперболоидной и псевдопараболоидной ветвях аналогичного параметра нет, поскольку их базовая форма не собирается из двух раздельных четвертей эллипсов. В случае псевдоэллипсоида h_1 непосредственно определяет способ контакта левой и правой дуг: через стык, зазор либо перекрытие.

При $h_1=0$ правая дуга начинается в той же точке, в которой заканчивается левая. Центральная точка $x=0$, $y=0$ становится общей нижней точкой обеих четвертей. Важно понимать, что это не гладкое продолжение одной эллиптической дуги. К указанной точке слева и справа подходят различные четверти эллипсов, касательные к которым в пределе имеют вертикальный характер. Поэтому центральный стык — геометрически особая точка, а не обычная внутренняя точка гладкой кривой.

При $h_1>0$ дуги разделены. Между $x=0$ и $x=h_1$ возникает интервал, на котором в вычислительной реализации профиль продолжается нулевым уровнем. В рамках главы 2 это следует понимать прежде всего как геометрический признак разделения дуг и способ сохранения единой осевой сетки при построении. Физическая интерпретация данного интервала как окна, вставки или открытого участка должна быть дана отдельно в главах, посвящённых режимам открытости. Здесь существенно лишь то, что базовая образующая перестаёт состоять из двух соединённых дуг и переходит в режим раздельной сборки.

При $h_1<0$ дуги перекрываются вдоль координаты x. В этом случае нельзя просто сложить две формулы или произвольно выбрать одну из них. Конструктивное правило состоит в выборе верхней огибающей на участке перекрытия: там, где обе ветви определены одновременно, действующая высота $y(x)$ принимается равной максимуму $y_L(x)$ и $y_R(x)$. Вне области перекрытия сохраняется ветвь, определённая на соответствующем интервале.

$$\text{При } h_1<0 \text{ на общем участке:} \quad y(x) = \max[y_L(x),\ y_R(x)].$$

Если $-2a<h_1<0$, симметричная точка переключения между ветвями находится при $x^*=h_1/2$. В этой точке действующая функция остаётся непрерывной, но её производная в общем случае изменяет знак скачкообразно. Следовательно, x^* — не дефект рисунка, а действительный геометрический узел составной образующей. В последующих численных задачах такую точку необходимо рассматривать как особую точку профиля, поскольку в ней происходит переход между порождающими эллиптическими ветвями.

Три режима h_1 можно охарактеризовать следующим образом. Нулевое значение создаёт минимальную базовую сборку без зазора и перекрытия. Положительное h_1 задаёт центральное разделение четвертей — зазор между дугами. Отрицательное h_1 формирует центральное перекрытие эллиптических ветвей и требует применения правила верхней огибающей. Такое описание заменяет громоздкую таблицу и ясно показывает, что меняется не эллипс как локальная кривая, а способ соединения двух его четвертей.

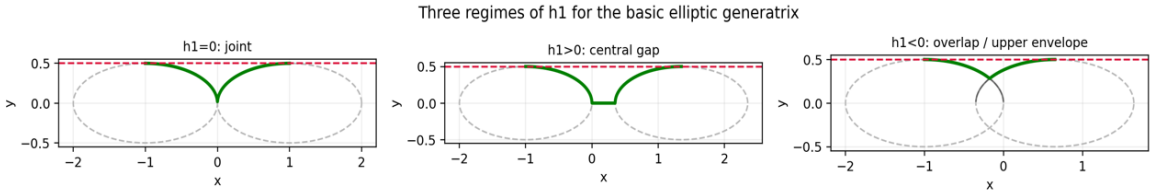

Рисунок 2.4. Три режима параметра h_1 для базовой эллиптической образующей: стык, центральный зазор и перекрытие с верхней огибающей. Все три панели построены по одной формуле четвертей эллипсов; изменяется только взаимное расположение правой дуги.

Особое место занимает трёхфокусное подсемейство. Оно возможно только при K<1, то есть для горизонтального типа, когда фокусы исходных эллипсов располагаются на оси x. Обозначим через c расстояние от центра каждого исходного эллипса до его фокуса. В общем размерном виде $c=a\sqrt{(1-K^2)}$. Совпадение внутреннего фокуса левой дуги с внутренним фокусом правой дуги достигается при специальном значении h_1:

$$h_1^{(3f)} = 2a[\sqrt{(1-K^2)}-1], \qquad K<1.$$

При безразмерной нормировке a=1 эта формула принимает более компактный вид $h_1^{(3f)}=2\sqrt{(1-K^2)}-2$, удобный для построений и расчётов. Однако в общей теории необходимо сохранять размерный множитель a, иначе параметр h_1 ошибочно превращается из длины в безразмерное число.

В трёхфокусном случае один из внутренних фокусов двух исходных эллипсов становится общим. Координата этой общей фокальной точки равна $x_f=h_1/2$. В той же центральной области составная образующая приобретает характерную геометрию горловины. Высота действующей образующей в данной точке при нормировке a=1 равна K^2, а в общем размерном виде — aK^2. После выбора уровня оси $R=b+h=aK+h$ локальный радиус соответствующей горловинной области равен:

$$r_{throat} = R-aK^2 = aK+h-aK^2.$$

При a=1 получаем $r_{throat}=K+h-K^2$. Здесь требуется принципиальное методологическое уточнение: трёхфокусность — геометрическое свойство плоской составной образующей. Сама по себе она не доказывает существования трёхмерного волнового фокуса. В главе 2 её научный смысл состоит в выделении точного частного случая, когда центральная область представляет собой не произвольное перекрытие, а имеет строго определённую фокальную причину и установленную метрическую характеристику горловины.

Таким образом, отрицательное h_1 задаёт общий режим перекрытия, но только специальное значение $h_1^{(3f)}$ определяет трёхфокусное подсемейство. Это различие необходимо сохранять: иначе любое перекрытие дуг было бы ошибочно названо трёхфокусным. Корректная научная формулировка такова: при $h_1<0$ возникает область верхней огибающей, тогда как трёхфокусность реализуется лишь при выполнении дополнительного фокального условия.

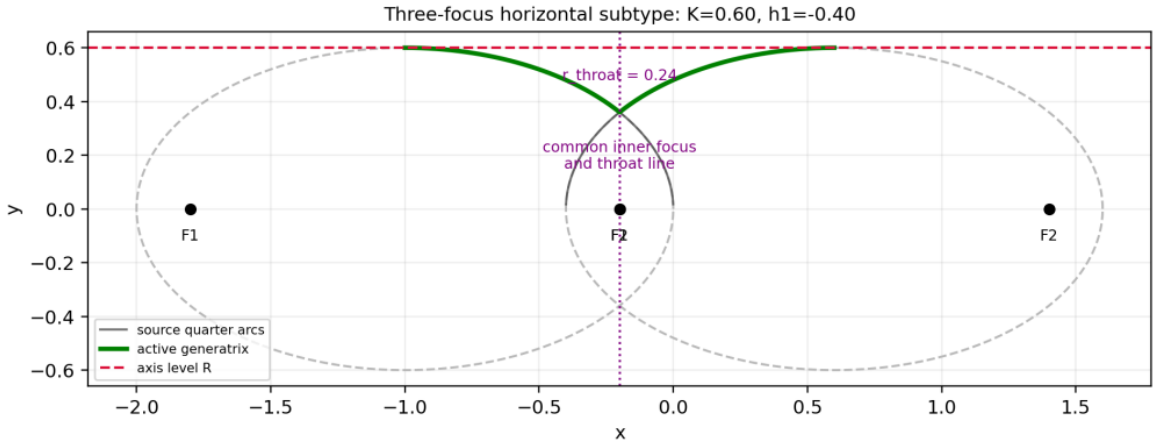

Рисунок 2.5. Трёхфокусное подсемейство горизонтальной базовой образующей. При K=0,60 получаем $h_1=-0,40$; внутренние фокусы обеих эллиптических дуг совпадают, а центральная область приобретает строго определённый статус горловины.

2.3. Определение образующей при различных h

Параметр h не отвечает ни за форму отдельной четверти эллипса, ни за взаимное расположение двух дуг. Его роль иная: он задаёт уровень оси посредством соотношения

R=b+h. Следовательно, h характеризует положение оси относительно верхнего уровня исходных четвертей эллипсов. Это различие принципиально. Если K и h_1 задают плоскую сборку дуг, то h определяет, какая часть этой сборки становится действующей относительно оси вращения.

Чтобы построить рабочую радиальную функцию, недостаточно знать только y(x). Необходимо ввести действующий профиль y_act(x). Его получают усечением тех частей исходного профиля, высота которых превышает уровень оси R. Соотношения имеют вид:

$$R = b+h = aK+h;$$

$$y_act(x) = \min[y(x), R];$$

$$d(x) = R - y_act(x).$$

Функция d(x) задаёт расстояние от оси вращения до действующей образующей. Именно она определяет локальный радиус будущего тела вращения второго порядка. Однако в данной главе её следует рассматривать только как геометрическое следствие базовой образующей, а не как начало собственно теории высших порядков.

При h=0 ось вращения проходит на уровне R=b. Поскольку концевые вершины исходных четвертей эллипсов имеют высоту y=b, локальный радиус на концах равен нулю. Это предельный замкнутый режим концевых участков. При h>0 ось поднимается выше уровня b, и на концах появляется положительное расстояние d_tip=R−b=h. Следовательно, положительное h непосредственно задаёт радиус концевого отверстия.

При h<0 ось опускается ниже уровня b. В таком случае часть исходной эллиптической дуги оказывается выше уровня оси и не может войти в действующий профиль без усечения. Поэтому на участках, где y(x)>R, принимается y_act(x)=R, а локальный радиус d(x) становится равным нулю. Такое обнуление не означает существования «отрицательного окна» и не должно интерпретироваться как физическая апертура с отрицательным радиусом. Реальный концевой радиус всегда неотрицателен:

$$d_tip = \max(h, 0).$$

Для содержательной параметризации необходимо также условие R>0. При неположительном R ось вращения теряет геометрический смысл положительного радиального уровня относительно исходной плоскости построения. Поэтому в физически осмысленных конфигурациях h выбирается так, чтобы выполнялось b+h>0.

Научный смысл параметра h состоит в разделении двух различных понятий: знакового положения оси и реального размера концевого отверстия. Величина h может быть отрицательной, нулевой либо положительной. Физический радиус концевой апертуры не может быть отрицательным и потому определяется через max(h,0). Это уточнение устраняет распространённую ошибку, при которой h<0 ошибочно трактуют как «отрицательное отверстие». На самом деле при h<0 концевой участок закрывается активным усечением профиля.

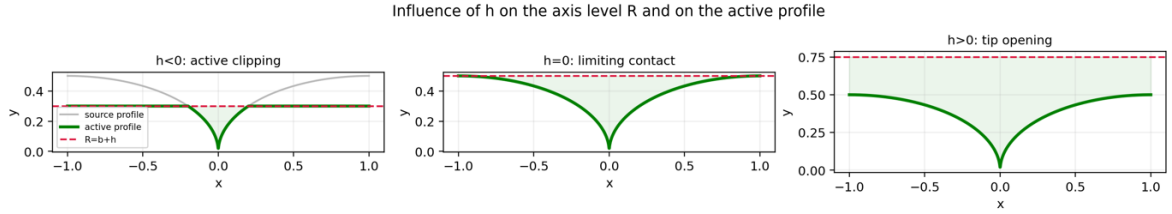

Рисунок 2.6. Влияние h на уровень оси R=b+h и действующий профиль y_act(x). При h<0 часть исходной дуги усекается уровнем R; при h=0 концевой участок находится в предельном контакте; при h>0 возникает положительный концевой радиус d_tip=h.

Рисунок 2.6 показывает, что h не изменяет сами эллиптические дуги: серый профиль остаётся тем же. Изменяется только уровень оси R и, следовательно, действующая часть профиля. Это ещё раз подчёркивает необходимость различать h и h_1: первый параметр отвечает за ось вращения и концевой радиус, второй — за взаимное расположение левой и правой четвертей.

2.4. Определение образующей при совместном изменении h и h_1

Параметры h и h_1 действуют на различных геометрических уровнях, но в реальной базовой образующей проявляются совместно. Поэтому после их раздельного анализа необходимо описать одновременное влияние. Кратко это можно выразить так: h_1 перестраивает центральную сборку двух дуг, тогда как h задаёт положение оси вращения и активное усечение профиля. При совместном изменении параметров возникают несколько качественно различных геометрических сценариев.

Если h=0 и h_1=0, получаем базовую образующую, замкнутую на концах и собранную минимальным образом. Ей присущи центральный стык четвертей и нулевой концевой радиус. Это естественная исходная конфигурация для геометрической калибровки.

Если h>0 при h_1=0, центральная сборка остаётся прежней, но концы получают положительный радиус: геометрия изменяется не в центральной области, а на концах действующего профиля. Если h=0 при h_1>0, концы остаются предельными, но между дугами возникает центральный зазор. Если одновременно h>0 и h_1>0, действуют оба механизма — концевое отверстие и центральное разделение дуг.

Эту классификацию можно изложить без таблицы. Нулевая пара (h,h_1) определяет базовый стык. Положительное h при нулевом h_1 добавляет концевой радиус без изменения центральной сборки. Положительное h_1 при нулевом h создаёт центральное разделение без концевого отверстия. Одновременная положительность h и h_1 формирует комбинированную геометрию, в которой независимо действуют два механизма управления формой.

При h_1<0 центральная область устроена иначе: вместо зазора возникают перекрытие дуг и верхняя огибающая. В этом случае h определяет не ширину зазора, а радиальную реализуемость горловины или перекрывающейся центральной зоны. Это особенно важно для трёхфокусного подсемейства, в котором горловина существует как реальный участок внутренней геометрии только при r_throat>0.

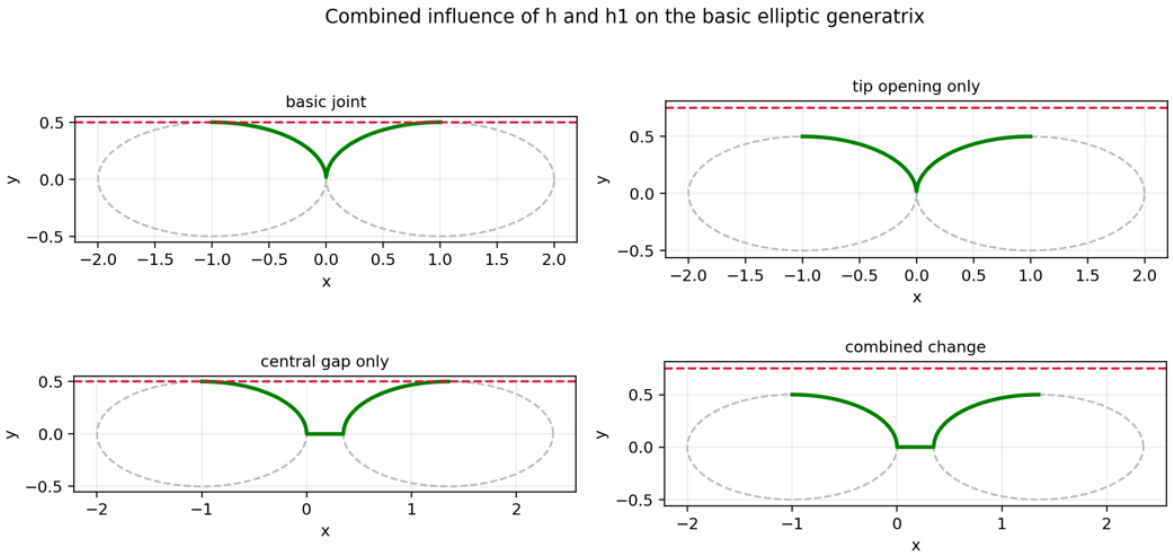

Рисунок 2.7. Совместное влияние h и h_1 на базовую эллиптическую образующую. Показаны четыре основных сценария: исходный стык, концевое отверстие, центральный зазор и комбинированное изменение формы.

Важнейший научный вывод этого раздела состоит в том, что h и h_1 нельзя объединять в один «параметр открытости». Это независимые параметры. h связан с уровнем оси и концевым радиусом; h_1 — с топологией сборки двух четвертьэллиптических дуг. Поэтому один и тот же концевой радиус может сочетаться с различными центральными режимами, а один и тот же центральный режим может существовать при разных положениях оси вращения.

Такое разделение делает образующую псевдоэллипсоида более разнообразной, чем классическая эллиптическая форма. У обычного эллипсоида нет независимого параметра, разделяющего две четверти исходной образующей, как нет и отдельного параметра, задающего смещённую ось вращения в качестве самостоятельного управляющего уровня. У псевдоэллипсоида оба механизма действуют одновременно и формируют собственный геометрический аппарат семейства.

2.5. Геометрическая карта четырнадцати канонических типов образующих

Семейство базовых эллиптических образующих непрерывно зависит от параметров K, h_1 и h. Однако для построения теории, сопоставления иллюстраций и подготовки последующих расчётов полезно выделить конечный набор канонических типов. Он не заменяет непрерывное семейство, а задаёт его опорные режимы. В настоящем издании используются четырнадцать типов, охватывающих горизонтальный, предельный круговой, вертикальный и трёхфокусный случаи при различных состояниях центральной области и концов.

Первые четыре типа соответствуют горизонтальной эллиптической геометрии $K<1$. Они показывают, как одинаковая горизонтальная ориентация фокусов сочетается с замкнутым режимом, открытыми концами, центральным разделением и комбинированными состояниями. Следующие четыре типа воспроизводят эту логику для предельного кругового случая $K=1$, который геометрически служит границей между горизонтальной и вертикальной фокальными структурами. Ещё четыре типа отвечают вертикальной геометрии $K>1$, когда фокусы исходных эллипсов располагаются вертикально. Наконец, два специальных типа выделяют горизонтальное трёхфокусное подсемейство — варианты с замкнутыми и открытыми концами.

Цель карты не в превращении главы в каталог форм. Она показывает, что всё видимое морфологическое разнообразие образующих порождается тремя параметрами. K определяет тип эллипса и ориентацию фокальной структуры; h_1 — стык, разделение либо перекрытие дуг; h — уровень оси и активное состояние концевых участков. Следовательно, четырнадцать типов — не произвольные изображения, а дискретные представители единой параметрической геометрии.

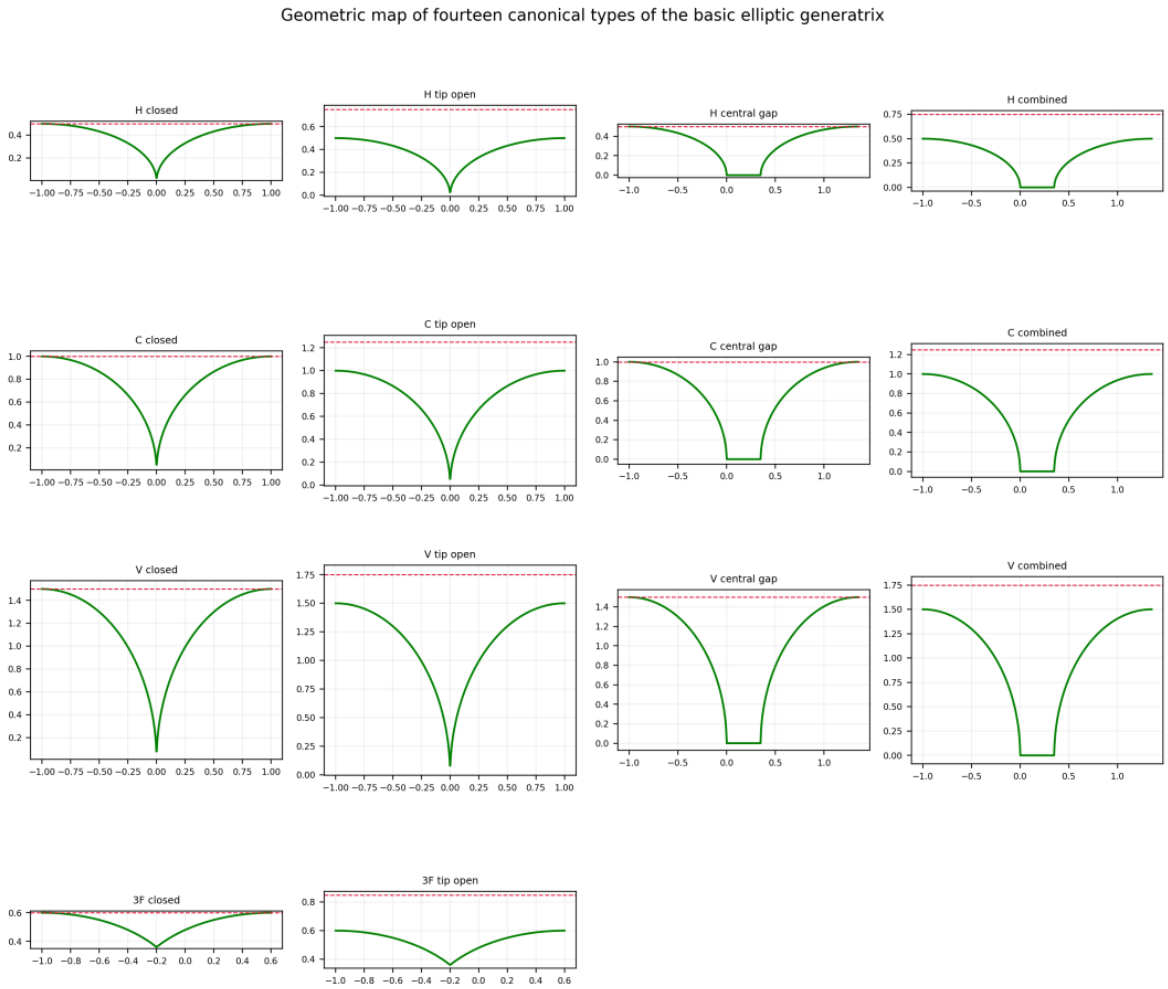

Рисунок 2.8. Геометрическая карта четырнадцати канонических типов базовой эллиптической образующей. Каждая миниатюра построена по одному правилу двух четвертей эллипсов; изменяются только K, h_1 и h.

На рисунке зелёные линии показывают действующую часть образующей относительно уровня оси R, а красная пунктирная линия обозначает сам уровень R. Эта система обозначений демонстрирует, что даже сложная карта типов не требует отдельной формулы для каждого случая. Все типы представляют собой варианты одной процедуры: построить две четвертьэллиптические дуги, объединить их согласно h_1, выбрать уровень R=b+h и получить действующую образующую.

В публикационной версии тома таблицу четырнадцати типов следует сохранять только при необходимости строгой навигации по вычислительным обозначениям. При этом научное объяснение карты должно оставаться словесным, как в данном разделе. Сама по себе таблица не объясняет, почему типы образуют систему. Система возникает благодаря независимости трёх параметров и тому, что каждый из них отвечает за свой геометрический механизм.

2.6. Выводы

Базовая эллиптическая образующая псевдоэллипсоида высших порядков представляет собой самостоятельный математический объект. Она не совпадает с полным эллипсом, не является обычной дугой классического эллипсоида вращения и не должна заменяться художественно сглаженной кривой. Её конструктивная сущность состоит в объединении двух четвертей

эллипсов с последующим выбором действующего профиля относительно смещённой оси вращения.

В главе выделены три независимых управляющих параметра. Параметр K=b/a задаёт тип исходной эллиптической геометрии — горизонтальный, предельный круговой либо вертикальный. Параметр h_1 определяет способ соединения двух дуг: стык, разделение либо перекрытие с верхней огибающей. Параметр h задаёт уровень оси R=b+h и тем самым определяет активное усечение профиля и реальный концевой радиус d_tip=max(h,0).

На гладких участках действующей эллиптической ветви поверхность вращения, заданная радиальной функцией d(x)=R−y_act(x), имеет отрицательную гауссову кривизну при d(x)>0. Вместе с тем точки стыка, зазора, перехода огибающей, активного усечения и вырождения радиуса являются особыми геометрическими точками. Их нельзя искусственно сглаживать в теории, поскольку они определяют корректную стратификацию базовой формы.

Трёхфокусное подсемейство представляет собой не произвольный вариант перекрытия, а точно выделенный горизонтальный случай, при котором один внутренний фокус левой дуги совпадает с одним внутренним фокусом правой. В общем размерном виде условие имеет вид $h_1^{(3f)}=2a[\sqrt{(1-K^2)}-1]$. Следовательно, всякая трёхфокусная конфигурация предполагает перекрытие дуг, но не всякое перекрытие является трёхфокусным.

На гладких участках активной эллиптической ветви поверхность вращения, определяемая радиальной функцией d(x) = R − y_act(x), имеет отрицательную гауссову кривизну при d(x) > 0. В то же время точки стыка, промежутка, огибающей, активного отсечения и вырождения радиуса представляют собой особые геометрические положения. Их нельзя искусственно сглаживать в теории, поскольку они определяют корректную стратификацию исходной формы.

Трёхфокальное подсемейство не является произвольным вариантом перекрытия: это строго определённый горизонтальный случай, при котором один внутренний фокус левой дуги совпадает с одним внутренним фокусом правой. В общем размерном виде условие задаётся формулой $h_1^{(3f)} = 2a(\sqrt{(1 - K^2)} - 1)$. Следовательно, всякое трёхфокальное построение предполагает перекрытие, но не всякое перекрытие является трёхфокальным.

3. Псевдоэллипсоиды второго порядка

3.1. Радиальная функция второго порядка

После выбора образующей y(x) построение определяет не просто линию на плоскости, но радиальную функцию, измеряющую расстояние от оси вращения до рабочей границы. Именно эта функция служит исходной величиной интервальной геометрии. Она определяется через активный профиль y_act = min(y, R) и выражение d = max(R − y_act, 0). В базовом режиме h = 0 и R = b, поэтому d(x) = b − y(x). Функция d(x) неотрицательна на всей области определения и обращается в нуль там, где образующая соприкасается с уровнем оси вращения.

Второй порядок задаёт исходный внутренний объём. В меридиональном сечении он определяется интервалом $I_2(x) = [0, d(x)]$. При вращении этого интервала вокруг оси x образуется тело вращения, граница которого сохраняет эллиптическое происхождение образующей, однако не совпадает с классическим эллипсоидом. Именно это различие обосновывает термин «псевдоэллипсоид»: фокальная структура эллипса сохраняется в порождающих дугах, но внутренняя область и её стратификация отличаются от структуры классического гладкого эллипсоида.

3.2. Горизонтальный псевдоэллипсоид второго порядка

Горизонтальный псевдоэллипсоид второго порядка соответствует условию K < 1. Следовательно, исходные эллиптические дуги вытянуты вдоль оси x, а фокальная ось каждого эллипса горизонтальна. В основной нормировке a = 1, b = K уменьшение K делает четверти

эллипсов более уплощёнными; при увеличении K до единицы они приближаются к предельной окружности.

Радиальная функция d(x) горизонтального типа принципиально отличается от функции классического эллипсоида вращения. Классический эллипсоид порождается единственной гладкой эллиптической дугой и имеет непрерывную аналитическую поверхность. В рассматриваемом случае границу формируют две четверти эллипсов, которые при $h_1 = 0$ соединяются в центральной точке. После перехода к d(x) эта точка становится центральной стратифицированной областью меридионального сечения. Нельзя автоматически считать её доказанным физическим фокусом; вместе с тем она представляет собой важный геометрический признак второго порядка.

При $h = 0$ и $h_1 = 0$ горизонтальный объект второго порядка замкнут на концах и не имеет экваториального окна. В любой осевой точке, где определена активная образующая, внутреннее сечение имеет радиус d(x). На рис. 3.1 показано меридиональное сечение такого объекта. Оно демонстрирует заполненную область, а не только верхнюю и нижнюю кривые. Нижняя радиальная граница совпадает с осью вращения; отдельная внутренняя стенка на данном порядке отсутствует.

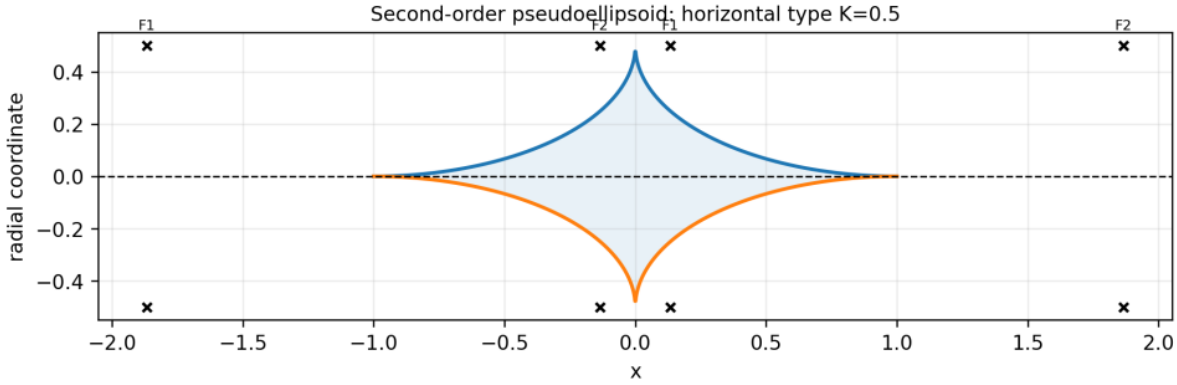

Рисунок 3.1. Меридиональное сечение псевдоэллипсоида второго порядка: горизонтальный тип, $K = 0{,}5$, $h_1 = 0$, $h = 0$, $m = 1$. Построено по радиальной функции d(x).

Фокусы на двумерном сечении являются фокусами исходных эллиптических дуг. Для горизонтального типа они лежат вдоль оси x. Если $a = 1$ и $b = K$, расстояние от центра каждого исходного эллипса до его фокусов равно $c = \sqrt{(1 - K^2)}$. Поэтому при $K = 0{,}5$ фокальное расстояние выражено достаточно отчётливо, а фокальную структуру легко различить. Необходимо, однако, сохранить границу интерпретации: фокусы плоской образующей не становятся автоматически точками концентрации волнового поля. Они служат геометрическими ориентирами, которые могут быть предметом проверки в последующих томах.

Горизонтальный тип имеет особое значение для всего семейства псевдоповерхностей, поскольку демонстрирует возможность включения эллиптической фокальной структуры в осесимметричную полость без превращения её в обычный эллипсоид. Здесь нет единственной гладкой эллиптической поверхности, возникающей при классическом вращении полной полуэллиптической дуги. Вместо неё используются составная система образующих, смещённая ось, активная радиальная функция и внутренний объём, задаваемый интервалом [0, d(x)]. Именно поэтому объект является псевдоэллипсоидом, а не эллипсоидом.

Трёхмерная визуализация горизонтального типа получается вращением радиуса d(x) вокруг оси x. Фокусы на трёхмерном изображении не показываются, поскольку относятся к плоской порождающей геометрии, а не к самой пространственной поверхности. Существенно другое требование: равенство масштабов всех осей и отчётливое меридиональное сечение,

позволяющее удостовериться, что изображена граница внутреннего объёма, а не произвольная оболочка.

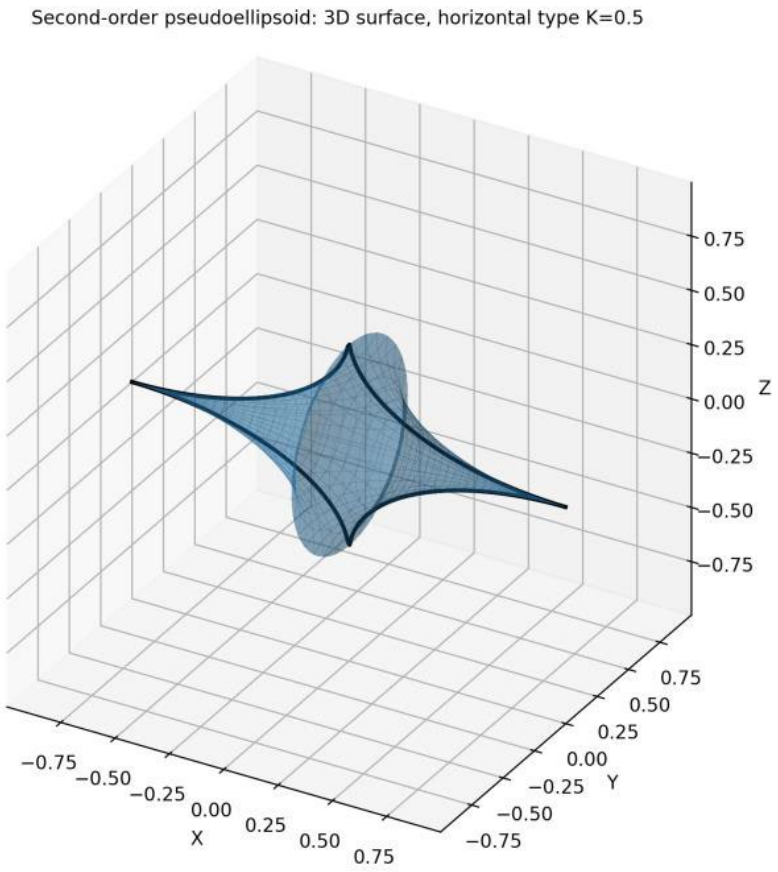

Рисунок 3.2. Трёхмерная поверхность псевдоэллипсоида второго порядка горизонтального типа, K = 0,5. Фокусы не показаны; выделенное меридиональное сечение служит контролем действительного внутреннего объёма.

С научной точки зрения горизонтальный второй порядок является исходным эталонным состоянием для всех горизонтальных псевдоэллипсоидов высших порядков. Любое последующее смещение, кольцевая зона, рекурсивный интервал или осевой ряд наследуют именно эту функцию d(x). Поэтому ошибка в построении активного профиля второго порядка, некорректное соединение разобщённых частей, ошибочное обозначение фокусов либо смешение образующей с внутренним объёмом неизбежно распространяется на все дальнейшие главы.

3.3. Вертикальный псевдоэллипсоид второго порядка

Вертикальный псевдоэллипсоид второго порядка соответствует K > 1. Поперечная полуось исходного эллипса в этом случае больше продольной полуоси a, поэтому фокальная ось каждого исходного эллипса вертикальна. Таким образом, вертикальный тип — не просто масштабированная разновидность горизонтального, а самостоятельная геометрическая ветвь семейства.

В основных обозначениях b = aK. При a = 1 и K = 1,5 четверти эллипсов вытянуты по высоте. Уровень оси вращения при h = 0 равен R = b. Активный профиль и радиальная функция определяются теми же правилами, что и в горизонтальном случае, однако распределение d(x) по осевой координате меняется. Визуально вертикальный тип создаёт более высокую исходную образующую и иной характер изменения внутреннего радиуса.

Необходимо подчеркнуть, что оба типа используют один и тот же алгоритм второго порядка. Сначала строятся две четверти эллипсов, затем формируется активный профиль y_act(x), после чего вычисляется радиальная функция d(x), и интервал [0, d(x)] вращается вокруг оси x. Различаются не логика построения, а тип эллипса, положение фокусов и распределение радиальных размеров.

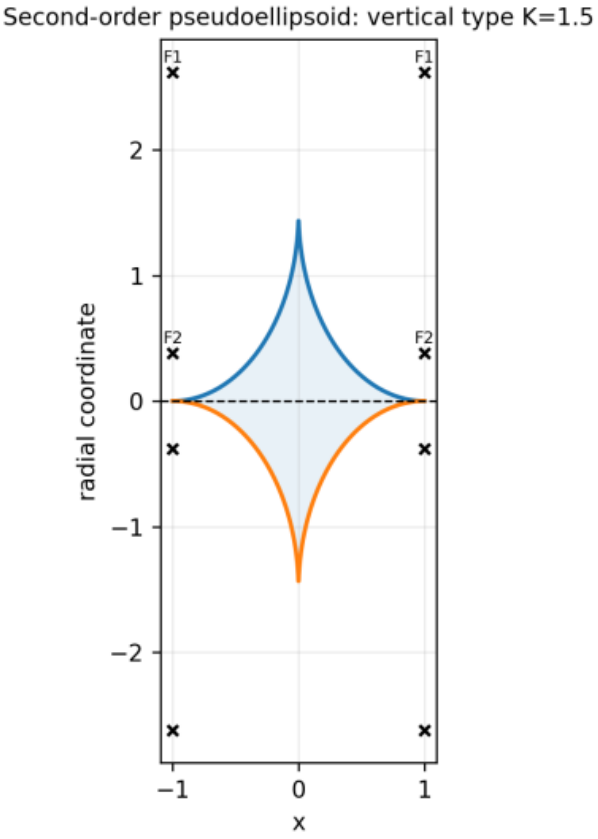

Рисунок 3.3. Меридиональное сечение псевдоэллипсоида второго порядка: вертикальный тип, $K = 1{,}5$, $h_1 = 0$, $h = 0$, $m = 1$. Видны вертикальный характер фокальной структуры исходных дуг и соответствующая радиальная область.

Для вертикального типа фокальное расстояние исходного эллипса $c = \sqrt{(K^2 - 1)}$. При $K = 1{,}5$ фокусы располагаются выше и ниже центра каждой исходной эллиптической дуги. Такую фокальную структуру нельзя без дополнительного анализа переносить на трёхмерную поверхность как систему физических точек или линий. В главе 3 она необходима для строгого различения типов образующей и проверки того, что вертикальный режим действительно отличается от горизонтального уже на начальном уровне второго порядка.

Трёхмерная конструкция вертикального типа имеет более массивную и развитую в радиальном направлении форму. Однако объект по-прежнему относится ко второму порядку: внутренних рекурсивных зон в нём нет. Вся трёхмерная поверхность представляет собой внешнюю границу области Ω_2. Выделенное меридиональное сечение на трёхмерном рисунке важно именно тем, что связывает пространственную поверхность с исходной функцией d(x) и не позволяет воспринимать изображение как произвольную визуализацию.

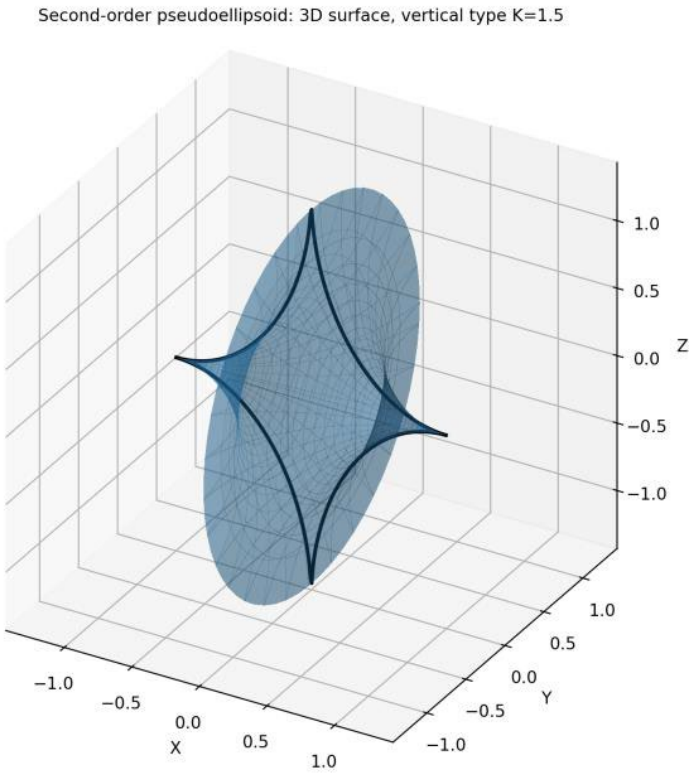

Рисунок 3.4. Трёхмерная поверхность псевдоэллипсоида второго порядка вертикального типа при K = 1,5. Сохранён реальный масштаб осей; фокусы не показаны, чтобы не смешивать плоскую фокальную схему с пространственной областью.

Вертикальный тип имеет особое значение для последующей теории, поскольку показывает, что один и тот же оператор построения в зависимости от K способен порождать качественно различные исходные объёмы. Следовательно, разделение на $K < 1$ и $K > 1$ не является декоративной классификацией. Оно задаёт два различных геометрических исходных состояния для дальнейшей рекурсии. В будущем эти различия могут повлиять на лучевую статистику и модовую структуру, но подобные утверждения остаются за пределами главы 3: здесь установлено лишь геометрическое различие.

Если горизонтальный тип подчёркивает вытянутость порождающей дуги вдоль оси x, то вертикальный — её развитие в поперечном направлении. В обоих случаях приставка «псевдо-» указывает не на произвольность формы, а на опосредованное использование классического эллипса в составной смещённой конструкции с выделением активной радиальной функции. Именно такое построение создаёт внутренний объём второго порядка, пригодный для последующего повышения порядка.

3.4. Трёхфокальное подсемейство псевдоэллипсоидов

Трёхфокальное подсемейство представляет собой особый случай горизонтального режима. Оно не вводит нового порядка и не является самостоятельной рекурсивной операцией. Его смысл полностью определяется геометрией второго порядка: это специальное соединение двух четвертей эллипсов, при котором один внутренний фокус левой дуги совпадает с одним внутренним фокусом правой.

Для горизонтального типа при $a = 1$, $b = K$ фокальное расстояние каждой исходной эллиптической дуги равно $c = \sqrt{(1 - K^2)}$. Внутренний фокус левой дуги смещён к центру, как и внутренний фокус правой дуги с противоположной стороны. Условие совпадения их координат определяет специальное значение h_1:

$$h_1^{(3f)} = 2\sqrt{(1 - K^2)} - 2, \quad K < 1.$$

Это не произвольный выбор параметра: равенство непосредственно следует из совпадения координат двух внутренних фокусов. Поэтому трёхфокальное подсемейство следует рассматривать как точно определённый геометрический слой в классе горизонтальных псевдоэллипсоидов, а не как визуальный вариант чертежа.

При K = 0,6 получаем $h_1 = -0{,}4$. Отрицательное h_1 означает перекрытие двух четвертьэллиптических ветвей. Однако не всякое перекрытие является трёхфокальным. Перекрытие — общий режим $h_1 < 0$; трёхфокальность возникает только при специальном равенстве, обеспечивающем совпадение внутренних фокусов. Эти понятия необходимо чётко разграничивать.

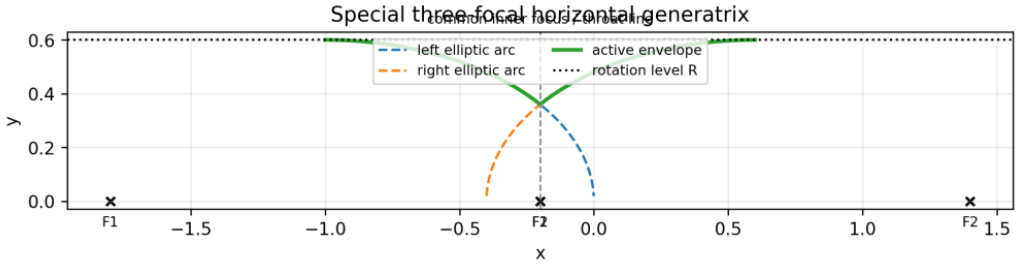

Рисунок 3.5. Горизонтальная эллиптическая образующая специального трёхфокального псевдоэллипсоида: K = 0,6, $h_1 = -0{,}4$, h = 0. Один внутренний фокус левой дуги совпадает с внутренним фокусом правой.

В области симметричного перекрытия центральная часть активного профиля приобретает характер горловины. Для трёхфокального случая координата её центральной точки равна $x_f = h_1/2$. Подстановка трёхфокального условия даёт $x_f = \sqrt{(1 - K^2)} - 1$. Высота образующей в этой точке равна K^2, а радиус внутренней полости в горловине определяется уровнем оси вращения R = K + h:

$r_{throat} = K + h - K^2$.

Эта величина имеет ясный геометрический смысл: она показывает, остаётся ли положительный внутренний радиус в центральной области горловины. При $r_{throat} > 0$ горловина существует как реальная часть внутреннего объёма; при $r_{throat} = 0$ вырождается в предельный контакт; при $r_{throat} < 0$ формальная трёхфокальная конструкция образующей не создаёт физически осмысленной внутренней горловины при выбранном положении оси вращения.

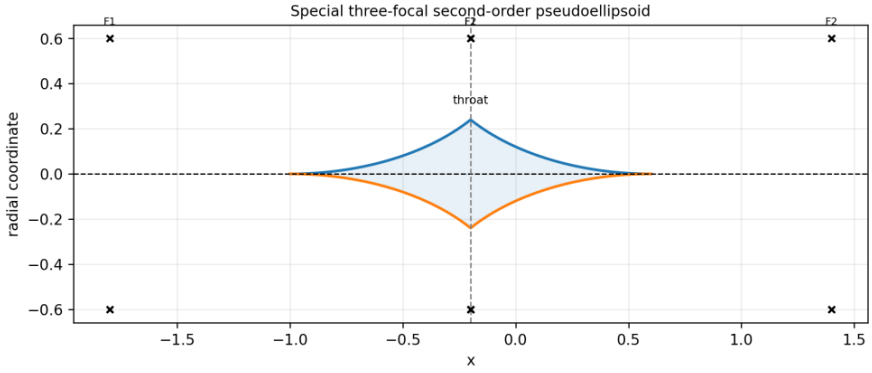

Рисунок 3.6. Двумерное сечение специального трёхфокального псевдоэллипсоида второго порядка при K = 0,6, $h_1 = -0{,}4$, h = 0. Горловина показана как часть внутреннего объёма второго порядка.

Трёхфокальность не следует смешивать с доказанным эффектом трёхмерной фокусировки. В главе 3 она означает только строгое свойство плоской эллиптической геометрии — совпадение

двух внутренних фокусов составной образующей. Возможное влияние горловины на статистику лучей, модовую структуру или вывод энергии подлежит исследованию на последующих этапах. Здесь устанавливаются лишь геометрический статус подсемейства и его допустимость в качестве конфигурации второго порядка.

3.5. Сферическое подсемейство псевдоэллипсоидов

Сферическое подсемейство соответствует предельному случаю K = 1, когда исходный эллипс становится окружностью. Различие между горизонтальной и вертикальной ориентациями фокусов исчезает, поскольку оба фокуса каждого эллипса совпадают с центром окружности. Поэтому сферическое подсемейство занимает промежуточное положение между горизонтальными и вертикальными псевдоэллипсоидами.

Необходимо подчеркнуть терминологическую границу. Употребляемое здесь слово «псевдосфера» не имеет отношения к классической псевдосфере Бельтрами. В данной теории оно обозначает исключительно предельный случай псевдоэллипсоидного построения K = 1, когда две четверти эллипсов превращаются в четверти окружностей. Это внутренний термин настоящей конструктивной геометрии, а не заимствование из классической дифференциальной геометрии поверхностей постоянной отрицательной кривизны.

В рассматриваемом построении намеренно выделяются два основных типа: K < 1 и K > 1. Значение K = 1 используется как предельный контрольный случай, а не как основной расчётный режим. Такое ограничение методологически полезно, поскольку предотвращает смешение горизонтального, вертикального и вырожденного случаев.

При K = 1 фокальная структура исчезает, но логика псевдоэллипсоидного построения сохраняется: остаются составная образующая из двух четвертей окружностей, смещённая ось вращения, активный профиль и радиальная функция d(x). При $h_1 = 0$, h = 0 две круговые четверти соединяются в центральной точке, а внутренний объём второго порядка определяется прежним интервалом $I_2(x) = [0, d(x)]$.

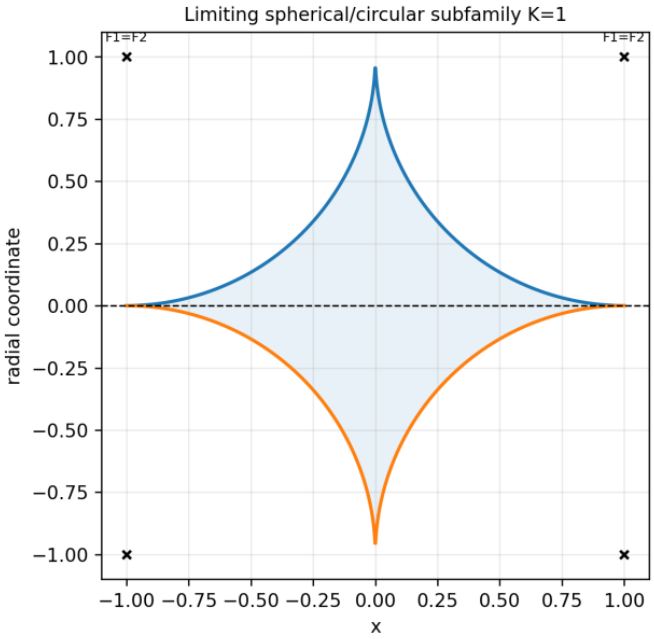

Рисунок 3.7. Предельное сферическое подсемейство K = 1: двумерное сечение второго порядка. Показана предельная круговая конструкция, служащая контрольным случаем между горизонтальным и вертикальным типами.

Научная роль сферического подсемейства состоит не в замене горизонтального и вертикального типов некоторой средней формой, а в установлении разделяющей границы в

пространстве параметра K. При $K < 1$ фокальная ось исходных дуг горизонтальна; при $K > 1$ — вертикальна; при $K = 1$ фокальная анизотропия исчезает. Поэтому сферическое подсемейство удобно как контрольный предел, но не как основной носитель эллиптической фокальной структуры.

Если в дальнейшем потребуется численно сопоставить горизонтальные, вертикальные и предельные сферические формы, $K = 1$ следует ввести как отдельный контрольный режим. Для главы 3 достаточно зафиксировать его геометрический статус и терминологическое отличие от классической псевдосферы.

3.6. Выводы

В настоящей главе псевдоэллипсоид второго порядка определён как базовый внутренний объём всей теории псевдоэллипсоидов высших порядков. Главный результат — переход от составной эллиптической образующей к радиальной функции $d(x)$, а затем к интервалу $I_2(x) = [0, d(x)]$. Именно этот интервал, а не отдельная граничная кривая, выступает минимальной геометрической единицей дальнейшей теории.

Второй порядок не содержит рекурсивных смещений и не требует операции Merge между слоями одного экземпляра. Следовательно, описывать его средствами геометрии высших порядков некорректно. Это исходное состояние, к которому в последующих главах применяются рекурсивные операторы. Такое разграничение предотвращает смешение уровней: глава 3 посвящена Ω_2, а не Ω_3, Ω_4 или Ω_n.

Установлено, что горизонтальный и вертикальный типы имеют общий алгоритм построения, но различаются параметром K, ориентацией фокальной структуры исходных дуг и распределением радиальной функции. Горизонтальному типу соответствует $K < 1$, вертикальному — $K > 1$; сферическое подсемейство $K = 1$ рассматривается как предельный контрольный случай.

Отдельно выделено трёхфокальное подсемейство горизонтальных псевдоэллипсоидов. Его статус строго геометрический: один внутренний фокус левой дуги совпадает с одним внутренним фокусом правой, что задаёт условие $h_1^{(3f)} = 2\sqrt{(1 - K^2)} - 2$. Центральная область в этой конфигурации приобретает характер горловины радиуса $r_throat = K + h - K^2$. Однако это не является доказательством трёхмерной фокусировки или иного волнового эффекта; физическая интерпретация требует последующей проверки.

4. Псевдоэллипсоиды третьего порядка: первый рекурсивный уровень

Настоящая глава посвящена первому рекурсивному переходу от псевдоэллипсоида второго порядка к третьему. Объектами построения выступают радиальный интервал второго порядка, первое смещение R_1, оператор C_R, операция Merge, горизонтальный и вертикальный режимы третьего порядка, а также лемма о первом объединении интервалов.

4.1. Исходный интервал второго порядка

Отправной точкой для третьего порядка является не сама эллиптическая дуга $y(x)$, а радиальный интервал второго порядка. После построения составной образующей определяется активный профиль $y_act(x)$ и неотрицательная радиальная функция $d(x) = \max(R - y_act(x), 0)$. Эта функция задаёт расстояние от оси вращения до рабочей границы второго порядка. При каждом фиксированном значении осевой координаты x внутренний объём представлен интервалом от оси до границы:

$I_2(x) = [0, d(x)]$.

Приведённая запись принципиально важна. Она переводит теорию с языка поверхностных линий на язык внутренних областей. Если рассматривать только граничную функцию $d(x)$, может возникнуть неверное впечатление, будто повышение порядка действует на одну

кривую. В конструктивной постановке рекурсия действует на интервал: его нижняя граница равна нулю, верхняя — d(x), а все промежуточные радиальные значения принадлежат расчётному объёму.

Следовательно, второй порядок играет роль начального состояния рекурсии. В нём уже содержится специфика эллиптической геометрии, выраженная через K, h_1 и h, но пока отсутствуют рекурсивное смещение, внутренняя нижняя стенка и кольцевое отделение от оси. Эти свойства возникают после применения первого параметра смещения R_1. Ошибка на этом этапе автоматически переносится на третий, четвёртый и все последующие порядки, поэтому начальный интервал необходимо задавать строго.

В вычислительной реализации $I_2(x)$ соответствует массивам lo = 0 и hi = d(x), передаваемым функции построения рекурсивных интервалов. Таким образом, d(x) является не просто графиком из предыдущей главы, а исходными данными всей дальнейшей теории.

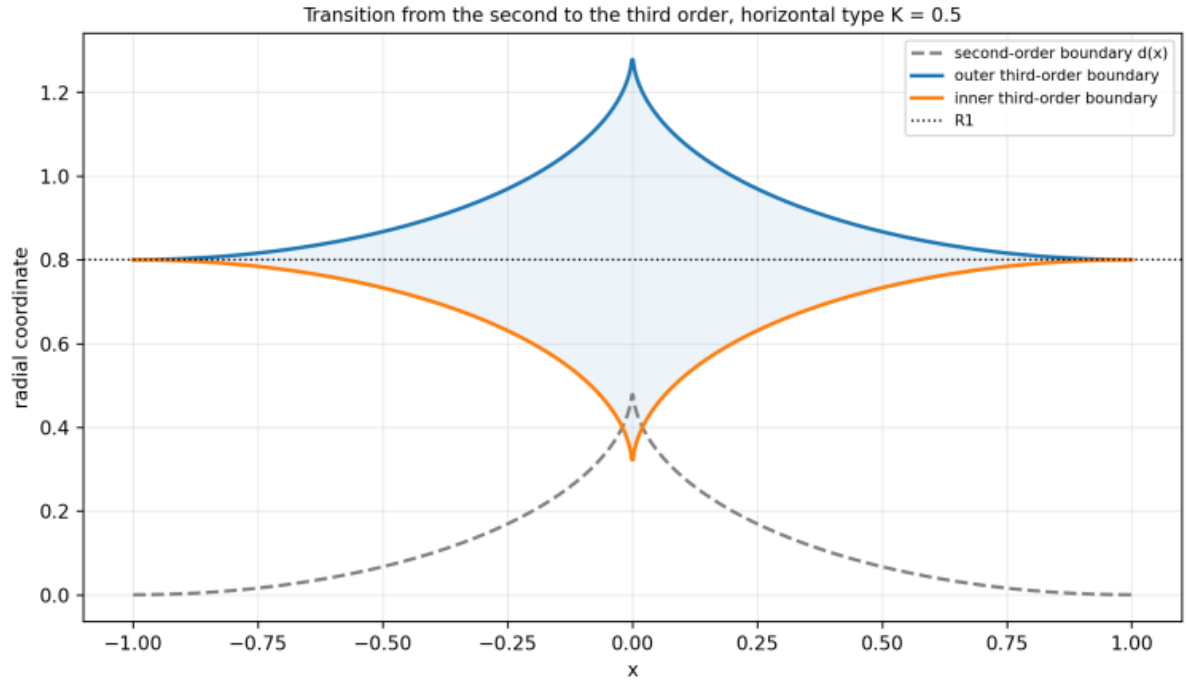

Рисунок 4.1. Переход от второго порядка к третьему для горизонтального типа K = 0,5. Серая штриховая кривая обозначает границу второго порядка; внешняя и внутренняя границы третьего получены интервальной рекурсией при R_1 = 0,8.

Рисунок 4.1 показывает, что третий порядок не представляет собой простую внешнюю копию второго. При R_1 > max d(x) исходная область отделяется от оси и превращается в кольцевой радиальный слой. В меридиональном сечении это проявляется возникновением внутренней границы. После вращения внутренняя граница образует внутреннюю тороидальную поверхность. Она не добавляется вручную, а следует из формулы интервала третьего порядка.

4.2. Рекурсивный оператор третьего порядка

Первый рекурсивный шаг определяется единственным положительным смещением R_1. Для произвольного радиального интервала [α, β] оператор C_R осуществляет отражение со смещением и формирует два образа: разностный и суммарный. Разностная часть переносит интервал к уровню $R_1 - r$, обязательно ограничивая отрицательные радиусы нулём; суммарная часть переносит тот же интервал к уровню $R_1 + r$. Это особенно существенно для псевдоэллипсоидов, так как максимумы функции d(x) и наличие участков нулевой толщины зависят от K, h_1 и h.

$C_R_1([\alpha, \beta]) = [\max(R_1 - \beta, 0), \max(R_1 - \alpha, 0)] \cup [R_1 + \alpha, R_1 + \beta]$.

При $\alpha = 0$, $\beta = d(x)$ первый шаг принимает вид:

$C_R_1([0, d(x)]) = [\max(R_1 - d(x), 0), R_1] \cup [R_1, R_1 + d(x)]$.

На уровне формальных ветвей этим двум зонам соответствуют границы $R_1 - d(x)$ и $R_1 + d(x)$. Однако такое описание является лишь формальным каркасом. Реальный интервал третьего порядка возникает после операции Merge, поскольку обе зоны имеют общую точку R_1. Поэтому третий порядок занимает особое положение: рекурсия уже действует, но два формальных образа обычно объединяются в один радиальный слой:

$I_3(x) = \text{Merge}(C_R_1(I_2(x))) = [\max(R_1 - d(x), 0), R_1 + d(x)]$.

Из этой формулы следует, что третий порядок имеет две границы. Верхняя равна $R_1 + d(x)$, нижняя — $\max(R_1 - d(x), 0)$. Если R_1 превышает максимум $d(x)$, нижняя граница всюду положительна и область полностью отделена от оси вращения. При равенстве R_1 максимальному значению $d(x)$ нижняя граница касается оси в критических точках. Если R_1 меньше максимума, часть нижней границы обрезается нулём и соответствующие осевые зоны снова соприкасаются с осью либо включают её.

Таким образом, R_1 — не декоративный масштабный параметр, а первый подлинный морфологический параметр высших порядков. Он обеспечивает управляемую связь между исходной эллиптической геометрией и новым радиальным положением объёма. На дальнейших шагах смещения R_1, R_2, … формируют рекурсивную внутреннюю архитектуру псевдоэллипсоидов порядка n.

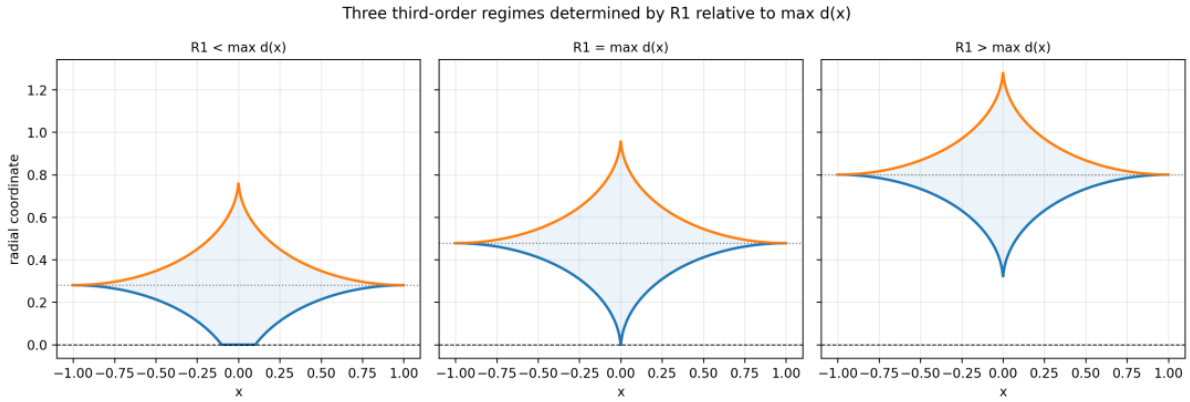

Рисунок 4.2. Три режима третьего порядка в зависимости от соотношения R_1 и max d(x): пересечение с осью, критический контакт и кольцевое отделение. Во всех трёх случаях изменяется только R_1 при неизменном интервально-рекурсивном правиле.

Рисунок 4.2 имеет принципиальное значение: уже первое смещение создаёт три морфологически различных режима. При малом R_1 нижняя граница частично обрезается осью и область сохраняет связь с центральной зоной. При критическом R_1 внутренний радиальный зазор исчезает только там, где $d(x)$ достигает максимума. При большом R_1 область становится кольцевой и отделяется от оси на всём активном осевом диапазоне.

4.3. Горизонтальный тип третьего порядка

Горизонтальный тип определяется условием $K < 1$. В этом случае исходные эллиптические дуги вытянуты вдоль оси x, а их фокусы расположены на горизонтальной фокальной оси. Во втором порядке соответствующая геометрия задаёт компактную функцию $d(x)$, максимальную в зоне центрального соединения дуг и обращающуюся в нуль в концевых предельных точках замкнутого режима $h = 0$. При переходе к третьему порядку эта функция переносится в новый радиальный слой относительно уровня R_1.

В горизонтальном случае геометрия третьего порядка особенно наглядна. При K = 0,5 и R_1 = 0,8 величина R_1 превышает максимальный исходный радиус d(x) = 0,5 в замкнутом режиме. Поэтому нижняя граница max(R_1 − d(x), 0) остаётся положительной на всём активном осевом диапазоне. Область третьего порядка отделяется от оси вращения и в трёхмерном пространстве имеет характер оболочки с внутренней поверхностью. Это уже не сплошное тело вращения второго порядка, а радиально смещённый объём с внутренним и внешним контурами.

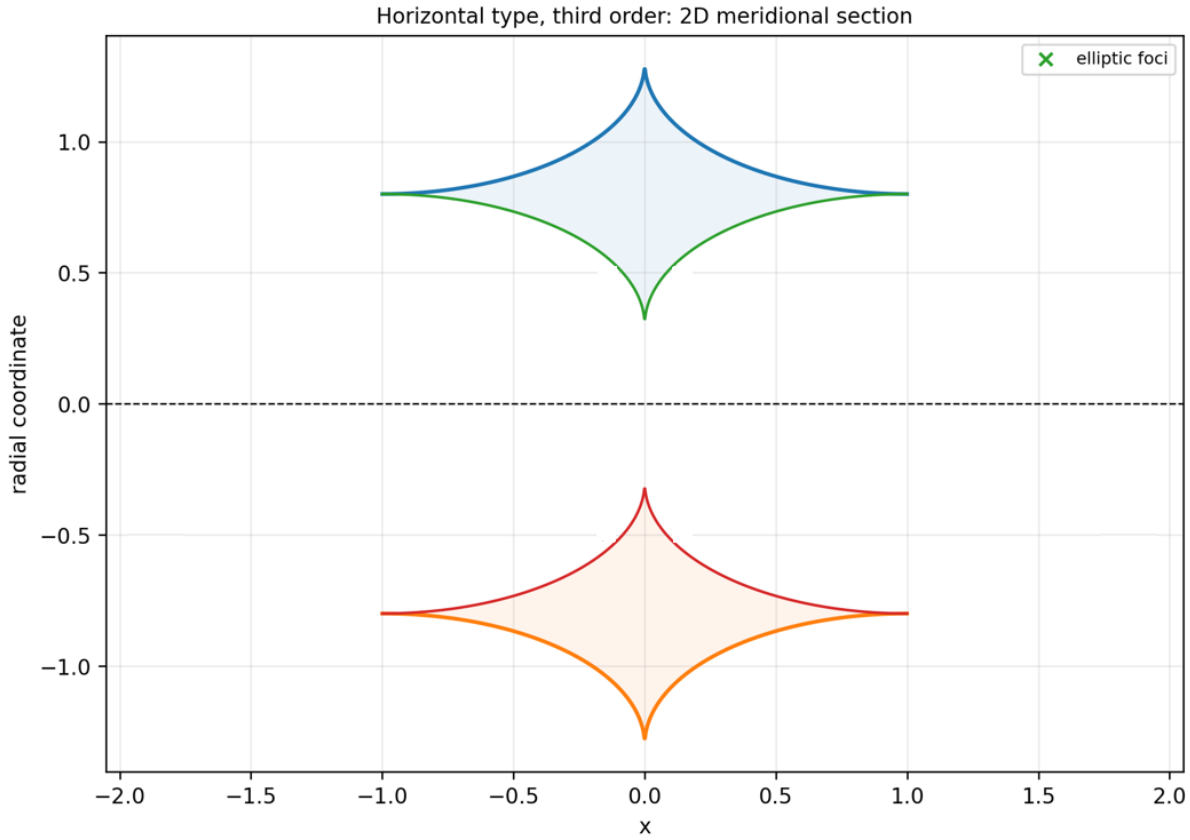

Рисунок 4.3. Горизонтальный тип третьего порядка: двумерное меридиональное сечение. Параметры: a = 1, K = 0,5, h_1 = 0, h = 0, R_1 = 0,8, m = 1. Фокусы показаны только для реально видимых эллиптических границ.

На рис. 4.3 внутренняя и внешняя границы имеют общее эллиптическое происхождение, однако не совпадают с исходной образующей: они получены переносом исходного радиального интервала. Фокусы нельзя трактовать как новые физические фокусы объёма. Они остаются геометрическими метками видимых эллиптических границ, связанных с исходными дугами. Операция Merge не создаёт новых фокусов и не должна получать подобную интерпретацию.

Горизонтальный третий порядок выглядит относительно регулярным: формальное ветвление уже произошло, но после Merge остаётся один объединённый радиальный интервал. Поэтому визуально третий порядок может казаться проще, чем предполагает формальная рекурсия. Эта кажущаяся простота не должна вводить в заблуждение: нижняя граница уже отделилась от оси, что представляет собой реальное геометрическое изменение относительно второго порядка.

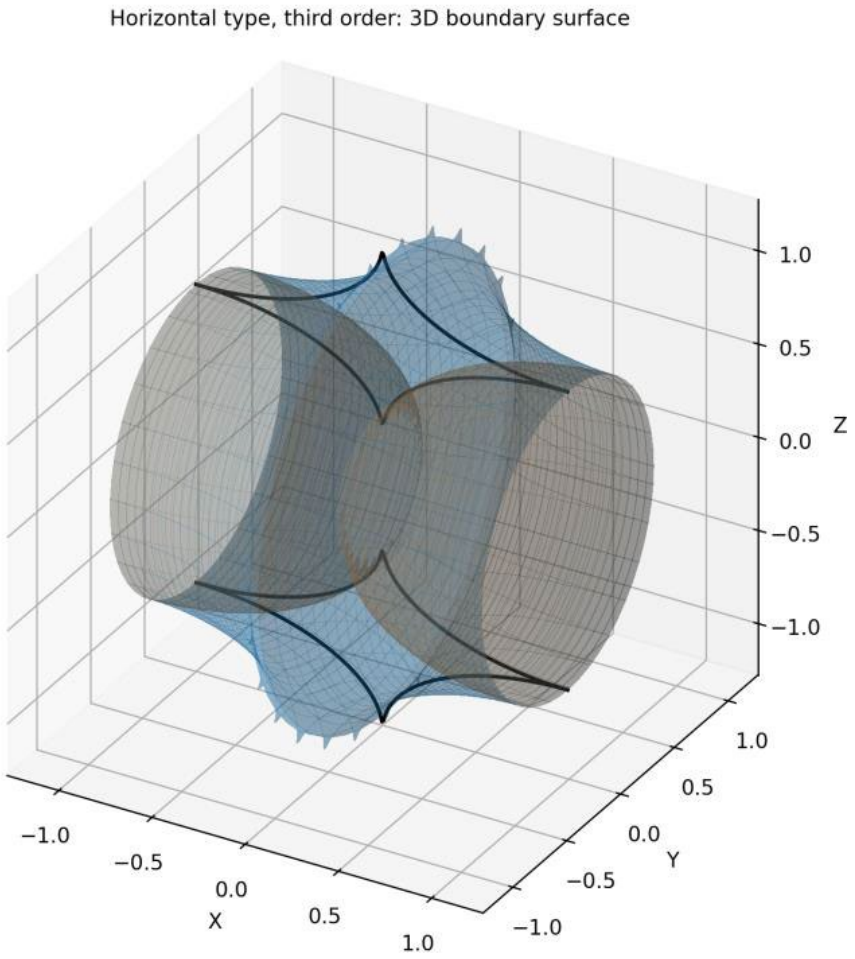

Рисунок 4.4. Горизонтальный тип третьего порядка: трёхмерная граничная поверхность полного объёма. Фокусы в 3D не отображаются; выделенное меридиональное сечение контролирует внутреннюю и внешнюю границы.

Трёхмерную реализацию следует рассматривать как граничную поверхность полного объёма, а не как отдельную математическую линию. Внутренняя поверхность появляется вследствие положительности нижней границы интервала и является частью границы расчётной области. В дальнейшем она может служить носителем граничных условий. Однако на уровне настоящей главы это геометрический факт, а не доказанный волновой эффект.

4.4. Вертикальный тип третьего порядка

Вертикальному типу соответствует $K > 1$. Исходные эллиптические дуги вытянуты в поперечном направлении, а фокусы располагаются вертикально относительно центров исходных эллипсов. При том же формальном рекурсивном операторе вертикальный тип может вести себя иначе, чем горизонтальный, поскольку радиальная функция $d(x)$ имеет другое распределение.

В замкнутом режиме $h = 0$ при $K = 1{,}5$ и $R_1 = 0{,}8$ максимум $d(x)$ превышает R_1. Нижняя граница $\max(R_1 - d(x), 0)$ на части осевого диапазона обрезается нулём. Следовательно, третий порядок не везде отделён от оси вращения: он сохраняет зоны осевого контакта или включения оси, хотя то же смещение R_1 обеспечивало полное кольцевое отделение в горизонтальном примере.

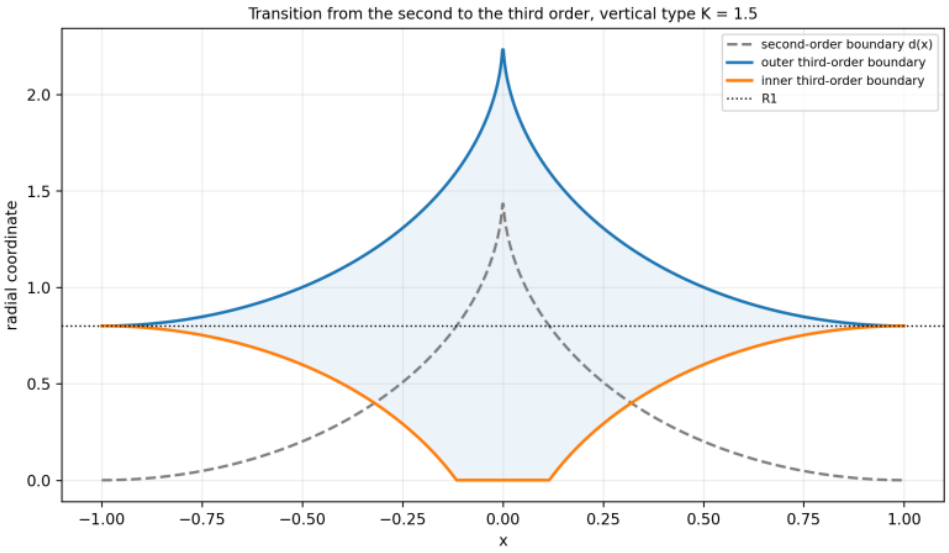

Рисунок 4.5. Переход от второго порядка к третьему для вертикального типа K = 1,5. При R_1 = 0,8 нижняя граница частично обрезается по оси, поскольку max d(x) > R_1.

Эта особенность не является численной ошибкой или дефектом визуализации. Она непосредственно вытекает из отсечения отрицательных радиусов оператором C_R_1. Формальное выражение $R_1 - d(x)$ без отсечения могло бы принимать отрицательные значения; реальная геометрия отрицательных радиусов не содержит, поэтому нижняя граница заменяется нулём.

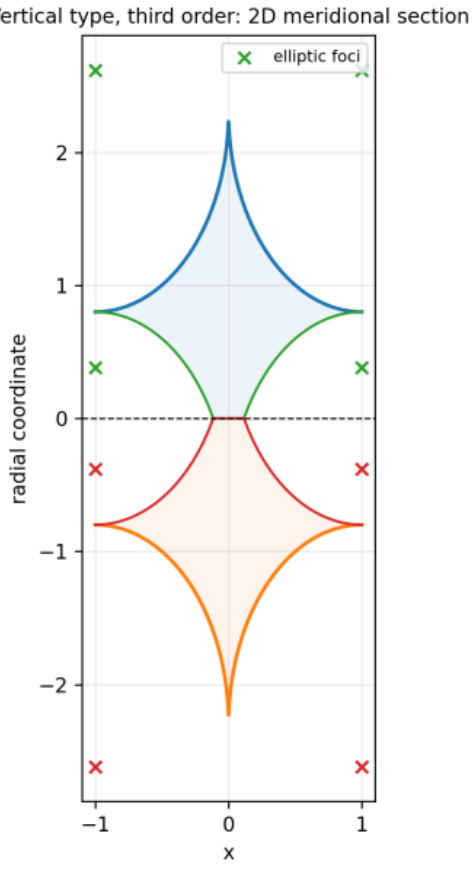

Рисунок 4.6. Вертикальный тип третьего порядка: двумерное меридиональное сечение. Параметры: a = 1, K = 1,5, h_1 = 0, h = 0, R_1 = 0,8, m = 1. Сечение построено без искусственного соединения линий.

В пределах одного осевого диапазона могут сосуществовать участки с положительной внутренней границей и участки, где эта граница схлопывается к оси. Такой смешанный характер составляет существенный морфологический признак вертикального третьего порядка при указанных параметрах.

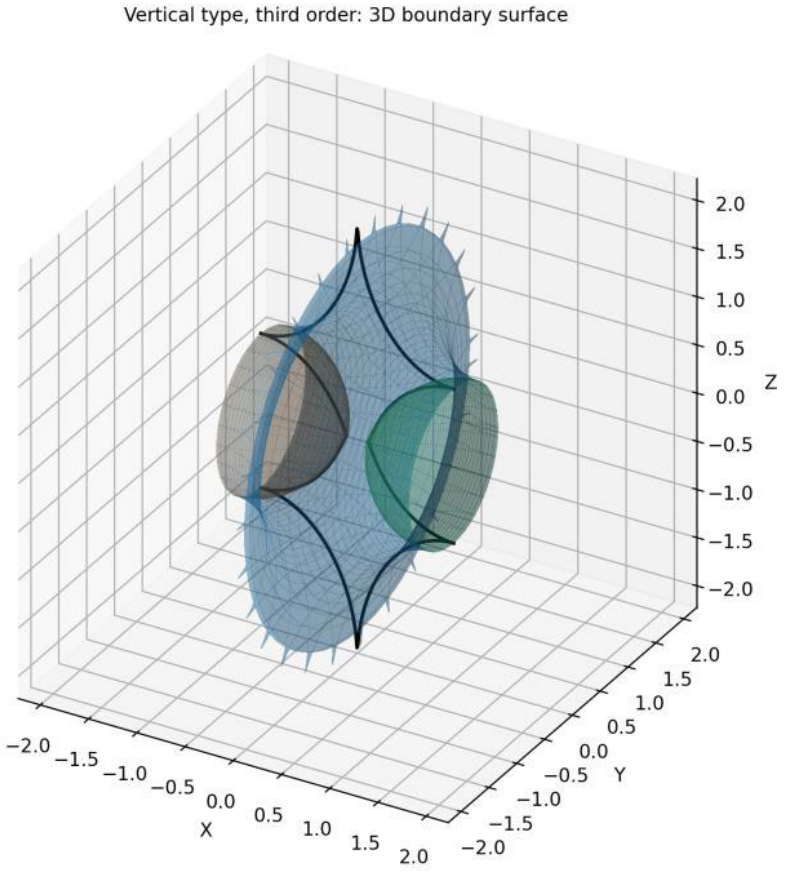

Рисунок 4.7. Вертикальный тип третьего порядка: трёхмерная граница полного объёма. Пространственная форма отображает результат интервальной рекурсии и Merge; фокусы в 3D не показаны.

Вертикальный третий порядок нельзя получить простым масштабированием горизонтального. Те же формулы и то же значение R_1 формируют различные пространственные границы, потому что параметр K задаёт другую исходную эллиптическую геометрию. Поэтому классификацию на горизонтальный и вертикальный типы необходимо сохранять на каждом рекурсивном уровне.

4.5. Лемма о первом переходе Merge

Лемма 4.1. Пусть $d(x) \geq 0$ и $R_1 > 0$. Тогда при $d(x) > 0$ формальные интервалы третьего порядка $[\max(R_1 - d(x), 0), R_1]$ и $[R_1, R_1 + d(x)]$ после Merge образуют один замкнутый интервал $[\max(R_1 - d(x), 0), R_1 + d(x)]$.

Доказательство. Правая граница разностного интервала равна R_1, и левая граница суммарного интервала также равна R_1. Следовательно, интервалы имеют общую точку. По определению Merge соприкасающиеся замкнутые интервалы объединяются в один замкнутый интервал. Левый конец полученного интервала равен $\max(R_1 - d(x), 0)$, правый — $R_1 + d(x)$. Что и требовалось доказать.

Эта лемма объясняет, почему третий порядок может визуально выглядеть проще, чем предполагает формальное дерево ветвей. Две формальные зоны не являются двумя несвязанными физическими компонентами: они соприкасаются на уровне R_1 и объединяются в

один радиальный интервал. Однако это не делает третий порядок тривиальным: геометрическая новизна связана с тем, что нижняя граница перестаёт обязательно равняться нулю. Она может стать положительной, отделяя полный объём от оси.

4.6. Морфологические режимы третьего порядка в зависимости от R_1

Основная классификация третьего порядка определяется не количеством ветвей, а положением нижней границы интервала. Пусть D_max = max d(x) на активной области второго порядка. Тогда возникают три режима.

Первый режим: $R_1 < D_max$. Существуют точки x с $d(x) > R_1$, где выражение $R_1 - d(x)$ отрицательно и нижняя граница после отсечения равна нулю. Область имеет зоны осевого контакта или включения и частично связана с осью.

Второй, критический режим: $R_1 = D_max$. Нижняя граница касается оси только там, где d(x) достигает максимума. Небольшое увеличение R_1 отделяет область от оси, а небольшое уменьшение создаёт конечную зону осевого включения.

Третий режим: $R_1 > D_max$. Нижняя граница положительна на всём активном диапазоне, область отделена от оси и представляет собой кольцевой радиальный слой. После вращения появляются внутренняя и внешняя поверхности. Это особенно важно для понимания того, как высшие порядки создают внутренние стенки без их ручного добавления.

4.7. Что третий порядок привносит в теорию псевдоэллипсоидов

Третий порядок добавляет не просто новое изображение, а новый уровень конструктивного содержания. Во втором порядке внутренняя область всегда начинается на оси: $I_2(x) = [0, d(x)]$. В третьем нижняя граница превращается в функцию $p(x) = \max(R_1 - d(x), 0)$, которая может быть нулевой, положительной либо обращаться в нуль только в критических точках. Таким образом возникает первый управляемый внутренний радиальный зазор.

Второе новое свойство — внутренняя поверхность. Для задач о волнах и лучах она потенциально значима как дополнительная отражающая граница, способная нести граничные условия. Но пока это лишь геометрическая подготовка, а не доказательство локализации, фильтрации или направленного вывода энергии.

Третье свойство связано с подготовкой к четвёртому порядку. Интервал [0, d(x)] преобразуется в [p(x), q(x)], где $p(x) = \max(R_1 - d(x), 0)$, $q(x) = R_1 + d(x)$. На следующем шаге оператор будет действовать на этот интервал, а не вновь на исходную функцию d(x). Поэтому третий порядок — переходное звено между базовым псевдоэллипсоидом и действительно многозонной рекурсией.

Четвёртое свойство состоит в первом явном различии между формальным числом ветвей и реальным количеством компонент после Merge. Дерево B_3 формально содержит две ветви, однако при $d(x) > 0$ они ограничивают один общий интервал. На более высоких порядках формальное число ветвей быстро возрастает, тогда как Merge может существенно сокращать число эффективных компонент.

4.8. Выводы

В главе построен псевдоэллипсоид третьего порядка как первый рекурсивный уровень. Исходным объектом служит радиальный интервал второго порядка $I_2(x) = [0, d(x)]$, а не отдельная граничная линия. Первое смещение R_1 действует через оператор C_R_1; Merge преобразует две формальные зоны в один замкнутый интервал третьего порядка.

Показано, что третий порядок имеет внутреннюю и внешнюю границы. Внутренняя граница может быть положительной, критически соприкасаться с осью либо частично отсекаться нулём. Тем самым R_1 задаёт первый морфологический механизм высших порядков и определяет осевую связность, критическое состояние или кольцевое отделение.

Горизонтальный и вертикальный типы используют один оператор, но дают разные результаты из-за различий в исходной функции d(x). При рассмотренных параметрах горизонтальный тип формирует отделённый кольцевой слой, а вертикальный сохраняет участки осевого контакта. Следовательно, классификация $K < 1$ или $K > 1$ должна сохраняться на всех рекурсивных уровнях.

Лемма о первом Merge доказывает соприкосновение формальных зон на уровне R_1 и их объединение. Поэтому третий порядок рекурсивен по происхождению, но ещё не формирует полноценной радиальной многокомпонентности. Его новизна — возникновение внутренней границы и подготовка к дальнейшей рекурсии.

Строгое научное правило состоит в том, что третий порядок нельзя вручную конструировать как две независимые поверхности, а фокусы и внутренние границы нельзя объявлять уже доказанными физическими центрами. Все элементы должны выводиться из интервальной конструкции; волновая интерпретация остаётся предметом будущей верификации.

5. Псевдоэллипсоиды четвёртого порядка: второй рекурсивный шаг

5.1. Почему четвёртый порядок является первым структурно сложным уровнем

Во втором порядке каждому осевому значению x соответствует исходный интервал $I_2(x) = [0, d(x)]$, описывающий всю допустимую радиальную область от оси вращения до активной эллиптической границы, а не только поверхность. В третьем порядке к нему применяется первое радиальное смещение R_1. До Merge возникают две формальные части — разностная и суммарная зоны относительно уровня R_1. Однако они соприкасаются на общем уровне R_1 и обычно сливаются в один непрерывный интервал.

Четвёртый порядок принципиально отличается от третьего: второй оператор C_R_2 применяется к результату предыдущего шага. Иными словами, R_2 действует не повторно на исходную функцию d(x), а на весь интервал $I_3(x)$. Это центральное методологическое правило главы. Нарушение его и прямое применение R_2 к d(x) приводят к другой геометрии, не соответствующей рекурсивному определению:

$I_2(x) = [0, d(x)]$;

$I_3(x) = \text{Merge}(C_R_1(I_2(x)))$;

$I_4(x) = \text{Merge}(C_R_2(I_3(x)))$.

Оператор C_R действует на произвольный радиальный интервал $[\alpha, \beta]$: сначала формирует разностный образ относительно уровня R, затем суммарный образ и объединяет пересекающиеся либо соприкасающиеся интервалы:

$C_R([\alpha, \beta]) = [\max(R - \beta, 0), \max(R - \alpha, 0)] \cup [R + \alpha, R + \beta]$.

По этой формуле четвёртый порядок не является простым масштабированием третьего. Если третий порядок задаёт [p, q], то на четвёртом возникают две группы: разностная $[\max(R_2 - q, 0), \max(R_2 - p, 0)]$ и суммарная $[R_2 + p, R_2 + q]$. При $p > 0$ до учёта отсечения на оси между ними возникает естественный промежуток шириной 2p. Именно он служит источником настоящей многозонной структуры.

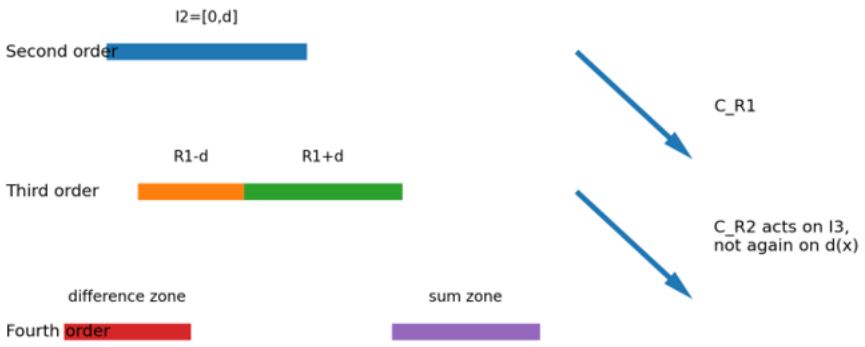

Рисунок 5.1. Локальная интервальная логика второго, третьего и четвёртого порядков при фиксированном x. Четвёртый порядок строится из $I_3(x)$, а не повторно из d(x).

Необходимо различать формальный и физический уровни. Формальное дерево четвёртого порядка содержит четыре выражения: $R_2 - (R_1 - d)$, $R_2 + (R_1 - d)$, $R_2 - (R_1 + d)$, $R_2 + (R_1 + d)$. Но эти формулы ещё не являются окончательной геометрией; они лишь задают возможные границы радиальных зон. Окончательная область устанавливается после перехода к интервалам и Merge.

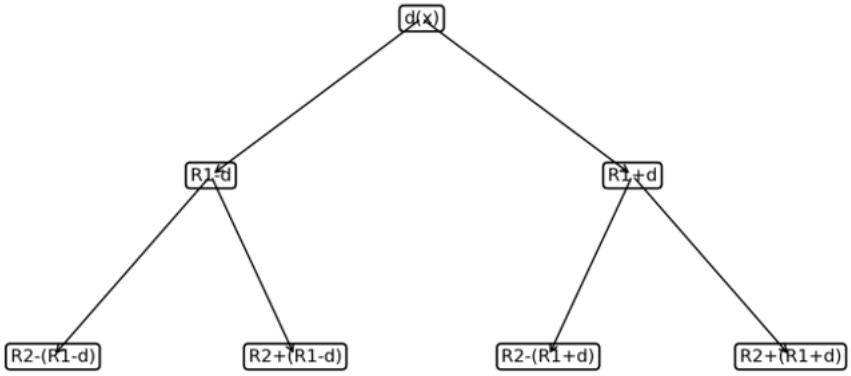

Рисунок 5.2. Формальный каркас ветвей четвёртого порядка $R_2 \pm (R_1 \pm d(x))$. Формально ветвей четыре, но реальный внутренний объём определяется только после объединения интервалов и Merge.

Таким образом, в строгой формулировке нельзя смешивать исходную эллиптическую образующую, радиальную функцию d(x), формальные ветви рекурсии и физический внутренний объём. Четвёртый порядок впервые делает это различие обязательным: на втором оно может казаться избыточным, на третьем скрывается общим контактом интервалов, а на четвёртом его нарушение немедленно искажает топологию сечения.

5.2. Горизонтальный тип: двумерная и трёхмерная геометрия

Горизонтальному типу соответствует $K < 1$. Исходные четверти эллипсов вытянуты вдоль оси x, и фокальная ось каждой дуги также горизонтальна. Для четвёртого порядка это означает относительно малую поперечную амплитуду исходной d(x), тогда как рекурсивные смещения R_1 и R_2 способны переносить интервалы на существенно различные радиальные уровни. Поэтому даже простая исходная образующая после рекурсии даёт многозонное двумерное сечение.

В демонстрационном горизонтальном варианте использованы $K = 0{,}5$, $h_1 = 0$, $h = 0$, $R_1 = 0{,}7$ и $R_2 = 1{,}8$. Условия $h_1 = 0$ и $h = 0$ намеренно сохраняют исходную образующую в замкнутом режиме без экваториального зазора и концевых отверстий. Это обеспечивает чистоту постановки: исследуется именно второй рекурсивный шаг, а не режимы открытых апертур.

На двумерном сечении горизонтального четвёртого порядка видны две группы границ. Внешняя связана с большими радиусами суммарного образа относительно R_2, внутренняя — с разностным образом. При наличии ненулевого радиального промежутка между ними сечение становится кольцевым: область уже не заполняет всё пространство от оси до внешней поверхности. Это первое появление подлинной внутренней многозонности.

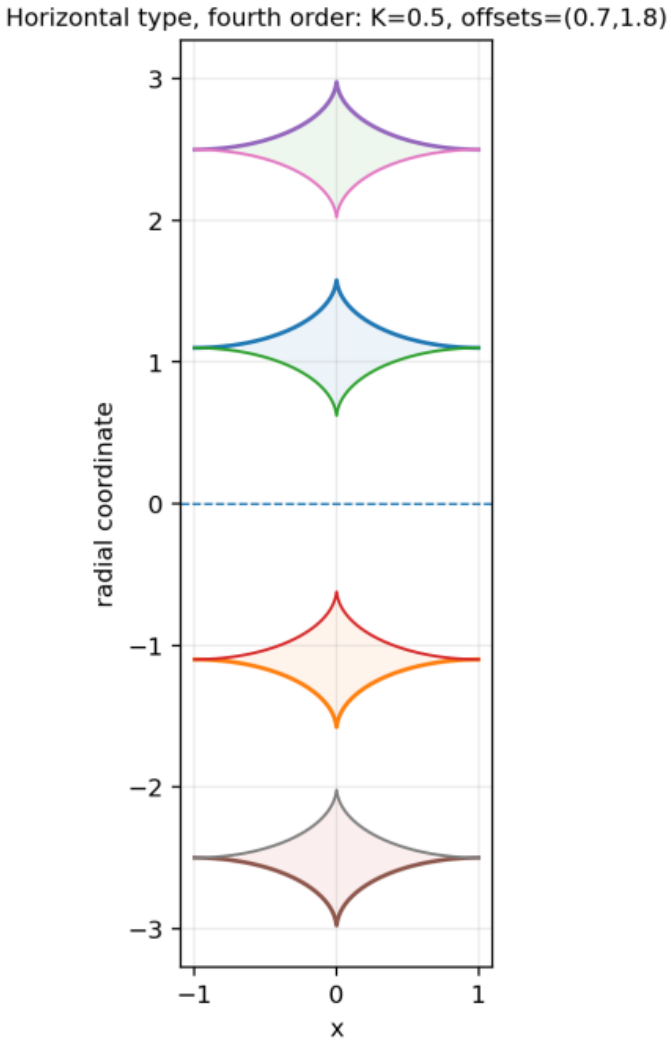

Рисунок 5.3. Горизонтальный псевдоэллипсоид четвёртого порядка: двумерное сечение. Параметры: a = 1, K = 0,5, h_1 = 0, h = 0, смещения (0,7; 1,8), m = 1. Показаны радиальные зоны после Merge; фокусы относятся только к видимым эллиптическим границам.

В трёхмерной конструкции та же закономерность проявляется системой поверхностей вращения. Внешняя поверхность ограничивает общий радиальный размер, а внутренняя демонстрирует реальное появление центральной вырезанной либо кольцевой зоны. Встроенное меридиональное сечение выполняет контрольную функцию: оно подтверждает, что построенная фигура соответствует именно объединённому внутреннему объёму с внутренними и внешними границами, а не одной оболочке.

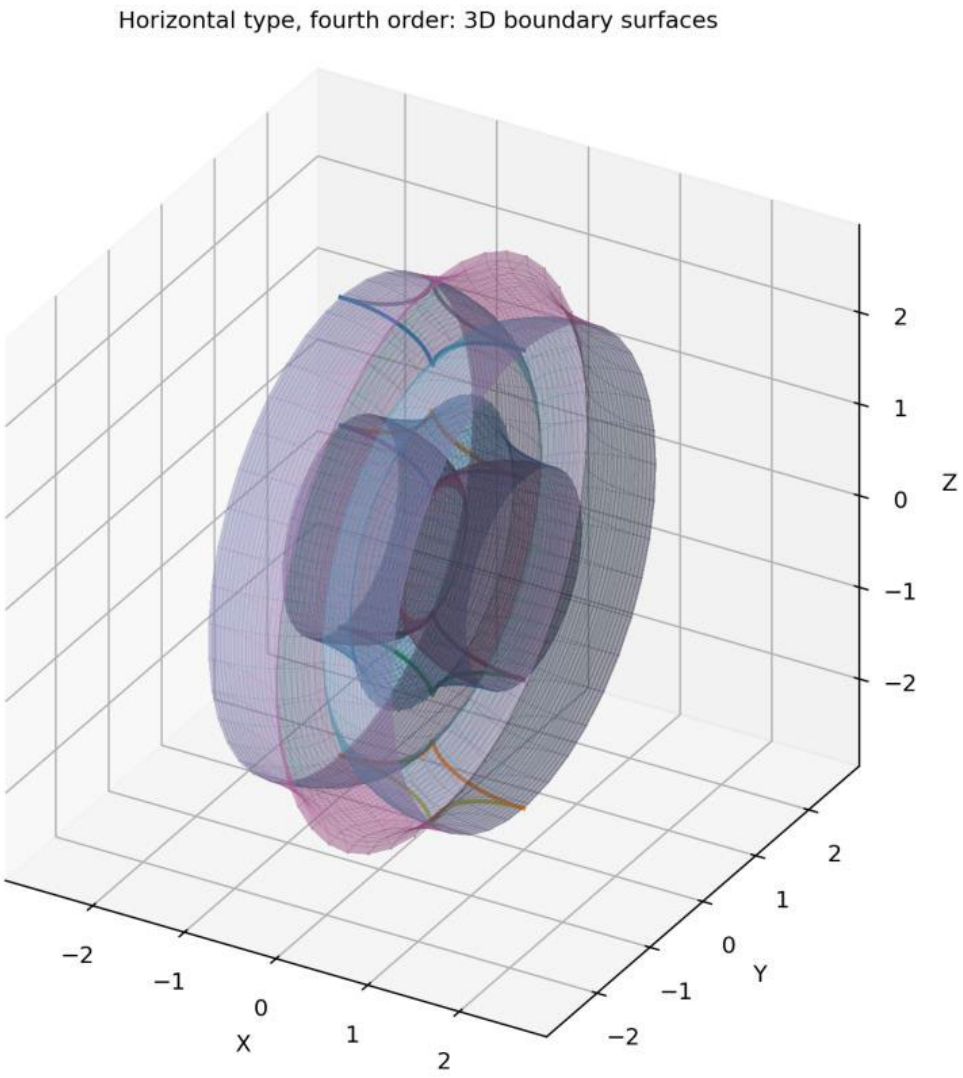

Рисунок 5.4. Горизонтальный псевдоэллипсоид четвёртого порядка: трёхмерная поверхность. Фокусы в 3D не обозначены; пространственное изображение проверяет граничные поверхности полного объёма и выделенное меридиональное сечение.

Горизонтальный пример удобен для объяснения второго рекурсивного шага: исходная эллиптическая форма при $K < 1$ отчётливо различима, а возникающие зоны легко сопоставить с формулой $C_R_2(I_3)$. Однако сам механизм не зависит от горизонтальности. Он одинаков для всех типов; меняются только исходная $d(x)$ и очертания радиальных зон.

5.3. Вертикальный тип: двумерная и трёхмерная геометрия

Вертикальному типу соответствует $K > 1$. Исходные четверти эллипсов вытянуты поперёк оси x, а фокальная структура каждой дуги ориентирована вертикально. Это изменяет радиальную функцию $d(x)$, но не закон рекурсии: $I_4(x) = \text{Merge}(C_R_2(I_3(x)))$.

Для демонстрационного вертикального варианта приняты $K = 1{,}5$, $h_1 = 0$, $h = 0$, $R_1 = 2{,}0$ и $R_2 = 5{,}0$. Параметры выбраны так, чтобы наглядно показать разделение радиальных зон. Вертикальный тип — не переименование горизонтального: другая исходная эллиптическая геометрия приводит к иному распределению $d(x)$, а значит и к иным формам двумерных сечений и трёхмерных поверхностей при тех же логических правилах.

На двумерном сечении видно, что Merge не уничтожает внутренние тороидальные зоны как геометрические объекты. Операция устраняет лишь дублирование общей пересекающейся

части. Если зоны не пересекаются и не касаются друг друга, они сохраняются как различные радиальные компоненты. Это фундаментальное обстоятельство: внутренние поверхности — не ошибка визуализации, а прямое следствие второго рекурсивного шага.

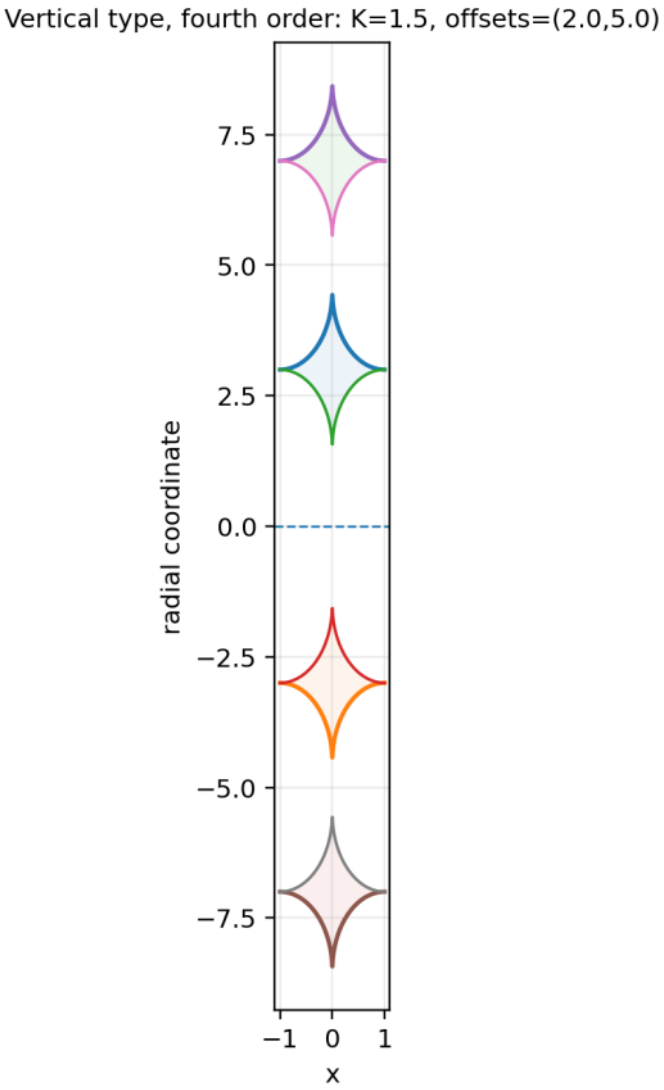

Рисунок 5.5. Вертикальный псевдоэллипсоид четвёртого порядка: двумерное сечение. Параметры: a = 1, K = 1,5, h_1 = 0, h = 0, смещения (2,0; 5,0), m = 1. Видны две радиальные зоны после второго рекурсивного шага.

При вращении меридионального сечения вокруг оси x внутренние границы образуют внутренние поверхности вращения, а внешние линии — внешнюю границу полного объёма. Такой объект нельзя корректно описать одной граничной функцией; необходим язык интервалов и их объединений.

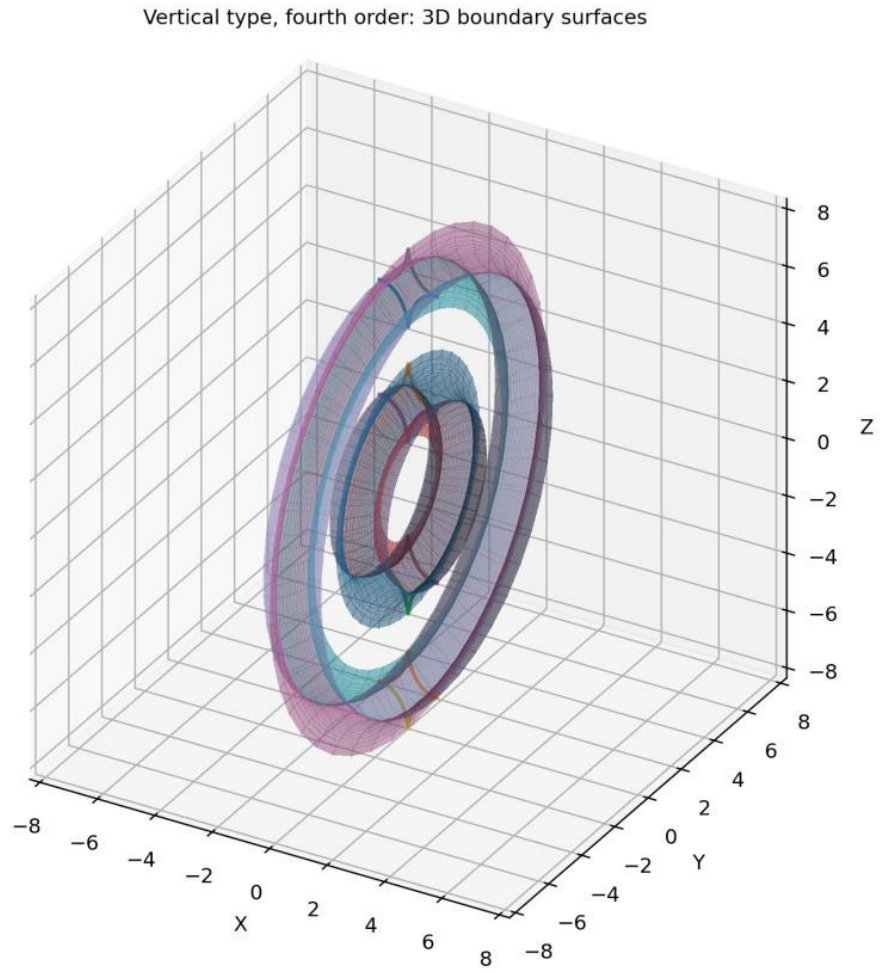

Рисунок 5.6. Вертикальный псевдоэллипсоид четвёртого порядка: трёхмерная поверхность. Показаны внешние и внутренние граничные поверхности; выделенное меридиональное сечение сохранено для контроля внутренней структуры.

Сравнение обоих примеров подтверждает: рекурсивное ядро общее, но исходная эллиптическая образующая остаётся существенной. Параметр K не просто изменяет пропорции изображения; он влияет на исходное распределение радиальной толщины d(x) и, следовательно, на местоположение кольцевых зон, контактов и объединений.

5.4. Лемма о появлении двух зон после Merge

Лемма 5.1. Пусть после третьего порядка при фиксированном x задан ненулевой интервал $I_3(x) = [p, q]$, где $0 < p < q$. Пусть четвёртый порядок строится оператором C_R_2. Если разностный и суммарный образы не пересекаются и не касаются, после Merge сохраняются две различные радиальные зоны.

Доказательство. Для [p, q] оператор создаёт разностный образ $[\max(R_2 - q, 0), \max(R_2 - p, 0)]$ и суммарный образ $[R_2 + p, R_2 + q]$. Если отсечение на оси не нарушает порядок границ и $p > 0$, правая граница разностного образа равна $R_2 - p$, а левая граница суммарного — $R_2 + p$. Между ними сохраняется положительный промежуток шириной $2p$. Поскольку Merge объединяет только пересекающиеся или соприкасающиеся интервалы, эти два образа не могут превратиться в один интервал. Следовательно, в $I_4(x)$ остаются две радиальные зоны.

При $p = 0$ разностный и суммарный образы касаются на уровне R_2 и Merge объединяет их в одну зону. При активном отсечении на нуле часть разностного образа может вырождаться или прижиматься к оси. Поэтому лемма не утверждает наличия двух зон в каждой точке x. Она

устанавливает точные условия, при которых впервые появляется двухкомпонентное радиальное сечение:

$C_R_2(I_3) = [\max(R_2 - q, 0), \max(R_2 - p, 0)] \cup [R_2 + p, R_2 + q]$;

$\text{gap} = (R_2 + p) - (R_2 - p) = 2p$.

Лемма показывает, почему четвёртый порядок становится первым уровнем настоящей многозонной структуры. В третьем порядке интервалы обычно касаются на уровне R_1. Если результат третьего шага отделён от оси, то $p > 0$, а новое отражение относительно R_2 формирует две несоприкасающиеся радиальные области. Отсюда возникают внутренние тороидальные границы и необходимость тщательной двумерной и трёхмерной визуализации.

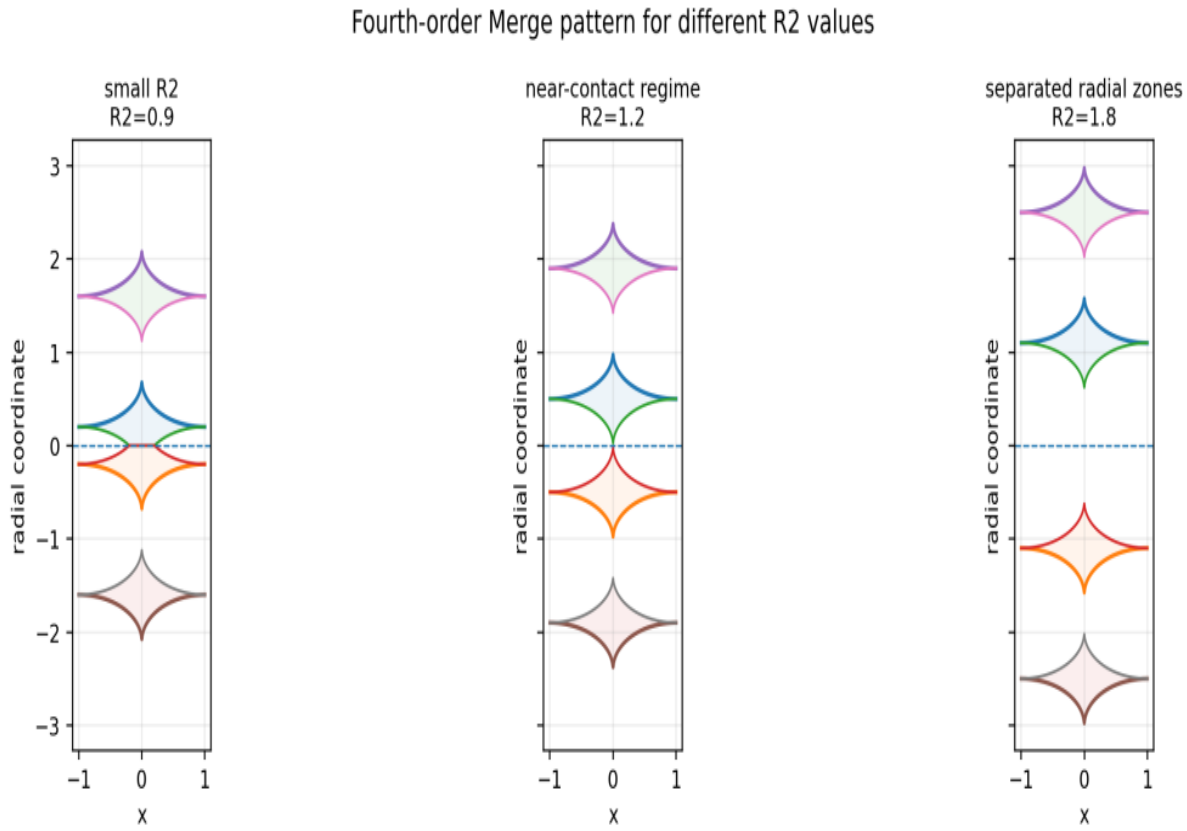

Рисунок 5.7. Изменение характера Merge четвёртого порядка при разных R_2. Для одних параметров зоны сближаются или соприкасаются, для других между радиальными компонентами образуется явно выраженная внутренняя пустота.

Научное содержание леммы выходит за рамки частного факта. Она фиксирует главный переход от третьего порядка к четвёртому: сложность уже нельзя определять числом формальных ветвей. Необходимо анализировать реальные интервалы после Merge и алгоритмически проверять топологию внутреннего объёма, а не выводить её из визуального вида формул ветвей.

5.5. Научная интерпретация четвёртого порядка как первой многозонной псевдоэллипсоидной области

Четвёртый порядок вводит принципиально новую ситуацию: внутренний объём может состоять из нескольких радиальных слоёв, разделённых пустыми промежутками. В меридиональном сечении возникает система вложенных областей; после вращения она образует внешние и внутренние поверхности. Поэтому псевдоэллипсоид четвёртого порядка

нельзя трактовать как одну гладкую эллипсоидальную оболочку. Это рекурсивно построенная область с эллиптической исходной геометрией, не сводимая к классическому эллипсоиду.

На данном уровне впервые проявляется различие между простым утолщением и подлинной внутренней архитектурой. Если бы R_2 лишь расширял третий порядок, усложнение было бы количественным. Благодаря разностно-суммарному действию C_R_2 оно становится качественным: различные радиальные зоны могут сосуществовать без объединения.

Наличие нескольких радиальных компонент потенциально существенно для будущих краевых задач: разные внутренние и внешние поверхности могут нести различные граничные условия, формировать дополнительные пути отражения или области связи. Но ни один из этих эффектов на данном этапе не доказан. Глава устанавливает геометрическое условие их возможного исследования.

При этом четыре уровня описания должны сохраняться раздельно: исходная эллиптическая геометрия определяет $d(x)$; дерево ветвей хранит историю формальных преобразований; интервальный язык задаёт допустимые радиальные зоны; объёмный язык определяет реальную область Ω_4. Если оставить только ветви, теория становится неполной; если оставить лишь трёхмерную картинку, теряется строгое объяснение происхождения внутренней структуры.

5.6. Ограничения и переход к последующим уровням

Здесь сознательно не рассматриваются осевые рядные системы и произвольный порядок n. Четвёртый порядок следует изучить самостоятельно, поскольку именно здесь рекурсия перестаёт быть почти одномерной и формирует внутреннюю многослойность. Преждевременное добавление рядного размещения или новых параметров R_3, R_4, … смешало бы разные механизмы.

Следующая задача — обобщить рекурсию на произвольный порядок n, сохранив установленное правило: каждый новый R_k действует на уже построенное множество интервалов и не возвращается к исходной $d(x)$. Поэтому четвёртый порядок — не просто иллюстрация, а контрольный узел всей рекурсивной теории.

5.7. Выводы

Построен и научно интерпретирован псевдоэллипсоид четвёртого порядка как второй рекурсивный шаг. Показано, что впервые возникает структурно сложный уровень: оператор со смещением R_2 действует на весь результат третьего порядка, а не на исходную эллиптическую образующую.

Формальный каркас $R_2 \pm (R_1 \pm d(x))$ имеет четыре ветви, но физически значимая область определяется интервалами после Merge, а не их количеством. Корректное построение четвёртого порядка требует последовательного перехода от ветвей к интервалам и внутреннему объёму.

Горизонтальный и вертикальный типы используют общий рекурсивный оператор, но различаются исходной функцией $d(x)$, задаваемой K. Поэтому формы двумерных сечений и трёхмерных поверхностей отличаются при одинаковой математической логике.

Лемма 5.1 объясняет возникновение двух раздельных радиальных зон при положительной нижней границе p и отсутствие их автоматического объединения. Четвёртый порядок является первым уровнем реальной многозонности и формирования внутренних тороидальных границ.

Геометрическое появление многослойной области не равнозначно доказательству какого-либо волнового эффекта. Полученная конструкция создаёт строгую основу для последующих вычислений, но не подменяет физическую верификацию.

6. Псевдоэллипсоиды высших порядков

6.1. Порядок как длина рекурсивной цепочки

В математической и вычислительной формулировке настоящей монографии второй порядок является начальным состоянием рекурсивной системы. При каждом осевом значении x он задан одним радиальным интервалом:

$I_2(x) = \{[0, d(x)]\}$.

Здесь d(x) — радиальная функция, построенная по активной эллиптической образующей. Она уже содержит сведения о параметрах a, K, h_1 и h, но ещё не содержит рекурсивных смещений. Поэтому второй порядок — не «нулевой рисунок», а исходный внутренний объём, из которого строятся все последующие порядки.

Каждый новый порядок добавляет ровно одно рекурсивное смещение. Пустой список смещений соответствует второму порядку, один параметр R_1 — третьему, два параметра R_1 и R_2 — четвёртому. В общем случае при конечном списке offsets = (R_1, R_2, …, R_{n-2}) порядок определяется соотношением:

n = len(offsets) + 2.

Эта простая формула дисциплинирует всю теорию. Порядок n не равен количеству видимых оболочек, числу компонент на рисунке или числу экземпляров осевого ряда. Он означает исключительно длину внутренней рекурсивной цепочки, приложенной к базовому интервалу второго порядка. Поэтому порядок нельзя смешивать ни с параметром K, определяющим тип исходной эллиптической образующей, ни с h_1 и h, относящимися к исходной геометрии, ни с будущим параметром рядного размещения m.

В научном отношении такое определение обеспечивает воспроизводимость высших порядков. Исследователь, получивший параметры a, K, h_1, h и список offsets, может восстановить точно тот же конечный порядок: процедура не предполагает ручного выбора ветвей или произвольного добавления геометрических элементов.

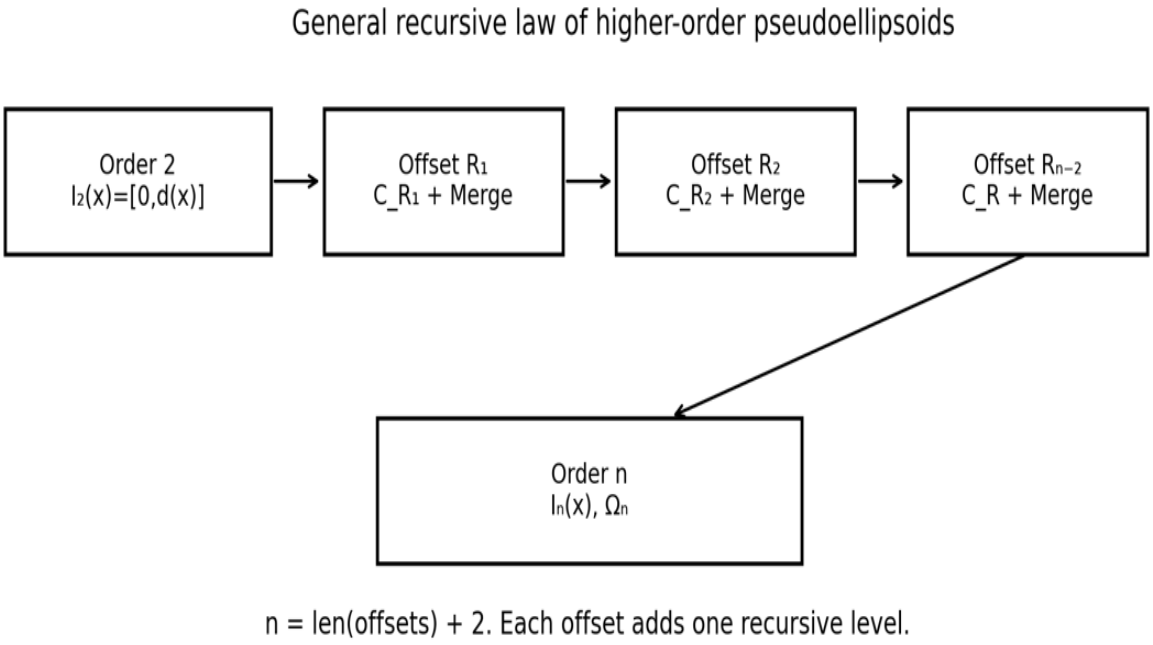

Рисунок 6.1. Общий рекурсивный закон построения псевдоэллипсоидов высших порядков: второй порядок задаёт начальный интервал, каждое смещение добавляет один рекурсивный уровень.

6.2. Рекурсивный закон для интервалов

Пусть на некотором шаге k уже построено конечное семейство радиальных интервалов. При фиксированном x каждый интервал записывается как [lo_j(x), hi_j(x)]. Следующее смещение R_k действует на весь интервал, а не на одну линию; именно это отличает объёмную теорию от записи только через ветви.

Каждый исходный интервал порождает две формальные интервальные ветви: разностную и суммарную:

[max(R_k − hi_j(x), 0), max(R_k − lo_j(x), 0)],

[R_k + lo_j(x), R_k + hi_j(x)].

Отсечение отрицательных радиусов нулём обязательно: радиальная координата физического объёма не может быть отрицательной. Поэтому max(…, 0) — не численная заплатка, а геометрическое условие допустимости внутренней области.

После применения правила ко всем интервалам формируется семейство удвоенного формального размера. Однако это ещё не окончательная геометрия. Формальные интервалы могут пересекаться, касаться или полностью перекрываться и тем самым задавать одни и те же точки пространства. Поэтому полный рекурсивный шаг записывается:

$I_{k+1}(x) = \mathrm{Merge}(\bigcup C_R_k(I_k(x)))$.

Оператор Merge не создаёт новых соединений, не закрывает пустые промежутки и не заменяет систему её внешней огибающей. Напротив, он удаляет лишь дублирование уже совпавших или пересёкшихся частей. Если между интервалами имеется положительный пустой промежуток, он остаётся пустым. При касании возникает одна замкнутая компонента; при пересечении интервалы объединяются в общий радиальный интервал.

Таким образом, закон высших порядков имеет две стороны: алгебраическую, поскольку число формальных ветвей удваивается на каждом шаге, и геометрическую, поскольку реальный внутренний объём возникает только после Merge. Потеря любой из них делает построение неполным. Одно формальное дерево даёт наглядную историю ветвлений, но не расчётную область. Одно Merge без сохранения истории скрывает происхождение зон. Поэтому обе структуры необходимо рассматривать совместно.

6.3. Формальное число ветвей и реальное число компонент

Формальное количество ветвей n-го порядка определяется формулой:

$N_n = 2^{n-2}$.

Она характеризует конструктивную сложность порядка: второй порядок имеет одну формальную ветвь, третий — две, четвёртый — четыре, пятый — восемь. Однако N_n не является ни числом физических полостей, ни количеством видимых радиальных зон, ни числом поверхностей, которые обязательно сохраняются после Merge.

Реальное число компонент зависит от d(x), K, h_1, h и всей последовательности смещений. В одной осевой точке формальные ветви могут быть разнесены, в другой — пересекаться, в третьей — объединяться в одну радиальную область. Следовательно, компонентная структура зависит не только от n, но и от геометрических параметров. В этом и состоит содержательная сложность высших порядков: она не совпадает механически с числом ветвей, а определяется взаимодействием закона рекурсии с конкретной эллиптической базой.

Для будущих волновых постановок различие принципиально. Волновое поле распространяется не по формальному дереву, а в реальном внутреннем объёме. Если две формальные ветви после Merge образуют одну компоненту, поле имеет дело с одной связанной радиальной

областью, а не с двумя независимыми «резонаторами». Поэтому количество и взаимное расположение действительных компонент необходимо вычислять, а не выводить из N_n.

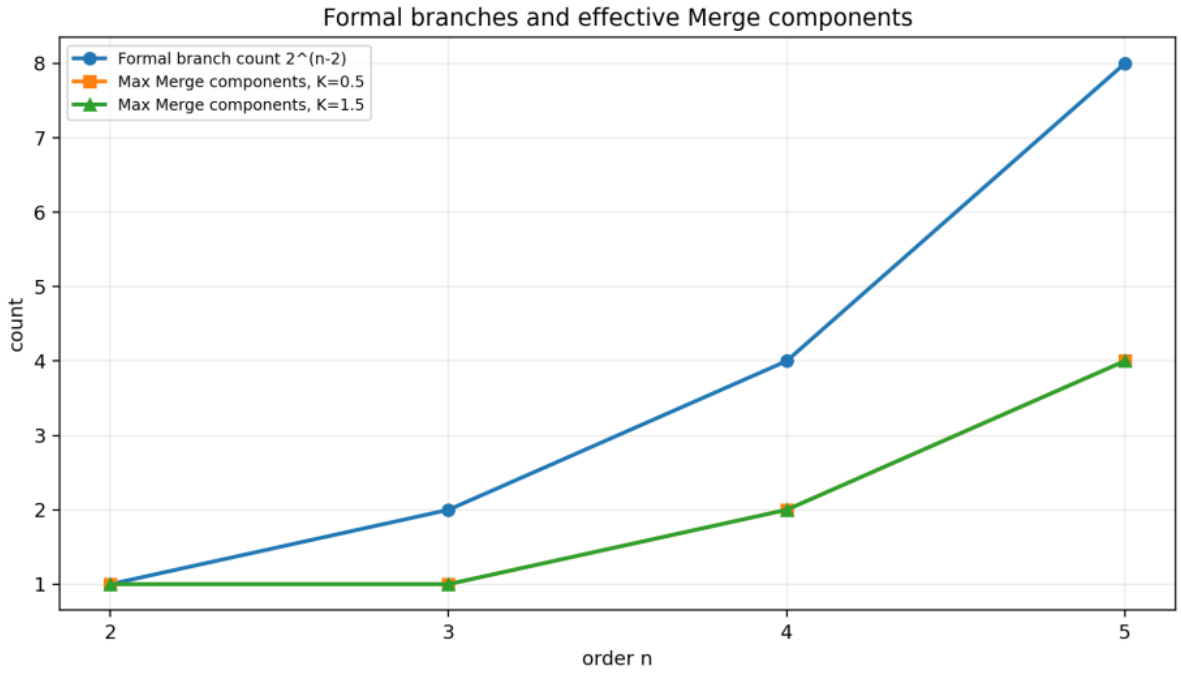

Рисунок 6.2. Сопоставление формального числа ветвей N_n и максимального числа реальных компонент Merge для горизонтального и вертикального типов при демонстрационных смещениях.

6.4. Оценка радиальной ограниченности

Для любого конечного порядка радиальные интервалы остаются ограниченными. Это важное математическое свойство, поскольку без него объект нельзя было бы использовать как конечную расчётную область. Пусть $M_2 = \max_x d(x)$. После первого смещения верхняя граница любого формального интервала не превышает $M_2 + R_1$; после второго — $M_2 + R_1 + R_2$. Продолжение этого рассуждения по индукции даёт оценку:

$M_n \le M_2 + R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-2}$.

Это безопасная верхняя оценка, а не обязательно точное значение максимального радиуса. Некоторые ветви отсекутся нулём, другие объединятся после Merge, а третьи вообще не достигнут предельного уровня. Однако для доказательства конечности области оценки достаточно.

Теорема 6.1. При любых конечных параметрах a > 0, K > 0, h_1, h и конечном списке смещений все формальные интервалы порядка n удовлетворяют:

$0 \le lo(x) \le hi(x) \le M_2 + \Sigma R_k$.

Доказательство. Для второго порядка утверждение верно по определению: $0 \le d(x) \le M_2$. Предположим, что на некотором шаге верхняя граница каждого интервала не превышает M. У разностной ветви верхняя граница не превосходит R_k, поскольку $\max(R_k - lo, 0) \le R_k$. У суммарной ветви верхняя граница не превосходит R_k + M. Поэтому после следующего шага верхняя граница не превышает M + R_k. Индукция по числу смещений доказывает оценку.

Следствие: любой конечный псевдоэллипсоид высшего порядка задаёт конечный внутренний объём вращения. Можно строить двумерные сечения, трёхмерные граничные поверхности, вычислять площади и переносить область в последующие численные модели без риска неограниченного радиального роста.

Теорема 6.2. Компактность Ω_n. При $a > 0$, $K > 0$, конечных h_1, h и конечном списке рекурсивных смещений область $\Omega_n \subset \mathbb{R}^3$ компактна в точной модели замкнутых интервалов.

Доказательство. Осевой носитель исходного построения ограничен, так как образован конечными четвертьэллиптическими дугами и конечными сдвигами. Теорема 6.1 даёт конечную верхнюю радиальную границу, поэтому Ω_n ограничена в $\mathbb{R}^3$. При каждом фиксированном x интервальное состояние $I_n(x)$ является конечным объединением замкнутых интервалов. Границы компонент получаются из непрерывных исходных функций конечным числом арифметических операций, отсечений нулём, сортировок и точных Merge. В точках перехода, где компоненты соприкасаются или меняется их каноническое представление, контактные страты включены, поскольку модель интервалов замкнута. Поэтому график допустимых радиусов замкнут как конечное стратифицированное объединение. Вращение этого замкнутого ограниченного множества вокруг оси x создаёт замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^3$. По теореме Гейне — Бореля Ω_n компактна. Теорема доказана.

6.5. Пятый порядок как иллюстрация общего закона

Чтобы показать общий закон без чрезмерного усложнения рисунков, выбран демонстрационный пятый порядок. Он получается после трёх рекурсивных смещений и имеет восемь формальных ветвей. Это уже достаточно сложная структура, чтобы наблюдать различие между формальным деревом и действительным объёмом после Merge, но ещё достаточно наглядная для научной иллюстрации.

Для горизонтального типа рассмотрены $K = 0{,}5$, $h_1 = 0$, $h = 0$, offsets = (0,7; 1,8; 3,4), для вертикального — $K = 1{,}5$, $h_1 = 0$, $h = 0$, offsets = (2,0; 5,0; 9,0). Эти наборы не претендуют на физическую оптимальность; они выбраны для демонстрации увеличения порядка без специального подбора совпадений ветвей.

Пятый порядок важен как переход от частных глав к общей теории. Третий показывает первое смещение, четвёртый — первое подлинное ветвление второго уровня, а пятый подтверждает, что дальнейшее увеличение n не требует нового принципа: многократно применяются те же C_R и Merge. Поэтому после пятого порядка можно перейти к произвольному конечному n.

Рисунки 6.3 и 6.4 показывают, что рост порядка не сводится к добавлению внешних оболочек. Внутри меняется расположение радиальных зон: часть формальных ветвей становится внутренними границами, часть сливается, часть сохраняет визуальную обособленность. Именно такую систему следует называть псевдоэллипсоидом высшего порядка.

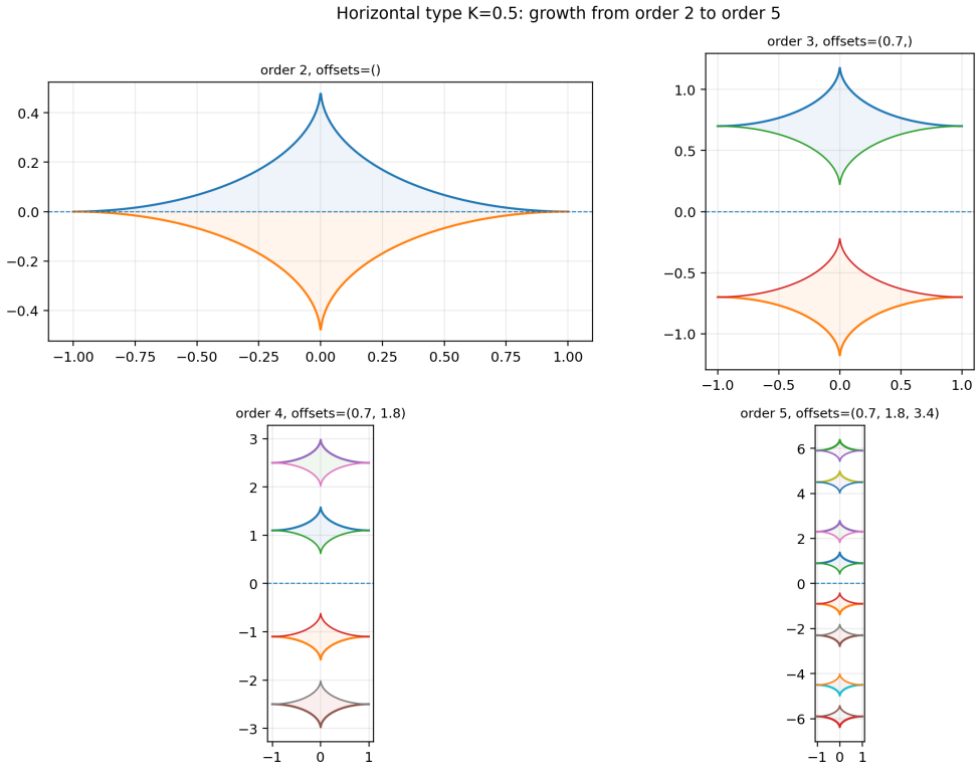

Рисунок 6.3. Горизонтальный тип K = 0,5: рост от второго до пятого порядка при offsets = (0,7; 1,8; 3,4). Показаны реальные границы после Merge.

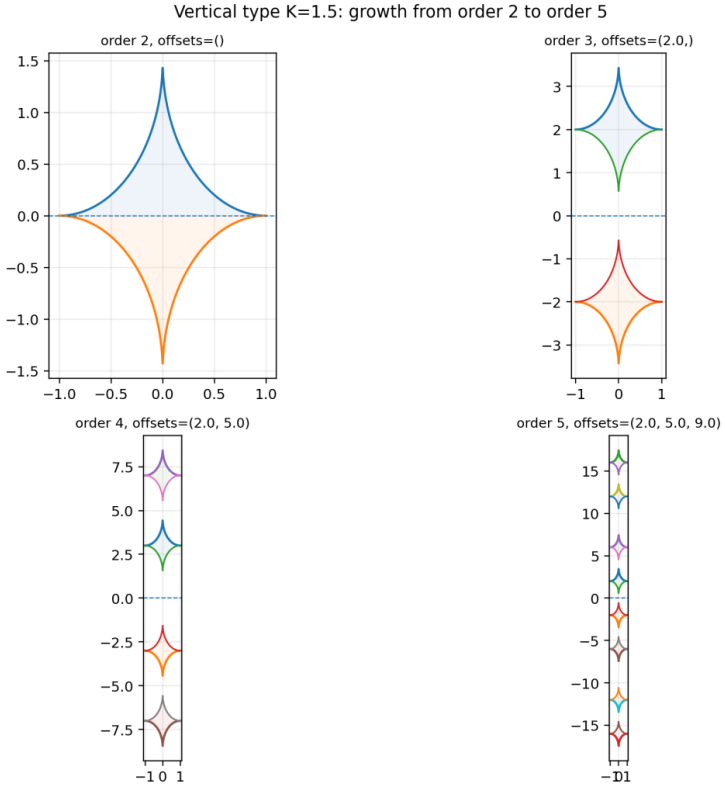

Рисунок 6.4. Вертикальный тип K = 1,5: рост от второго до пятого порядка при offsets = (2,0; 5,0; 9,0). Рекурсивный закон одинаков, но исходная эллиптическая геометрия изменяет масштабы и морфологию.

6.6. Горизонтальный тип пятого порядка

Горизонтальный псевдоэллипсоид пятого порядка наследует ориентацию фокальной структуры исходной эллиптической образующей при K < 1. Его начальная форма вытянута вдоль оси, а функция d(x) имеет относительно малый базовый радиальный масштаб. Три рекурсивных смещения не устраняют это вытяжение, а превращают его в исходный уровень более сложной радиальной архитектуры.

На двумерном сечении видны реальные зоны после Merge. Если на плоском рисунке отмечены фокусы, они принадлежат исходным порождающим эллиптическим границам. Merge не создаёт новых эллиптических фокусов, а только объединяет радиальные интервалы, полученные от существовавших ветвей. Следовательно, фокальные обозначения следует понимать как геометрическую память исходной образующей, а не доказательство будущей волновой фокусировки.

Горизонтальный тип удобен для демонстрации того, как сравнительно компактная поперечная основа при умеренных смещениях создаёт многослойный внутренний объём. Увеличение n добавляет не произвольные детали, а структурированные радиальные зоны с определённым происхождением в рекурсивной цепочке.

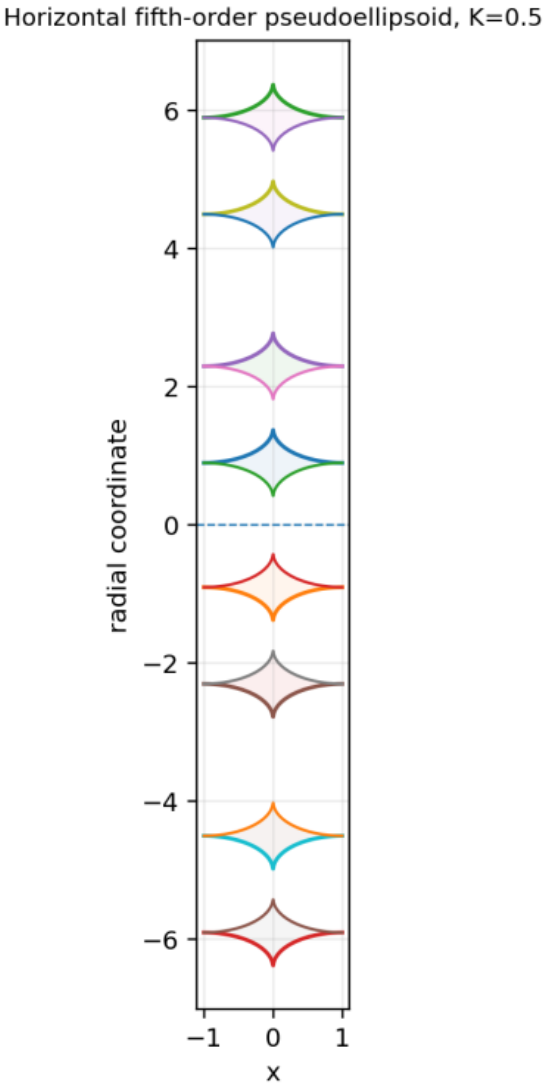

Рисунок 6.5. Горизонтальный тип пятого порядка, K = 0,5, offsets = (0,7; 1,8; 3,4): двумерное сечение. Все видимые области получены интервальной рекурсией и Merge.

Трёхмерное изображение показывает границы полного объёма вращения. Выделенное меридиональное сечение используется для проверки сохранения внутренних зон при переходе от двумерных интервалов к пространственному представлению. При этом трёхмерный рисунок не является готовой конечно-элементной сеткой. Это геометрическая визуализация граничной поверхности, предназначенная для последующей физической постановки.

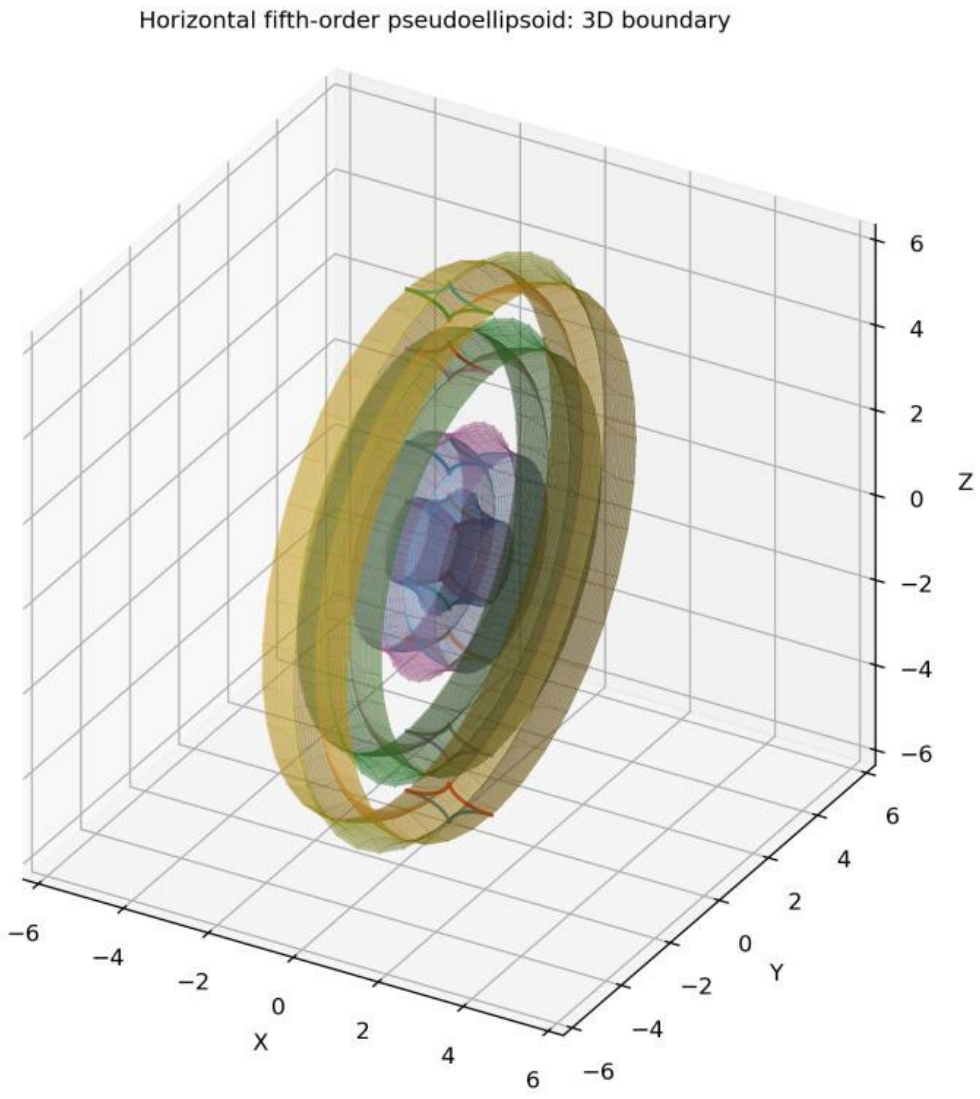

Рисунок 6.6. Горизонтальный тип пятого порядка: трёхмерная граница полного внутреннего объёма с наложенным меридиональным сечением для контроля структуры.

6.7. Вертикальный тип пятого порядка

Вертикальный псевдоэллипсоид пятого порядка строится по тому же рекурсивному закону, но на иной исходной эллиптической геометрии. При K > 1 четверти исходных эллипсов вытянуты в поперечном направлении. Поэтому уже второй порядок имеет больший радиальный масштаб, а рекурсивные смещения следует выбирать в ином численном диапазоне, чтобы рисунок оставался читаемым и структура не выглядела искусственно сжатой.

Именно вертикальный тип подчёркивает, что K не является рекурсивным смещением: параметр не повышает порядок и не изменяет C_R. Он изменяет исходную d(x), то есть объект, к которому применяется цепочка рекурсии. Одна и та же последовательность операций над разными базовыми функциями порождает разные морфологии. Это не дефект визуализации, а фундаментальное свойство теории.

На двумерном сечении вертикального пятого порядка поперечное разделение радиальных зон обычно выражено отчётливее. В зависимости от смещений Merge может сохранить несколько независимых компонент либо объединить их в более крупные интервальные области. Поэтому вертикальный тип полезен как контрольный контраст горизонтальному: он показывает, что закон рекурсии универсален внутри теории псевдоэллипсоидов, тогда как результат чувствителен к типу исходной образующей.

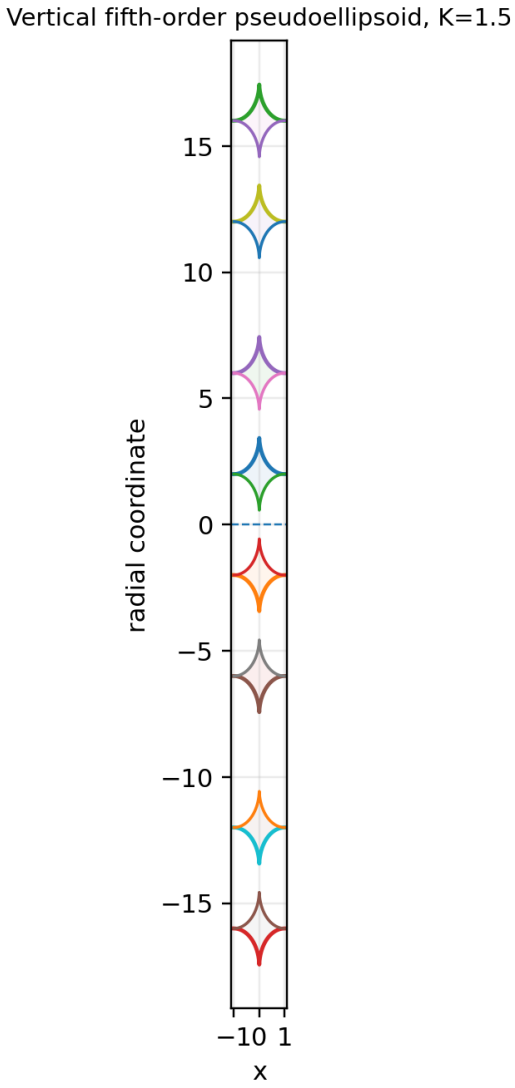

Рисунок 6.7. Вертикальный тип пятого порядка, K = 1,5, offsets = (2,0; 5,0; 9,0): двумерное сечение. Радиальный масштаб больше, чем у горизонтального типа, при той же логике рекурсии.

Трёхмерное представление показывает пространственную форму полного объёма. Как и в горизонтальном случае, поверхность не является набором независимых оболочек: это граница объединённой области после Merge. Если внутренние компоненты действительно существуют как интервальные зоны, они должны сохраняться при двумерном и трёхмерном контроле.

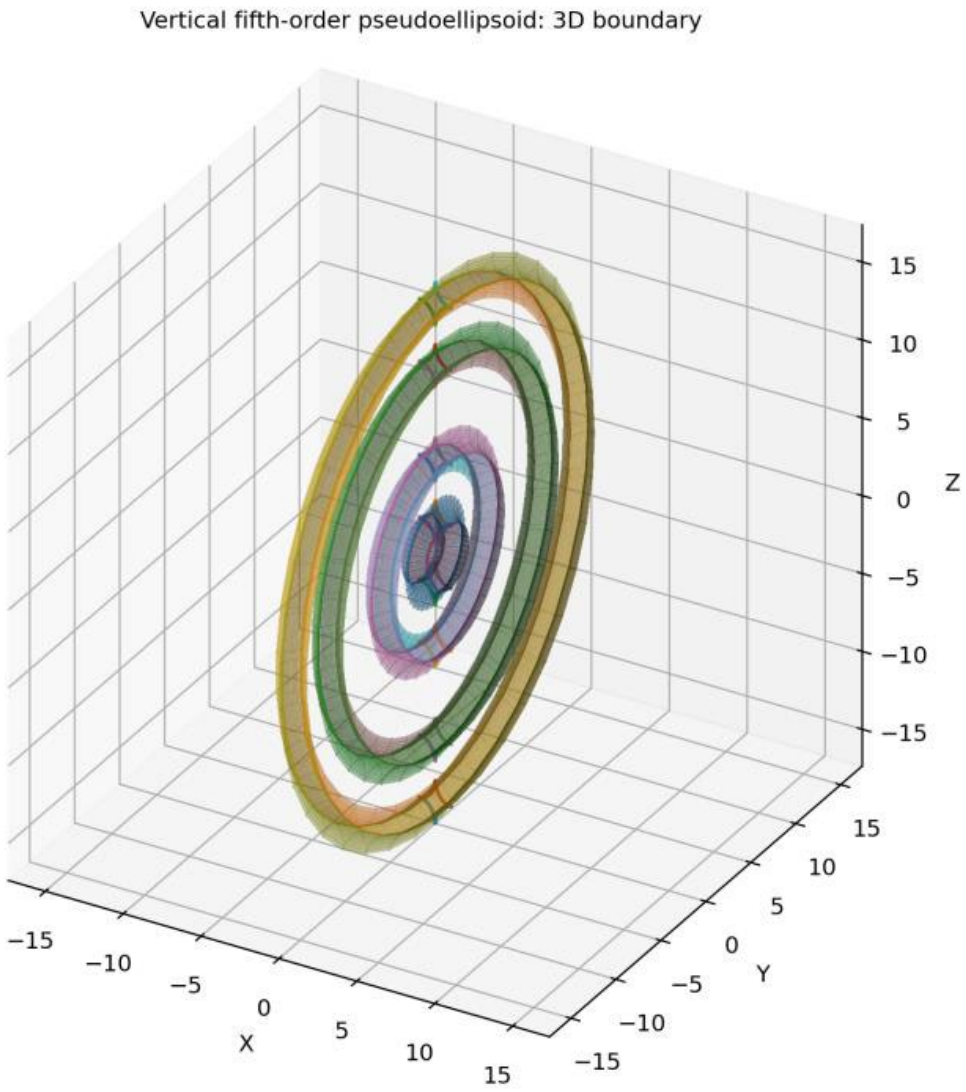

Рисунок 6.8. Вертикальный тип пятого порядка: трёхмерная граница полного внутреннего объёма. Выделенное меридиональное сечение показывает реальные внутренние зоны после Merge.

6.8. Выводы

Сформулирован общий закон построения псевдоэллипсоидов высших порядков. Второй порядок задаёт исходный внутренний объём, а каждый следующий получается добавлением одного рекурсивного смещения. Поэтому n = len(offsets) + 2.

Главный математический объект высшего порядка — не отдельная ветвь и не внешняя оболочка, а семейство радиальных интервалов $I_n(x)$ после Merge. Формальные ветви содержат историю построения и имеют количество $N_n = 2^{n-2}$, но реальная компонентная структура определяется пересечениями, касаниями и перекрытиями интервалов.

Доказана радиальная ограниченность любого конечного порядка. Оценка $M_n \le M_2 + \Sigma R_k$ обеспечивает конечность области и пригодность к последующим численным задачам. Пятый порядок использован как иллюстрация: его восемь формальных ветвей после Merge обычно дают более компактную реальную структуру. Горизонтальный и вертикальный типы подтверждают общность рекурсивного оператора и зависимость морфологии от исходной эллиптической функции d(x), определяемой K.

7. Операция Merge: формальная спецификация и геометрический смысл

В этой главе даётся формальное определение операции Merge. Она представляет собой этап канонизации, переводящий конечное семейство радиальных интервалов, полученных рекурсией, в эффективное интервальное состояние. Merge не добавляет геометрию, не закрывает положительные зазоры и не сохраняет происхождение формальных ветвей, если соответствующая история отдельно не хранится в дереве B_n.

7.1. Пространство интервальных состояний

Merge — центральная канонизирующая операция интервально-рекурсивной теории. Её назначение состоит не в порождении новых ветвей, а в преобразовании формального семейства радиальных интервалов к единственному стандартному представлению того же радиального множества.

Обозначим через $I([0,\infty))$ класс конечных объединений замкнутых ограниченных интервалов на радиальной полуоси. Канонический элемент этого пространства записывается:

$$I = \bigcup_{j=1}^{q} [\alpha_j, \beta_j], \quad 0 \le \alpha_j \le \beta_j < \infty, \quad \beta_j < \alpha_{j+1}.$$

Именно такими объектами являются интервальные состояния $I_n(x)$ при фиксированном x. Замкнутость интервалов — часть точной модели. Если две компоненты соприкасаются в одной радиальной точке, эта точка принадлежит обеим и не образует отверстия. Условие особенно существенно для первого перехода от $[0, d(x)]$: при использовании открытых интервалов либо потере точки контакта на численной сетке возник бы искусственный зазор нулевой меры, отсутствующий в точной теории.

7.2. Формальное дерево B_n как носитель истории ветвей

Дерево B_n вводится для хранения происхождения ветвей до канонизации. Оно не является ни эффективной областью, ни результатом Merge. Его задача — показать, какие формальные радиальные выражения возникли при последовательном применении смещений.

Определение 7.1. Для второго порядка дерево содержит единственный корень:

$$B_2 = \{(\emptyset, d)\}.$$

Если на шаге k известна формальная ветвь с меткой σ и радиальной функцией $r_\sigma(x)$, то при смещении R_{k-1} возникают две дочерние ветви:

$$r_{\sigma,-}(x) = R_{k-1} - r_\sigma(x);$$

$$r_{\sigma,+}(x) = R_{k-1} + r_\sigma(x).$$

Листья B_n имеют метки $\sigma \in \{-,+\}^{n-2}$. Каждая формальная ветвь может быть представлена линейной комбинацией исходного профиля и рекурсивных смещений с коэффициентами ± 1:

$$r_\sigma(x) = \varepsilon_0(\sigma) d(x) + \sum_{k=1}^{n-2} \varepsilon_k(\sigma) R_k, \quad \varepsilon_k(\sigma) \in \{-1,+1\}.$$

Запись фиксирует происхождение ветви, но не определяет эффективную область. Некоторые формальные ветви могут оказаться внутри объединённого объёма, совпасть с другими либо перестать быть частью его эффективной границы.

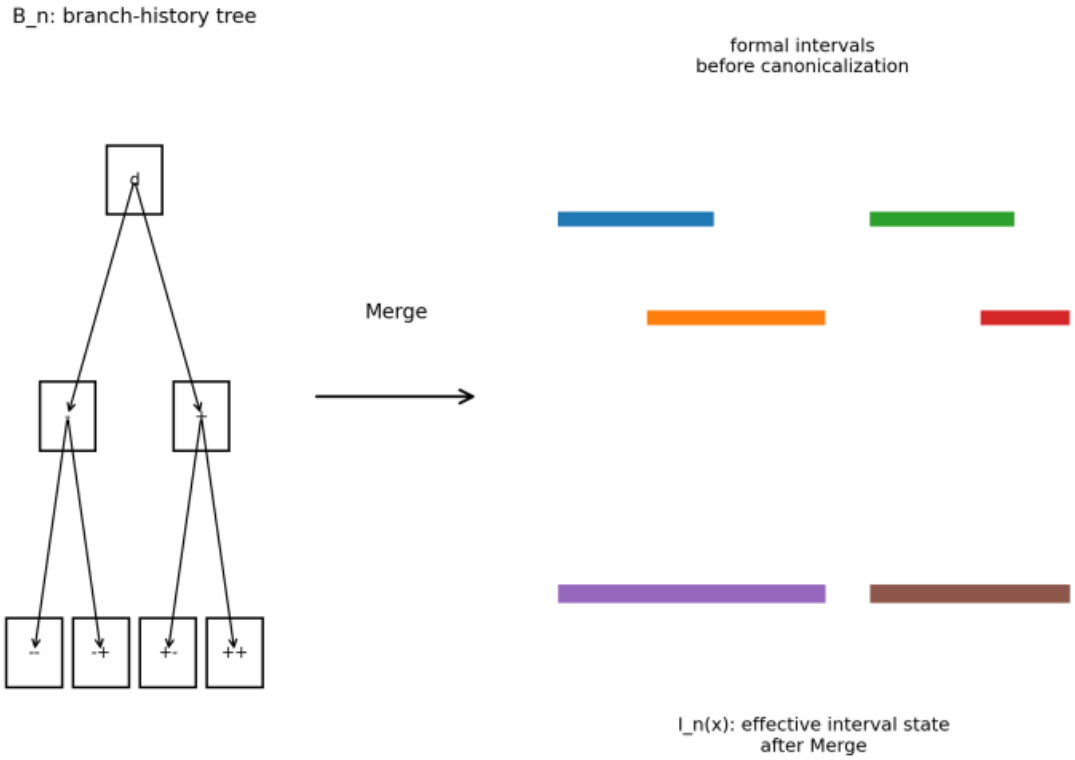

Рисунок 7.1. Формальное дерево B_n хранит историю порождения ветвей. Операция Merge преобразует её результат в эффективное интервальное состояние $I_n(x)$, но сама не сохраняет полную историю.

7.3. Рекурсивный оператор C_R на уровне интервалов

Формальное дерево работает с ветвями; геометрически значимый объект — интервальное состояние. Поэтому переход от порядка k к k+1 осуществляется над каждым замкнутым радиальным интервалом текущего состояния:

C_R([α, β]) = [max(R − β, 0), max(R − α, 0)] ∪ [R + α, R + β].

Левая часть — разностная зона, правая — суммарная. Отсечение max(·, 0) выражает запрет отрицательных радиусов. После применения C_R ко всем интервалам выполняется Merge:

I_{k+1}(x) = Merge(∪_{[α,β]∈I_k(x)} C_{R_{k−1}}([α,β])).

Это основной интервальный закон построения. В отличие от формулы ветвей, он оперирует радиальными множествами и автоматически учитывает заполненные внутренние зоны, осевые контакты, кольцевые зазоры и объединения.

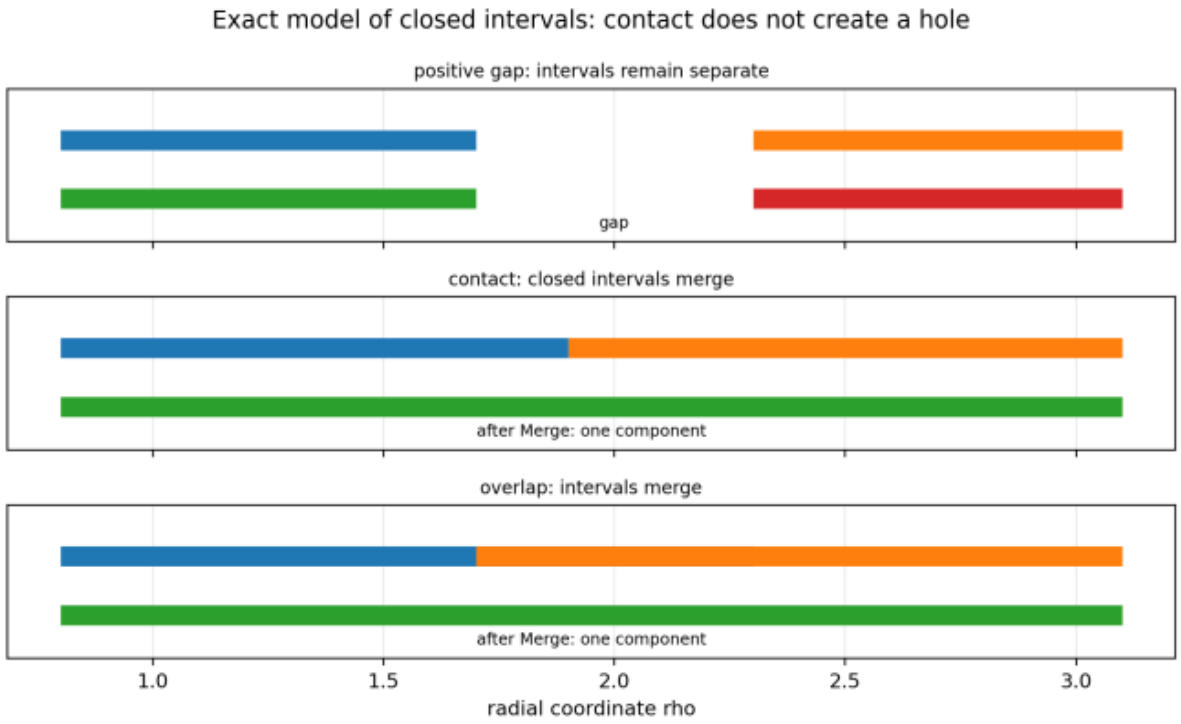

Рисунок 7.2. В точной модели замкнутых интервалов контакт в точке R приводит к их объединению и не образует отдельного топологического отверстия.

7.4. Определение точной операции Merge

Определение 7.2. Пусть S — конечное семейство замкнутых ограниченных интервалов на [0,∞). Merge(S) — каноническое семейство замкнутых интервалов, представляющее то же множество ⋃S, в котором любые два различных интервала отделены строго положительным зазором.

Операционно интервалы сортируются по левым концам, после чего все пересекающиеся или соприкасающиеся пары объединяются до получения попарно разделённых компонент. В точной теории равенство β_j = α_{j+1} является основанием для объединения.

Вырожденные интервалы [α, α] допускаются как топологические предельные состояния. В расчётах площадей и объёмов их вклад равен нулю, но при анализе границ и стратификации их нельзя произвольно удалять, если явно не введена численная фильтрация.

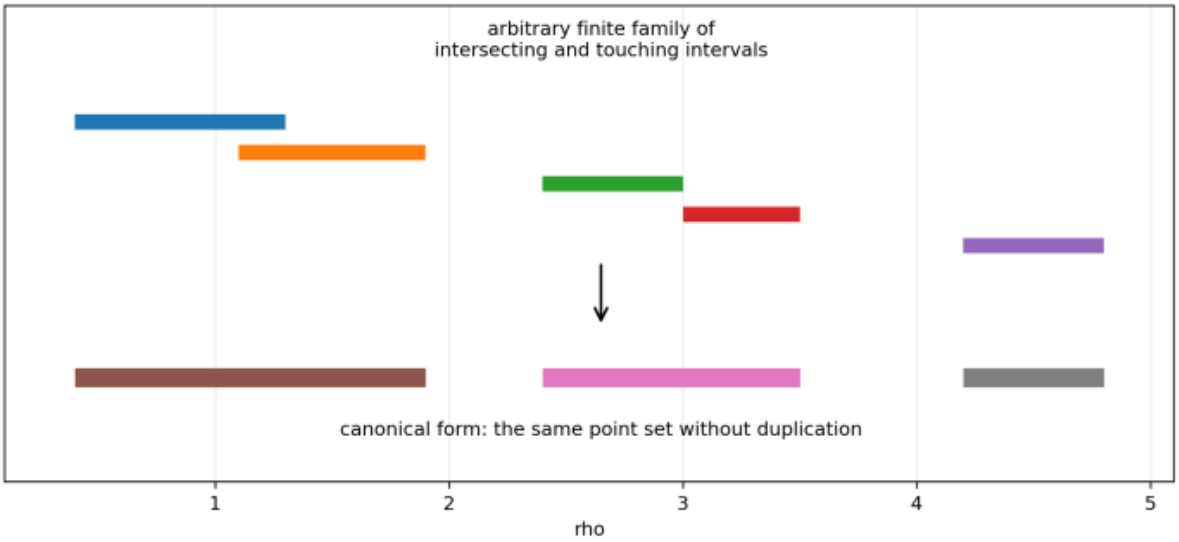

Рисунок 7.3. Merge преобразует произвольное конечное семейство пересекающихся и соприкасающихся замкнутых интервалов в каноническую форму того же множества.

7.5. Теорема существования и единственности канонической формы

Теорема 7.1. Для любого конечного семейства S замкнутых ограниченных интервалов на [0,∞) операция Merge(S) существует как каноническое представление ⋃S в виде конечного объединения попарно разделённых замкнутых интервалов.

Доказательство. Конечное объединение замкнутых ограниченных интервалов является компактным подмножеством [0,∞) и имеет конечное число связных компонент. Каждая связная компонента такого множества представляет собой замкнутый интервал. Компоненты попарно не пересекаются и разделены положительными зазорами. Следовательно, семейство связных компонент даёт искомое каноническое представление. Алгоритм сортировки и последовательного объединения реализует именно это разложение. Теорема доказана.

Следствие 7.2. Единственность канонического представления. Для любого конечного объединения U замкнутых ограниченных интервалов в [0,∞) представление Merge(U) единственно с точностью до порядка интервалов.

Доказательство. Связные компоненты U определяются самим точечным множеством, а не способом его записи через исходные интервалы. Два канонических представления одного объединения обязаны состоять из одних и тех же связных компонент. Если сортировать их по левым концам, порядок также фиксируется. Следствие доказано.

7.6. Алгебраические свойства Merge

Утверждение 7.3. Merge обладает идемпотентностью, монотонностью по включению и совместимостью с объединением интервальных семейств:

$\mathrm{Merge}(\mathrm{Merge}(S)) = \mathrm{Merge}(S)$;

$\bigcup S_1 \subset \bigcup S_2 \Rightarrow \bigcup \mathrm{Merge}(S_1) \subset \bigcup \mathrm{Merge}(S_2)$;

$\mathrm{Merge}(S \cup T) = \mathrm{Merge}(\mathrm{Merge}(S) \cup \mathrm{Merge}(T))$.

Доказательство. Все три свойства непосредственно вытекают из определения. Merge не изменяет точечное множество, а заменяет только его представление. Повторная канонизация уже канонической формы ничего не меняет. Включение объединений интервалов сохраняется при переходе к их связным компонентам. Наконец, объединение исходных семейств или их канонических форм даёт одно и то же множество, а его каноническое представление по следствию 7.2 единственно. Утверждение доказано.

Классификация этого результата как утверждения, а не самостоятельной теоремы намеренна. Это не новый глубокий результат, а алгебраическое следствие ранее введённой операции; такая классификация обеспечивает корректную структуру доказательств.

7.7. Точная Merge и численная ε-Merge

Точная Merge объединяет только пересекающиеся или соприкасающиеся интервалы. В численной реализации иногда используют ε-Merge, объединяющую также интервалы, разделённые зазором не больше заданного допуска ε.

Определение 7.3. При ε ≥ 0 операция Merge_ε объединяет интервалы [α,β] и [γ,δ] при γ − β ≤ ε. При ε = 0 она совпадает с точной Merge для замкнутых интервалов.

Если наименьший положительный зазор между компонентами точной канонической формы превышает ε, структура компонент не меняется. Если ε достигает или превышает один из зазоров, количество компонент может уменьшиться. Поэтому вычисленное N_merge(x) вблизи малых зазоров может зависеть от допуска ε.

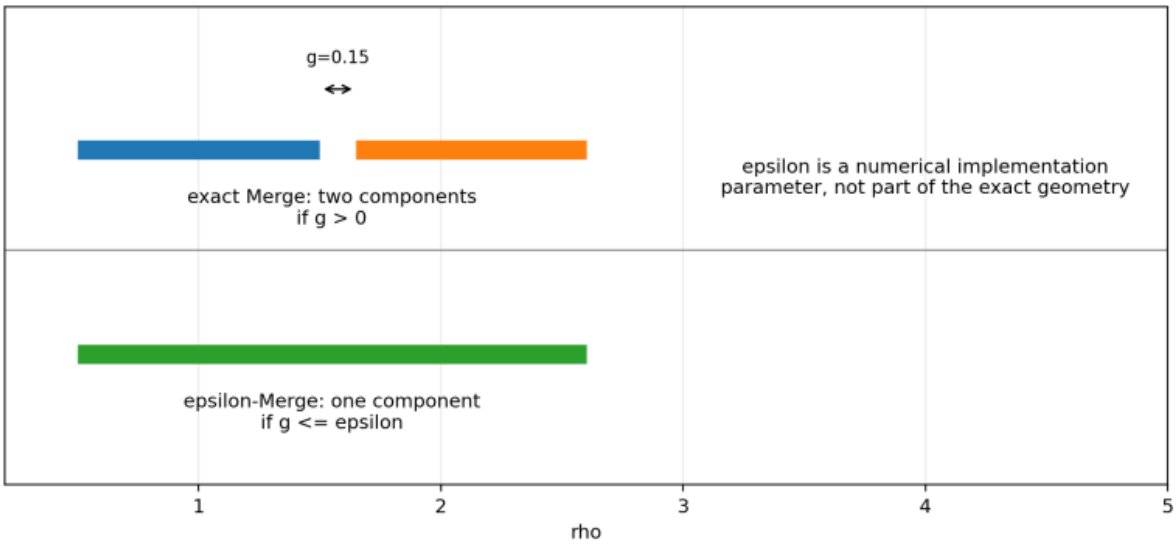

Рисунок 7.4. Точная Merge и ε-Merge относятся к разным уровням: первая определяет математическую геометрию, вторая является вычислительным приближением, способным изменить число компонент у малых зазоров.

7.8. Критические зазоры и бифуркации компонентной структуры

Различение точной и численной Merge требует осторожного употребления понятия бифуркации. В точной модели число компонент N_merge(x) может измениться там, где соседние интервалы касаются, то есть положительный зазор между ними обращается в нуль:

$g_j(x) = \alpha_{j+1}(x) - \beta_j(x)$.

При $g_j(x) > 0$ компоненты разделены, при $g_j(x) = 0$ касаются и должны объединяться, при $g_j(x) < 0$ пересекаются. Таким образом, критические точки определяются уравнениями $g_j(x) = 0$ для соседних граничных функций.

При любом конечном n все граничные функции получаются из исходного профиля и смещений конечным набором операций. Поэтому критические точки компонентной структуры задаются конечной системой равенств между граничными функциями и являются нормальной частью стратифицированной геометрии, а не ошибкой построения.

7.9. Геометрический смысл Merge

Геометрически Merge означает переход от формального порождения радиальных зон к реальному множеству допустимых радиусов. Если две формальные зоны перекрываются, это не два разных объёма в одной точке пространства, а одна область, которую нужно описывать без дублирования. Если зоны касаются в замкнутой модели, положительного промежутка между ними нет, следовательно, они образуют одну связную компоненту сечения. Если положительный зазор существует, Merge не вправе соединять зоны. Это запрещает ручное дорисовывание искусственных линий, стенок или перемычек.

Следовательно, Merge — операция устранения дублирования, а не добавления геометрии. Она учитывает только те связи, которые уже существуют как пересечения либо касания интервалов.

7.10. Связь с известной вычислительной геометрией

Как одномерная операция над интервалами Merge не является новым математическим объектом. Объединение интервалов, канонизация конечных множеств и сортировка компонент — стандартные методы вычислительной геометрии и конструктивных построений твёрдых тел. Конечнорекурсивный подход методологически согласуется с известными рассмотрениями рекурсивных и самоподобных конструкций [9], [10], хотя настоящий том использует исключительно конечную интервальную рекурсию.

Научная новизна здесь не состоит в изобретении самой операции объединения интервалов. Она заключается в архитектуре применения Merge в едином аппарате исходного профиля, интервального состояния, рекурсивного оператора C_R, формального дерева B_n, эффективной псевдоповерхности и области Ω_n.

Такое разграничение важно для научной точности. Отдельные технические элементы могут быть стандартными, но их соединение в канонический язык рекурсивных псевдоповерхностей формирует самостоятельный конструктивно-геометрический аппарат.

7.11. Следствия для Ω_n и эффективной псевдоповерхности

После Merge интервальное состояние $I_n(x)$ становится единственным носителем эффективной области. Пространственная область определяется:

$\Omega_n = \{(x,\rho,\varphi): \rho \in I_n(x), 0 \le \varphi < 2\pi\}$.

Граница $\partial\Omega_n$ должна строиться по каноническим компонентам $I_n(x)$, а не по всем формальным ветвям B_n. Следовательно, формальная и эффективная псевдоповерхности принадлежат разным уровням построения; переход обеспечивает Merge.

При вычислении площади границы, объёма, компонентной структуры и морфологического паспорта учитываются только эффективные интервальные компоненты после точной Merge. Формальные ветви могут объяснять происхождение границы, но их нельзя автоматически включать в площадь действительной стенки или число физических компонент.

7.12. Выводы

Merge определена как точная канонизация конечного объединения замкнутых интервалов. Теорема 7.1 устанавливает существование канонической формы, следствие 7.2 — её единственность. Алгебраические свойства сформулированы как утверждение, поскольку непосредственно следуют из определения.

Введено различие между точной Merge и численной ε-Merge. Первая определяет математическую геометрию, вторая представляет приближение и может изменять компонентную структуру около малых зазоров. Поэтому топологические выводы должны относиться к точной модели, а численные результаты — сопровождаться указанием допуска.

Главный итог: Merge не является декоративной или исключительно программной процедурой. Это формальная операция преобразования комбинаторики рекурсивных ветвей в эффективную внутреннюю область. Она сохраняет точечное множество, но не его историю происхождения; для истории необходимо отдельное дерево B_n.

8. Рядные псевдоэллипсоиды: осевая компоновка, h_row и численный контроль Merge

Вводятся рядные псевдоэллипсоиды как конечные осевые сборки ранее построенных отдельных экземпляров Ω_n. Рядный параметр h_row управляет знаковым осевым зазором, касанием либо перекрытием соседних экземпляров и не изменяет внутренний порядок n. Область ряда $\Omega_{n,m}$ определяется как объединение сдвинутых копий с глобальным Merge вдоль общей оси.

8.1. Назначение главы о рядных системах

Рядная система вводит второй уровень организации после построения одиночной области Ω_n. Внутренний порядок n задаётся списком рекурсивных смещений и относится к структуре одного экземпляра. Параметр m определяет число уже построенных экземпляров, размещаемых вдоль общей оси, и не изменяет глубину внутренней рекурсии.

Поэтому рядный псевдоэллипсоид необходимо обозначать отдельно как $\Omega_{n,m}$. Здесь n отвечает за внутреннюю интервальную рекурсию, m — за количество осевых копий. Смешение этих величин приводит к ошибкам: увеличение m не увеличивает число формальных ветвей одного экземпляра и не входит в оценку 2^{n-2} для его рекурсивного сечения.

Главный смысл главы состоит в том, что рядная система — не визуальное повторение рисунка, а конечное объединение перенесённых областей с последующим глобальным Merge на общей оси.

8.2. Осевой носитель и шаг ряда

Пусть одиночная область Ω_n имеет осевой носитель [ξ_min, ξ_max]. Его ширина:

$W = \xi_max - \xi_min.$

В рядной системе соседние копии сдвигаются на шаг

$step = W + h_row.$

Удобное определение смещений:

$\Delta_j = -j(W + h_row),\ j = 0, 1, \ldots, m-1.$

Формула справедлива и для несимметричного осевого носителя, поскольку использует реальные границы ξ_min и ξ_max, а не предполагаемый центр. При $h_1 \neq 0$ ширина W может отличаться от 2a; поэтому в вычислениях W следует получать из реально построенного активного носителя.

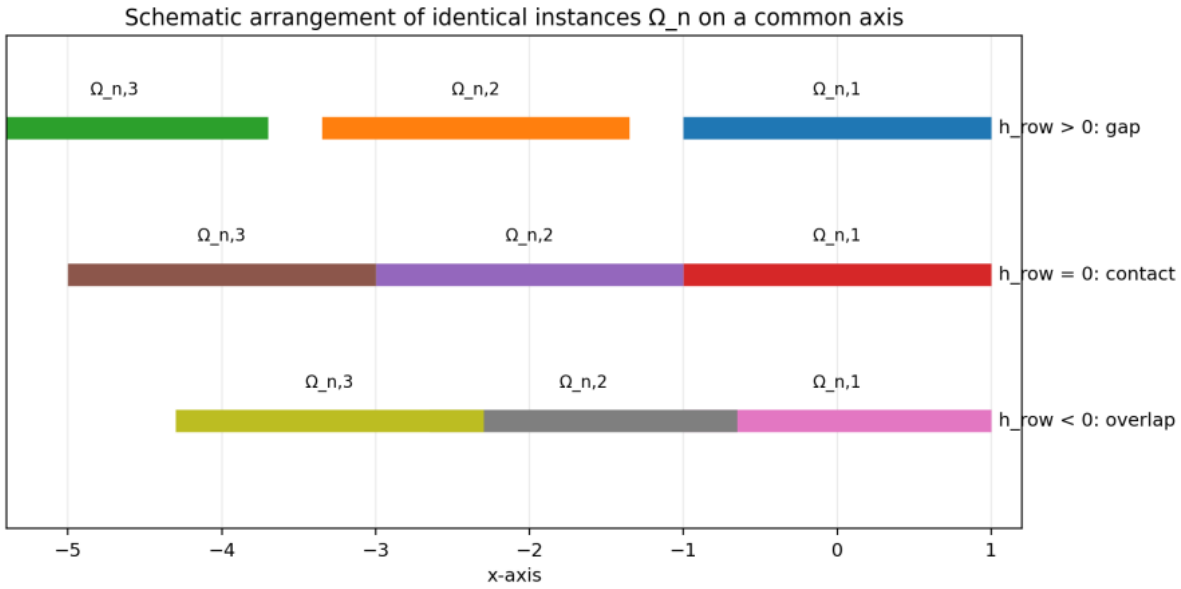

Рисунок 8.1. Схема расположения одинаковых экземпляров вдоль общей оси. Параметр h_row входит в шаг между копиями, но не изменяет внутренний порядок n.

8.3. Определение $\Omega_{n,m}$ и глобальная операция Merge

Рядная область определяется конечным объединением осевых копий:

$\Omega_{n,m} = \bigcup_{j=0}^{m-1} (\Omega_n + \Delta_j e_x)$.

На интервальном уровне в каждой глобальной точке x собираются все интервальные состояния тех копий, носители которых покрывают это значение x, после чего выполняется Merge:

$I_{n,m}(x) = \mathrm{Merge}(\bigcup_{j=0}^{m-1} I_n(x - \Delta_j))$.

Этот подход запрещает искусственное соединение пустых пространств между копиями. При h_row > 0 между носителями имеется положительный зазор, а межэкземплярное Merge не действует. При h_row = 0 возникает предельное касание замкнутых областей. При h_row < 0 копии перекрываются вдоль оси и общие части объёма необходимо учитывать только один раз.

8.4. Горизонтальные режимы h_row

Для горизонтального эталонного случая приняты K = 0,5, a = 1, h_1 = 0, h = 0, offsets = (0,8; 1,6), n = 4, m = 3. При этих условиях ширина одиночного носителя W = 2. Поэтому при h_row = 0,35 шаг равен 2,35, при h_row = 0 — 2, а при h_row = −0,35 — 1,65.

Положительное h_row создаёт разделённый ряд; нулевое — предельный контакт; отрицательное — перекрытие носителей с влиянием глобального Merge на суммарный объём.

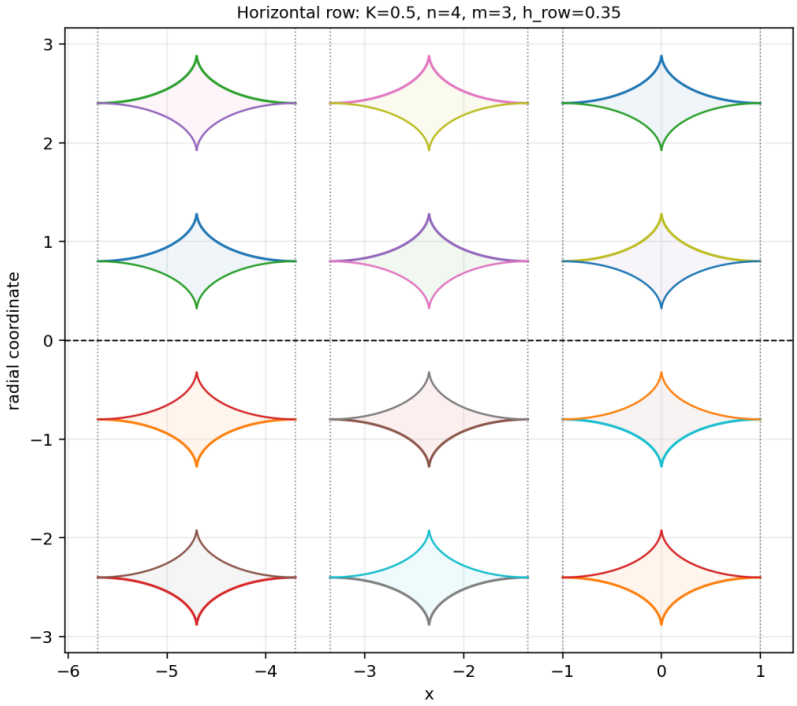

Рисунок 8.2. Рядный горизонтальный псевдоэллипсоид четвёртого порядка при h_row = 0,35, m = 3. Двумерное сечение построено интервально-рекурсивным методом; фокусы отмечены только там, где соответствуют порождающим границам.

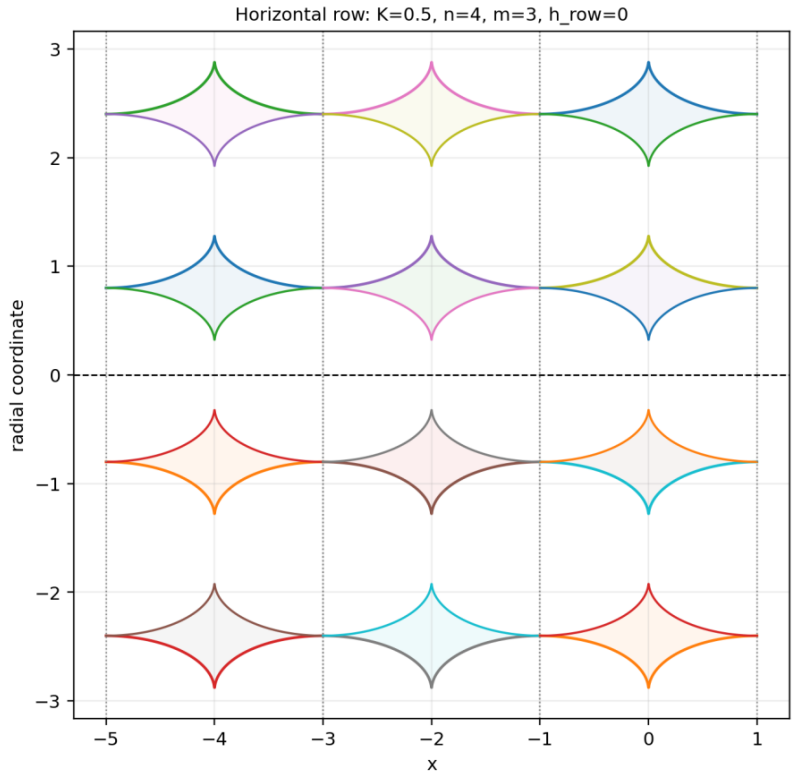

Рисунок 8.3. Рядный горизонтальный псевдоэллипсоид четвёртого порядка при h_row = 0, m = 3. Режим касания является границей между разделённой сборкой и перекрытием.

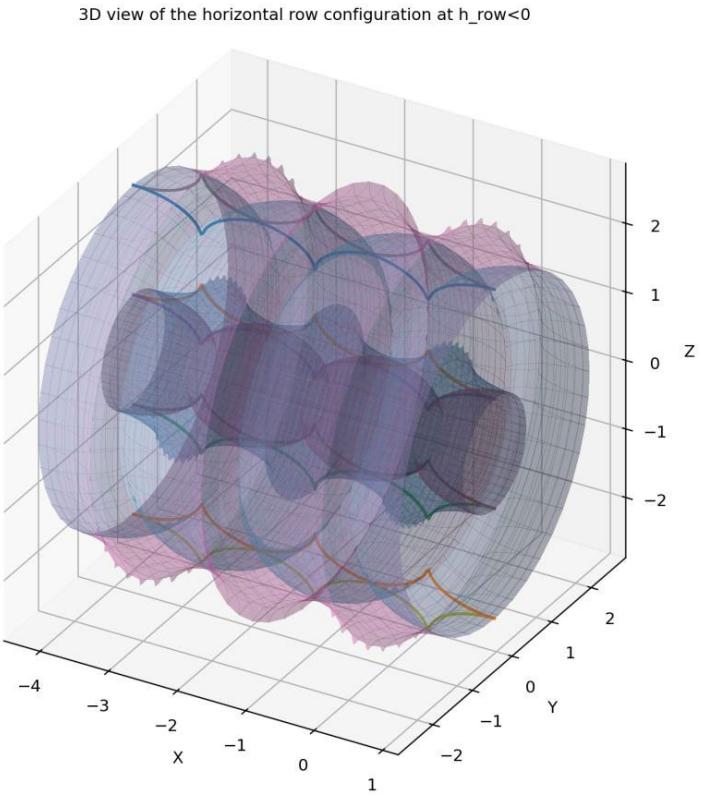

Рисунок 8.4. Трёхмерный вид рядной конфигурации при h_row < 0. Показаны пространственная связность и перекрытие.

8.5. Горизонтальный численный эталон

При K = 0,5 объём одиночного экземпляра четвёртого порядка составляет V_single ≈ 8,629289. Для m = 3 и h_row = −0,35 объём всего ряда после глобального Merge равен V_row ≈ 25,815689. Простое утроение объёма одиночного экземпляра даёт 3V_single ≈ 25,887866; следовательно, дефект объёмного перекрытия ΔV ≈ 0,072177.

Эти значения не являются универсальными константами теории. Они относятся исключительно к указанной эталонной конфигурации: a = 1, K = 0,5, h_1 = 0, h = 0, offsets = (0,8; 1,6), n = 4, m = 3, h_row = −0,35. Их задача — продемонстрировать воспроизводимый численный контроль Merge в рядной системе.

8.6. Вертикальный рядный эталон

Для вертикального эталона K = 1,5 с теми же смещениями, m и h_row расчёт даёт больший радиальный масштаб и больший объём. Объём одиночного экземпляра V_single ≈ 24,887439, объём ряда при h_row = −0,35 составляет V_row ≈ 74,445797. Простое утроение даёт 3V_single ≈ 74,662317, а дефект перекрытия ΔV ≈ 0,216521.

Вертикальный тип демонстрирует ту же логику рядного размещения: h_row задаёт осевое положение копий, не изменяя ни внутренний порядок, ни исходный профиль. Однако из-за другой функции d(x) интегральные величины существенно отличаются.

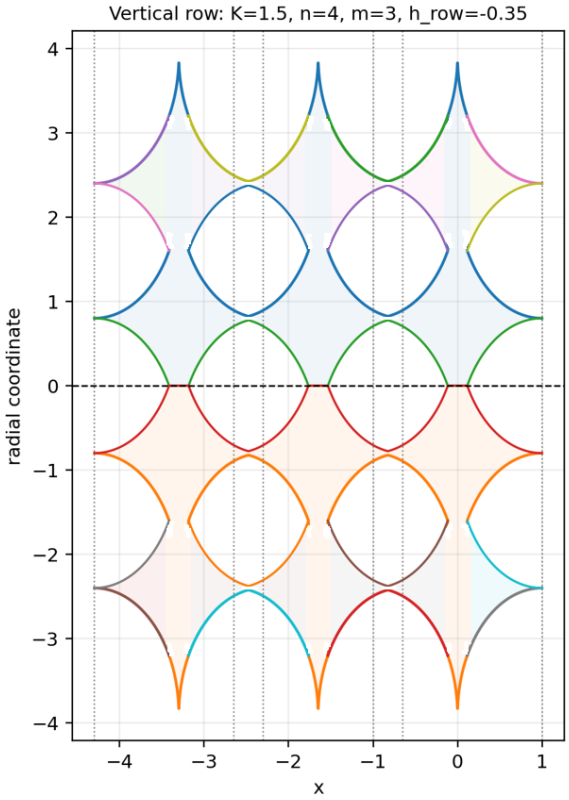

Рисунок 8.5. Рядный вертикальный псевдоэллипсоид четвёртого порядка при K = 1,5, offsets = (0,8; 1,6), m = 3, h_row = −0,35. Рекурсивный аппарат тот же, но радиальный масштаб и объём больше.

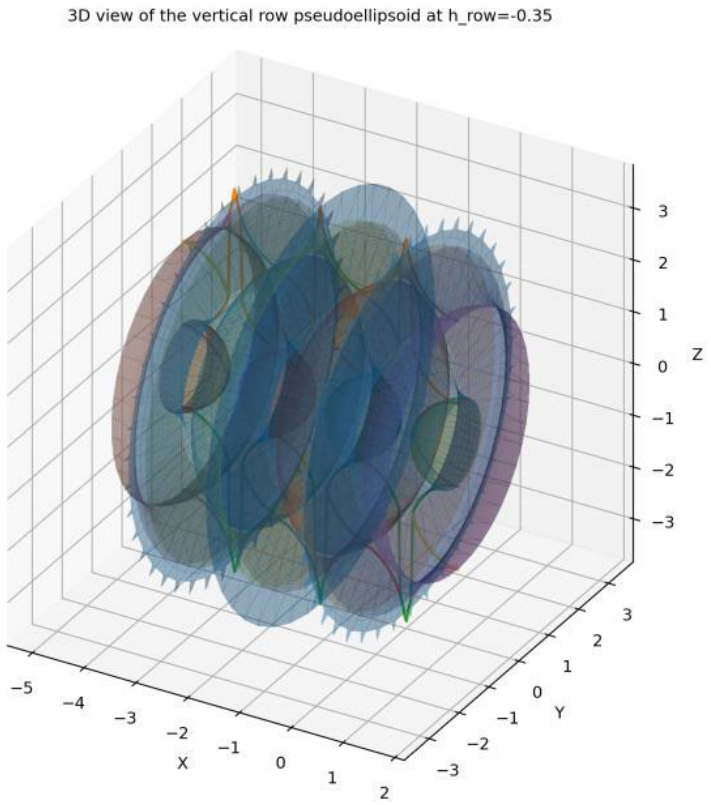

Рисунок 8.6. Трёхмерный вид вертикального рядного псевдоэллипсоида при h_row = −0,35. Фокусы в трёхмерном изображении не показаны.

8.7. Дефект объёмного перекрытия

Если h_row ≥ 0 и копии не имеют общей внутренней области, объём ряда равен сумме объёмов экземпляров. При h_row < 0 осевые носители пересекаются, и общий объём ряда, как правило, меньше простой суммы. Для контроля вводится величина:

$\Delta V_{n,m} = mV_n - V_{n,m}$.

В эталонном расчёте при h_row = −0,35 получены ΔV ≈ 0,072177 для K = 0,5 и ΔV ≈ 0,216521 для K = 1,5. При h_row = 0,35 и h_row = 0 дефект перекрытия практически равен нулю в пределах численной точности, что соответствует отсутствию положительного объёмного перекрытия.

Указанные значения вычислены не по двумерной пиксельной сетке Δx × Δr, а с помощью интервального аппарата. Сдвинутые интервальные элементы собираются вдоль глобальной оси, в каждой точке x выполняется Merge, затем площадь поперечного сечения

$A(x) = \pi\Sigma_j(\beta_j^2 - \alpha_j^2)$

интегрируется по x методом трапеций. Для приведённых значений использовались npts = 900 точек исходного профиля и плотная глобальная ось минимум из 5400 узлов до добавления узлов исходных профилей; фактическое количество узлов рядного эталона составляет порядка пяти–шести тысяч в зависимости от режима.

Это уточнение принципиально: V_single, V_row и ΔV являются зависящими от сетки численными эталонами, а не замкнутыми аналитическими формулами.

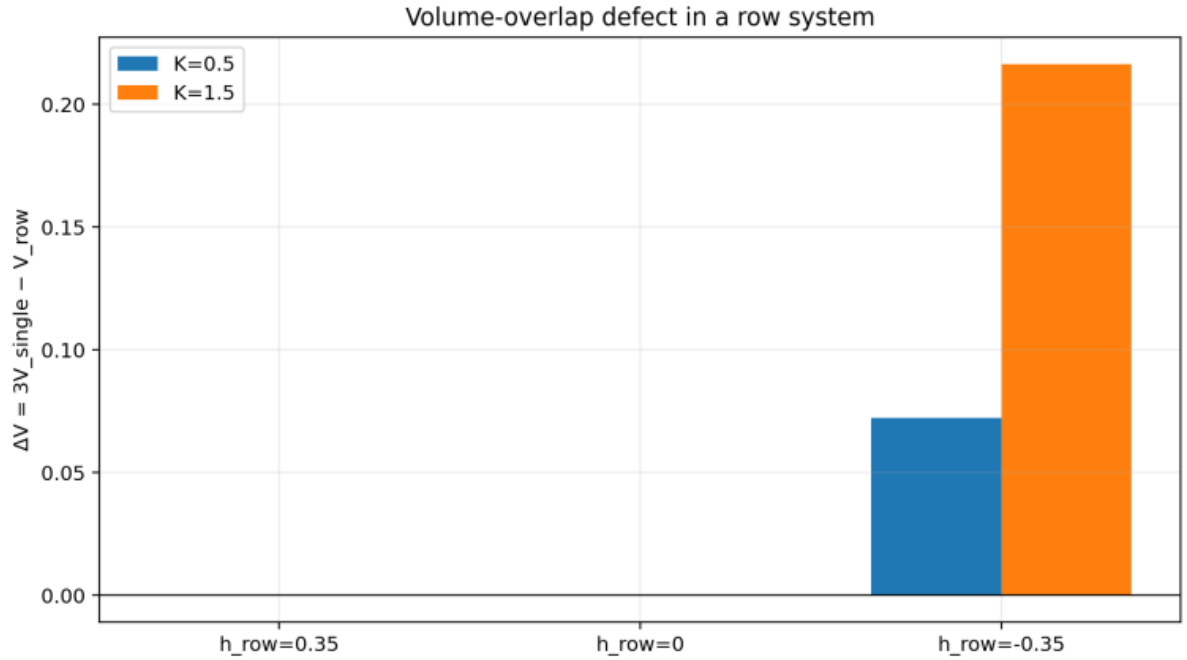

Рисунок 8.7. Дефект объёмного перекрытия ΔV = 3V_single − V_row. При отрицательном h_row рядная система имеет общий перекрывающийся объём, который после Merge учитывается один раз.

8.8. Теорема об ограниченности рядной системы

Теорема 8.1. Пусть одиночная область Ω_n имеет конечный осевой носитель [ξ_min, ξ_max] и конечную верхнюю радиальную границу M_n. Тогда при конечных m и h_row рядная область $\Omega_{n,m}$ ограничена.

Доказательство. Каждая копия имеет осевой носитель [ξ_min + Δ_j, ξ_max + Δ_j], где Δ_j = −j(W + h_row). Поскольку j принимает конечное число значений от 0 до m−1, объединение

всех осевых носителей является конечным объединением ограниченных интервалов. Радиальные интервалы при осевом переносе не изменяются, поэтому их верхние границы не превышают M_n. Следовательно, $\Omega_{n,m}$ ограничена и вдоль оси, и в радиальном направлении. Теорема доказана.

Теорема не утверждает связности рядной области. Связность зависит от того, пересекаются ли сдвинутые копии как подмножества $\mathbb{R}^3$, а при сложной внутренней компонентной структуре — от графа пересечений отдельных компонент.

8.9. Связность и граф пересечений

Для формального контроля связности вводится граф G_row. Его вершины соответствуют копиям $\Omega_n + \Delta_j e_x$, а ребро проводится между двумя вершинами, если соответствующие копии имеют непустое пересечение либо контакт в точной замкнутой модели.

Если одиночная область Ω_n связна и граф G_row связен, то $\Omega_{n,m}$ связна. Если граф распадается на несколько компонент, рядная область также разделяется на соответствующие группы копий. Если сама Ω_n содержит несколько внутренних компонент, вершины графа следует трактовать как пары «копия — внутренняя компонента».

Таким образом, знак h_row важен, но не служит единственным критерием связности. При $h_row > 0$ связи между копиями нет. При $h_row = 0$ возможны только контактные соединения. При $h_row < 0$ связность становится вероятной, однако должна подтверждаться пересечениями интервальных состояний после глобального Merge.

8.11. Выводы

Рядные псевдоэллипсоиды определены как конечные объединения перенесённых областей Ω_n с глобальным Merge на общей оси. Параметр h_row задаёт знаковый зазор между осевыми носителями, не меняя внутренний порядок n.

Уточнён вычислительный статус объёмов и дефектов перекрытия. Величины V_single, V_row и ΔV получены интегрированием по глобальной осевой сетке после Merge, а не из общей аналитической формулы. Поэтому результаты должны сопровождаться сеточными параметрами и входными данными.

Теорема 8.1 устанавливает ограниченность рядной системы. Глава согласуется с ориентированной на доказательства логикой предыдущих глав и не содержит преждевременных физических утверждений.

9. Кривизна, сингулярности и стратификация границы

В главе дана дифференциально-геометрическая интерпретация границы псевдоэллипсоида. Гауссова кривизна K_G применяется только к регулярным участкам класса C^2 при $\psi > 0$. Центральные стыки, полюсы, экваториальные кромки, кромки верхней огибающей и швы Merge рассматриваются как страты стратифицированной границы, а не обычные гладкие точки.

9.1. Профиль поверхности вращения

Для гладкой части исходного псевдоэллипсоида радиус поверхности вращения определяется функцией $\psi(x) = R - y(x)$, где $R = b + h$. В основном режиме $h = 0$ имеем $R = b$. Левая четвертьэллиптическая ветвь задаётся $y = b\sqrt{(1 - u^2)}$, где $u = (x+a)/a$ и $x \in (-a,0)$. Правая ветвь записывается аналогично через локальный параметр правого эллипса. Используемая далее формула кривизны относится к классической дифференциальной геометрии поверхностей вращения [6]–[8].

На регулярном участке при $\psi(x) > 0$, $\psi \in C^2$ поверхность вращения параметризуется:

$X(x,\varphi) = (x, \psi(x)\cos\varphi, \psi(x)\sin\varphi)$.

Гауссова кривизна вычисляется стандартным выражением:

$K_G(x) = -\psi''(x)/\{\psi(x)[1 + \psi'(x)^2]^2\}$.

Эта формула не применяется в стыках, полюсах, на краях апертур, швах Merge и точках смены активной ветви. Там требуется описание стратифицированной границы, а не единой глобально гладкой поверхности.

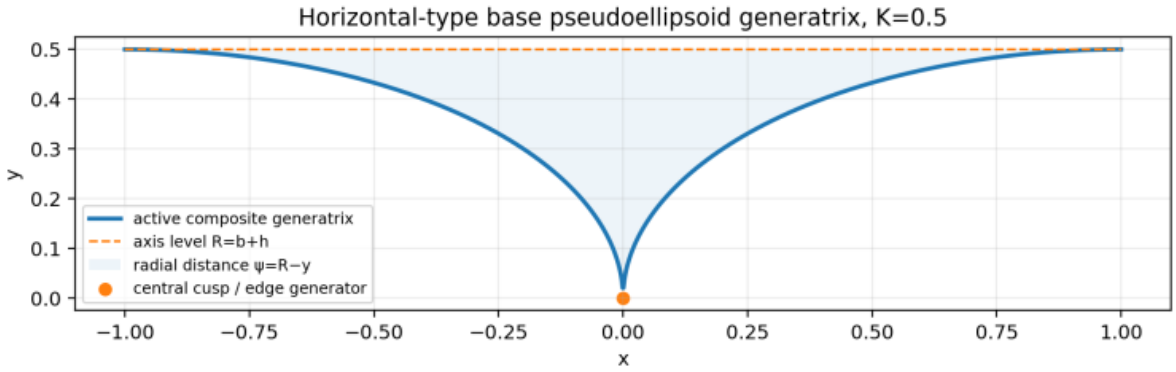

Рисунок 9.1. Исходная образующая горизонтального типа, построенная по геометрии псевдоэллипсоида настоящего тома. Показаны активная составная образующая, уровень оси вращения R и радиальное расстояние $\psi = R - y$.

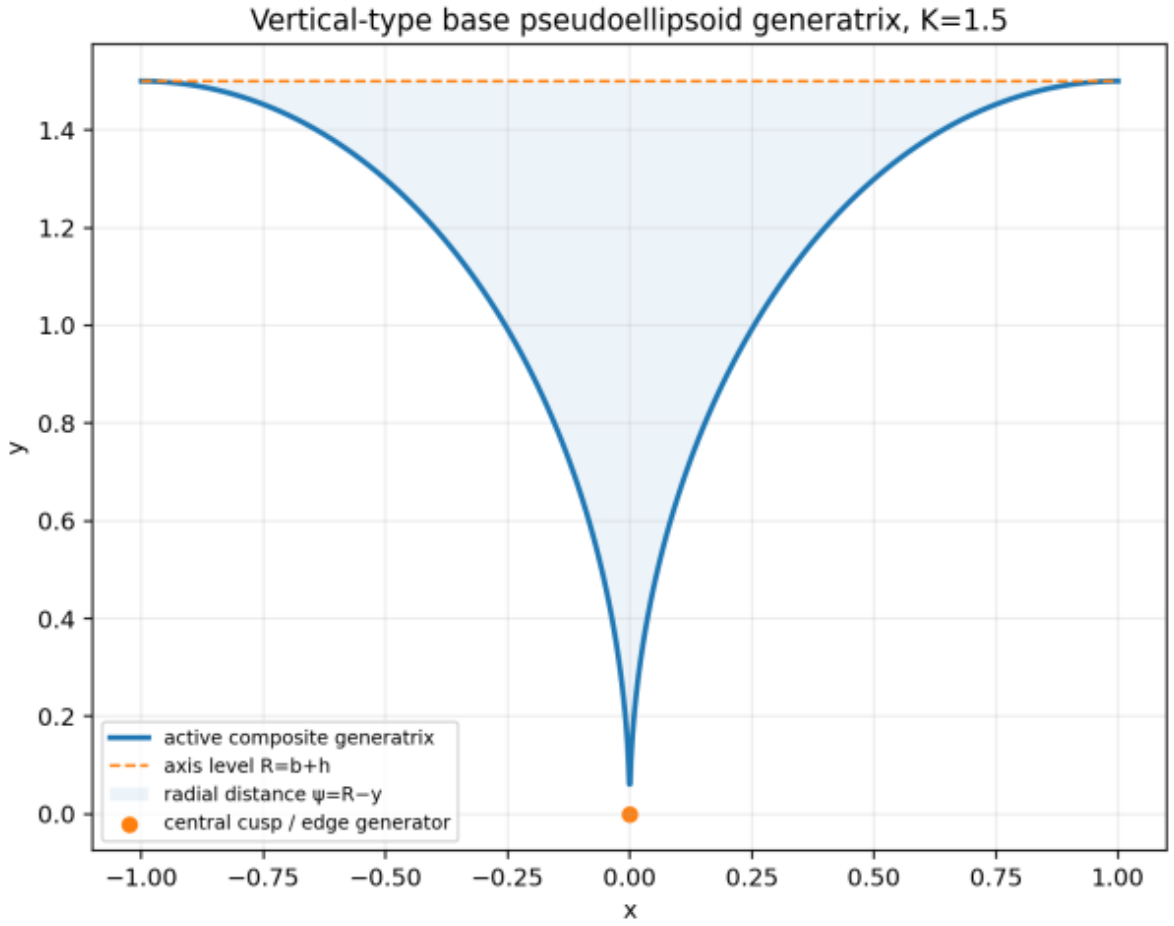

Рисунок 9.2. Исходная образующая вертикального типа. Положение уровня R и расстояние ψ определяют поверхность вращения.

9.2. Знак гауссовой кривизны на гладких дугах

Для левой гладкой дуги $y = b\sqrt{(1 - u^2)}$, $u = (x+a)/a$, имеем:

$y'(x) = -(b/a)u/\sqrt{(1 - u^2)}$;

$y''(x) = -(b/a^2)(1 - u^2)^{(-3/2)}$.

Поскольку $\psi = R - y$, то $\psi'' = -y'' = (b/a^2)(1 - u^2)^{(-3/2)} > 0$. Следовательно, на каждом регулярном участке с $\psi > 0$ знаменатель формулы для K_G положителен, а числитель определяет отрицательный знак:

$K_G(x) < 0$ на гладких эллиптических участках при $\psi(x) > 0$.

Это строго дифференциально-геометрический результат, применимый лишь к регулярным фрагментам поверхности вращения.

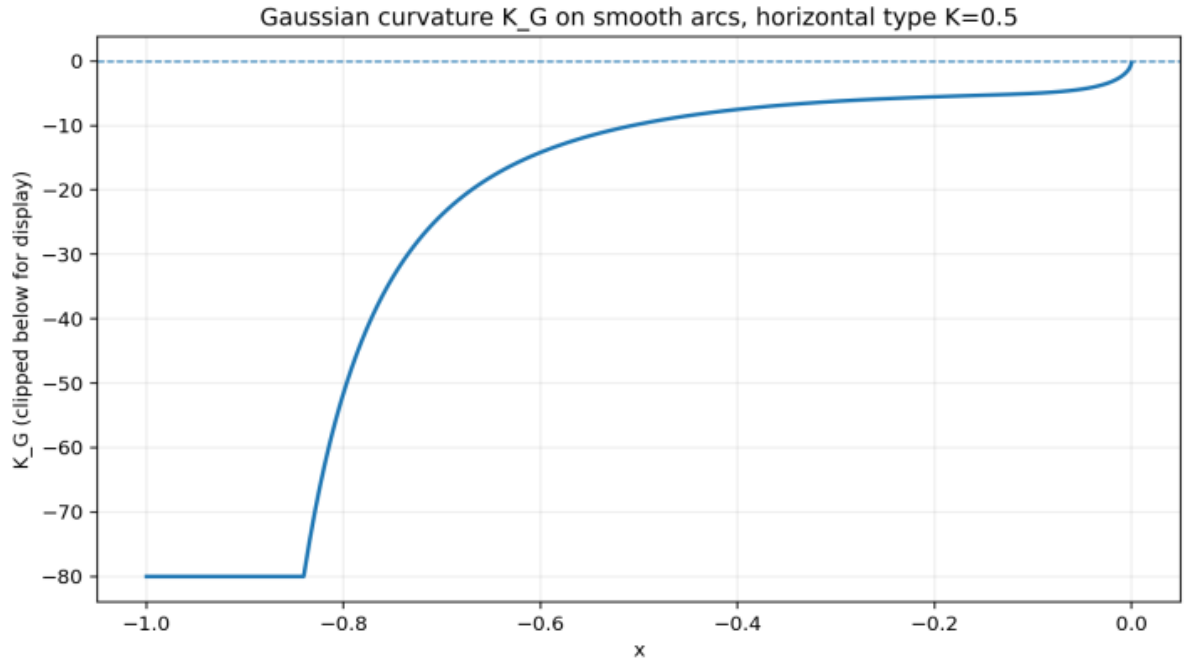

Рисунок 9.3. График K_G на гладких дугах горизонтального типа. При $h = 0$ значения вблизи полюсов снизу ограничены на рисунке, поскольку K_G стремится к $-\infty$.

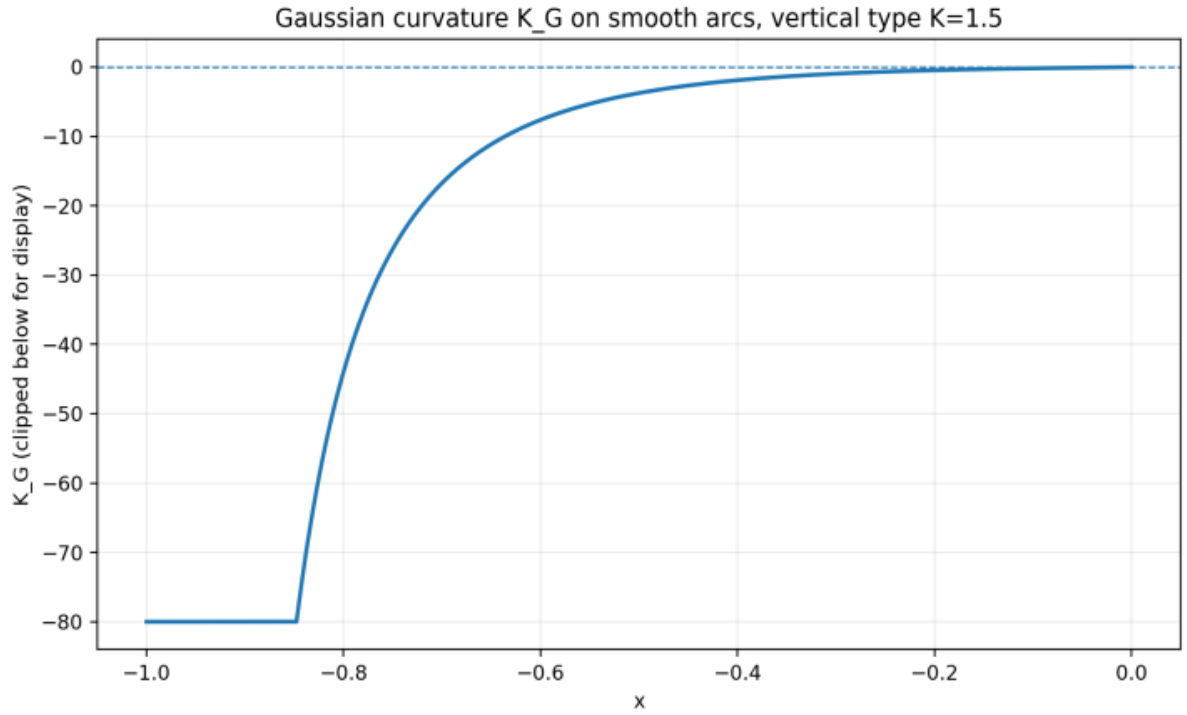

Рисунок 9.4. График K_G на гладких дугах вертикального типа. На регулярных участках при ψ > 0 знак кривизны остаётся отрицательным.

9.3. Стык четвертей эллипсов при $h_1 = 0$

При $h_1 = 0$ две четвертьэллиптические ветви соединяются в центральной точке $x = 0$. Здесь $y = 0$, $\psi = R$. Производная y' слева стремится к $-\infty$, а справа — к $+\infty$. Соответственно, ψ' меняет знак бесконечной по модулю величины. Это не обычная C^1-гладкая точка профиля и не точка, где можно непосредственно применить формулу гладкой кривизны.

Геометрически $x = 0$ является изломом образующей. После вращения вокруг оси x возникает круговая кромка радиуса $R = b + h$. На такой кромке гауссова кривизна как характеристика гладкой поверхности не определена, поскольку отсутствует единая регулярная C^2-структура.

Необходимо разделять два утверждения. Во-первых, значение K_G непосредственно в стыке не существует и его нельзя записывать как обычное конечное число. Во-вторых, при приближении к стыку по одной гладкой эллиптической дуге односторонний предел регулярной формулы стремится к 0^-. Этот предел не является кривизной самой кромки, а характеризует лишь гладкий участок перед потерей регулярности.

Поэтому прежнее выражение «в центральном стыке $K_G \to 0$» следует заменить строгой формулировкой: центральный стык представляет собой круговую кромку, на которой K_G не определена; односторонний предел формулы по гладкой дуге не задаёт кривизну самой кромки.

9.4. Полюсы и контакт с осью при $h = 0$

В базовом режиме $h = 0$ на концах четвертьэллиптических дуг $y = b = R$ и, следовательно, $\psi = 0$. Эти точки являются контактами с осью вращения. Поскольку радиус вращения обращается в нуль, они не относятся к обычным регулярным точкам поверхности.

Пусть x_p — такой полюс и $u = x - x_p$. На гладкой эллиптической дуге вблизи полюса действуют локальные разложения:

$\psi(u) = Cu^2 + O(u^4), \quad C = b/(2a^2);$

$\psi'(u) = 2Cu + O(u^3);$

$\psi''(u) = 2C + O(u^2) = b/a^2 + O(u^2)$.

Подстановка в $K_G = -\psi''/[\psi(1 + \psi'^2)^2]$ даёт:

$K_G(u) = -[2C + O(u^2)]/[Cu^2(1 + O(u^2))] = -2/u^2 + O(1)$.

Поскольку $\psi \sim Cu^2$, ту же расходимость можно записать:

$K_G \sim -(b/a^2)/\psi$ при $\psi \to 0^+$.

Однако это асимптотическое следствие локального разложения, а не самостоятельное значение кривизны в полюсе. Полюс остаётся сингулярной стратой, на которой K_G не определяется как регулярная величина.

Локальную интегрируемость $|K_G|dA$ также можно проверить непосредственно. Для поверхности вращения:

$dA = 2\pi\psi\sqrt{(1 + \psi'^2)}dx$.

При $dx = du$, $\psi \sim Cu^2$, $\sqrt{(1 + \psi'^2)} \to 1$ и $|K_G| \sim 2/u^2$ получаем:

$|K_G|dA \sim (2/u^2)\cdot 2\pi Cu^2 du = 4\pi C du$.

Правая часть локально интегрируема на любом конечном интервале $|u| < \varepsilon$. Следовательно, точечная кривизна расходится при приближении гладкого участка к полюсу, но интегральный вклад $\int|K_G|dA$ по компактной окрестности полюса остаётся конечным.

9.5. Роль параметра h и активного отсечения

Параметр h входит в уровень оси вращения $R = b + h$. Он не изменяет сами эллиптические дуги, но изменяет активный радиус $\psi = R - y_{act}$. При $h > 0$ полюса раскрываются: минимальный концевой радиус становится положительным, а прежняя полюсная сингулярность $\psi = 0$ исчезает. При $h = 0$ концы предельно касаются оси. При $h < 0$ часть исходной дуги располагается выше уровня R и обрезается правилом $y_{act} = \min(y, R)$.

В области отсечения $\psi = 0$, и формула K_G для регулярной поверхности вращения неприменима. Это не участок «нулевой кривизны» и не отрицательное отверстие, а вырожденная страта границы. Поэтому h следует рассматривать как геометрический параметр, управляющий изменением стратификации, а не как простое вертикальное перемещение чертежа.

9.6. Экваториальное окно при $h_1 > 0$

При $h_1 > 0$ между двумя четвертьэллиптическими ветвями появляется отрезок, на котором вычислительная геометрия задаёт $y = 0$. Тогда $\psi = R$ постоянно, а соответствующая поверхность вращения является цилиндрическим поясом. Во внутренней гладкой части пояса $\psi' = 0$ и $\psi'' = 0$, поэтому $K_G = 0$.

Однако переход от эллиптической дуги к цилиндрическому поясу не является C^1-гладким. В точках $x = 0$ и $x = h_1$ направление касательной к образующей меняется скачком: на эллиптическом участке касательная стремится к вертикали, на плоском отрезке $y = 0$ она горизонтальна. После вращения возникают две круговые линии сопряжения. Это одномерные страты, а не обычные гладкие точки поверхности.

Корректная формулировка такова: при $h_1 > 0$ цилиндрический пояс имеет $K_G = 0$ лишь на своей гладкой двумерной внутренней части; его края представляют собой круговые кромки стратифицированной границы и не обладают собственной гладкой гауссовой кривизной.

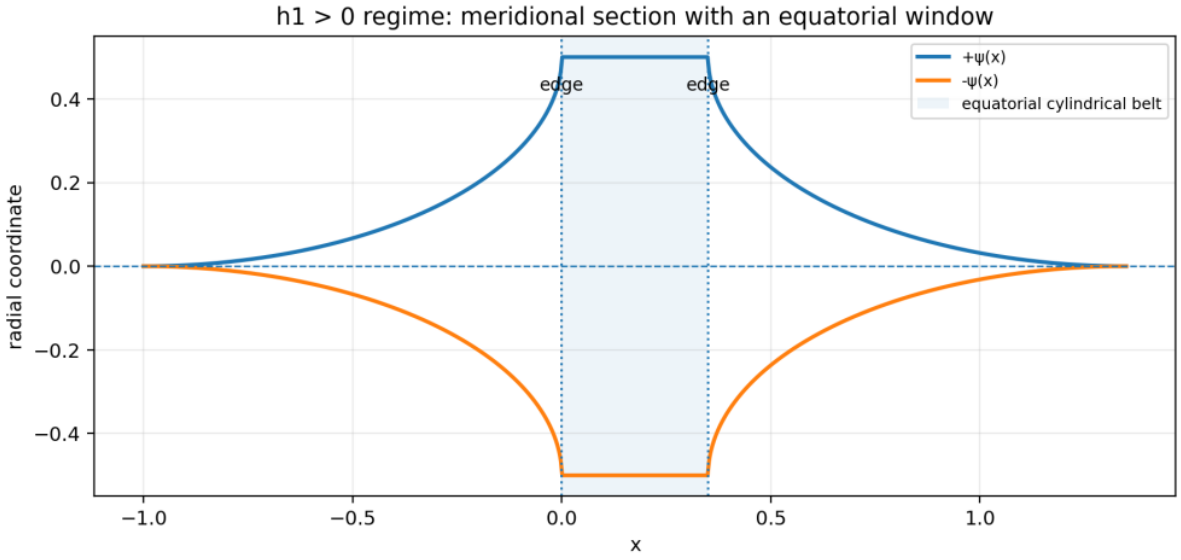

Рисунок 9.5. Режим $h_1 > 0$: двумерное сечение с экваториальным окном.

9.7. Перекрытие четвертей при $h_1 < 0$

При $h_1 < 0$ левая и правая четверти эллипсов перекрываются. Активная образующая определяется верхней огибающей $y(x) = \max(y_L(x), y_R(x))$ на отрезке, где обе дуги существуют. Для $-2a < h_1 < 0$ точка смены активной ветви имеет координату:

$x^* = h_1/2$.

В этой точке $y_L(x^*) = y_R(x^*)$, но производные, вообще говоря, различаются:

$y_L'(x) = -b(x + a)/[a^2\sqrt{(1 - ((x + a)/a)^2)}]$;

$y_R'(x) = -b(x - a - h_1)/[a^2\sqrt{(1 - ((x - a - h_1)/a)^2)}]$.

Эквивалентно эти формулы можно выразить через общую высоту $y_L = y_R$ с множителем b^2/y, поскольку $\sqrt{(1 - q^2/a^2)} = y/b$. В точке $x^* = h_1/2$ производные имеют противоположные знаки: активная левая ветвь обладает отрицательным наклоном, правая — положительным. Угол между касательными положителен и после вращения образует острую круговую кромку:

$\theta = \arctan(|y_L'(x^*)|) + \arctan(|y_R'(x^*)|) > 0$.

Следовательно, точка верхней огибающей при $h_1 < 0$ — не просто место изменения формулы, а реальная угловая страта составной образующей. После вращения она становится круговой кромкой, которую необходимо сохранять в геометрическом паспорте и при построении расчётной сетки.

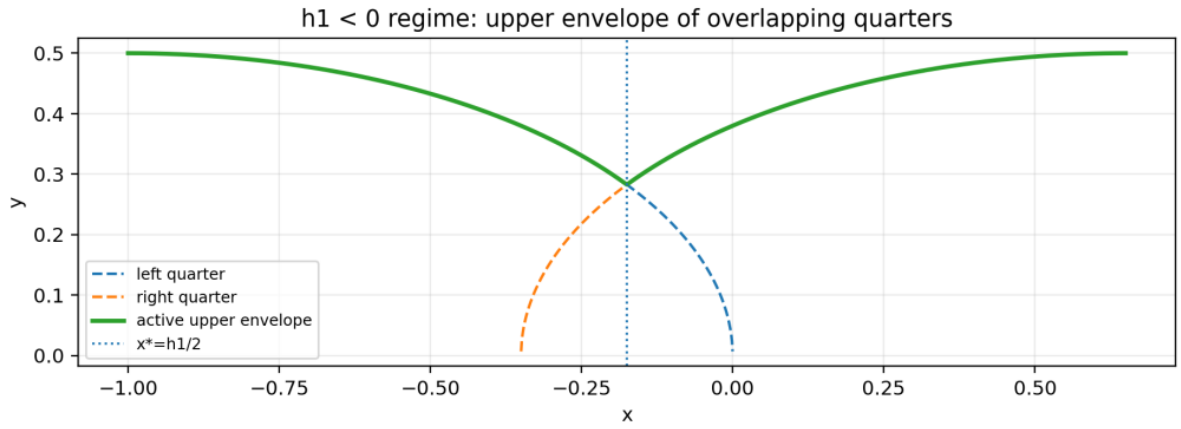

Рисунок 9.6. Режим $h_1 < 0$: верхняя огибающая перекрывающихся четвертей эллипсов.

9.8. Стратификация границы для последующих краевых условий

Стратификация означает разбиение границы на части с разной гладкостью и разным геометрическим происхождением. Это важно для будущей полноволновой проверки: разные страты могут требовать разных правил построения сеток, локальных аппроксимаций и условий регулярности. Гладкую эллиптическую поверхность, цилиндрический пояс, полюс, стыковую кромку, кромку верхней огибающей и границу Merge нельзя смешивать в одну неразличимую поверхность.

Выделяются основные страты: гладкая эллиптическая дуга создаёт двумерную C^2-поверхность вращения с $K_G < 0$ при $\psi > 0$; цилиндрический пояс при $h_1 > 0$ — двумерную C^2-поверхность с $K_G = 0$ во внутренней области; центральный стык при $h_1 = 0$ — круговую кромку, где K_G не определена; полюса при $h = 0$ — осевые вырождения с $K_G \to -\infty$ при подходе по гладкой части; верхняя огибающая при $h_1 < 0$ — угловую круговую кромку; швы Merge высших порядков представляют дополнительные страты эффективной границы.

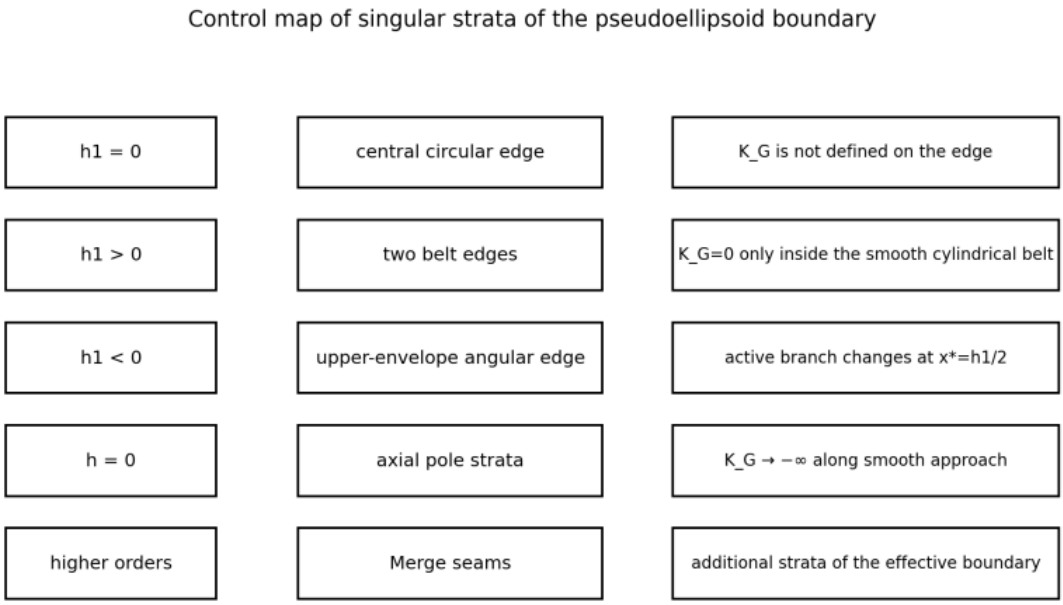

Рисунок 9.7. Контрольная карта сингулярных страт исходной образующей: центральная кромка при $h_1 = 0$, две кромки сопряжения при $h_1 > 0$ и кромка верхней огибающей при $h_1 < 0$.

9.10. Выводы

Обсуждение кривизны переведено с уровня зрительной интуиции на уровень стратифицированной дифференциальной геометрии. Формула $K_G = -\psi''/[\psi(1+\psi'^2)^2]$ применяется исключительно к регулярным C^2-участкам поверхности вращения при $\psi > 0$.

На гладких эллиптических дугах строго установлен отрицательный знак K_G. Этот результат относится только к регулярным фрагментам и не переносится на стыки, полюса, окна, верхние огибающие или швы Merge.

Центральный стык при $h_1 = 0$ является круговой кромкой, а не обычной C^1-точкой. На самой страте K_G не определена, а односторонний предел формулы не задаёт её кривизну.

Полюса при $h = 0$ представляют собой осевые вырождения, где $K_G \to -\infty$ по гладкой части, но локальный интегральный вклад $\int |K_G| dA$ остаётся конечным.

При $h_1 > 0$ цилиндрический пояс имеет $K_G = 0$ только внутри гладкого участка, а его края — круговые кромки. При $h_1 < 0$ точка $x^* = h_1/2$ создаёт угловую кромку верхней огибающей вследствие противоположных знаков производных активных ветвей.

Таким образом, для дальнейших вычислительных и волновых задач граница псевдоэллипсоида должна рассматриваться как стратифицированная эффективная псевдоповерхность, а не единая гладкая оболочка.

Глава 10. Безразмерные характеристики и масштабная инвариантность

В главе вводится безразмерная форма теории и доказывается геометрическая масштабная инвариантность. Рисунки исходного текста выполнены на английском языке. На рис. 10.3 использован реальный псевдоэллипсоид, полученный интервально-рекурсивным построением, и соответствующее рекурсивно сформированное сечение.

10.1. Назначение безразмерного представления

До настоящей главы теория излагалась через размерные величины a, b, h_1, h, R_k, h_row, x и ρ. Такое описание удобно для построения и чертежей, но недостаточно для строгого сопоставления конфигураций. Две области, различающиеся лишь общим масштабом, должны относиться к одному геометрическому типу.

Безразмерная форма необходима и для последующей волновой верификации. Волновые задачи зависят не от абсолютных длин самих по себе, а от их отношений к длине волны либо к волновому числу. Поэтому в первом томе необходимо отдельно доказать геометрическую масштабную инвариантность и указать дополнительные волновые инварианты, необходимые в дальнейшем.

Научная граница главы состоит в том, что масштабная инвариантность здесь доказывается исключительно как геометрическое свойство.

10.2. Нормированные координаты и параметры исходного профиля

В качестве базового масштаба выбрана продольная полуось a исходной эллиптической конструкции. Нормированные координаты определяются:

$\hat{x} = x/a, \quad \hat{\rho} = \rho/a.$

Исходные геометрические параметры преобразуются в безразмерные отношения:

$K = b/a, \quad \chi = h_1/a, \quad \eta = h/a.$

Здесь K задаёт тип исходной эллиптической геометрии, χ — относительный горизонтальный сдвиг правой четверти, η — относительное повышение либо понижение оси вращения. Параметр $R = b + h$ имеет вид:

$\hat{R} = R/a = K + \eta$.

Выбор a не единственен: можно было бы нормировать на M_n, W или V_n^(1/3). Однако для настоящего тома нормировка по a наиболее естественна, поскольку a входит в исходные четверти эллипсов и задаёт общий осевой масштаб.

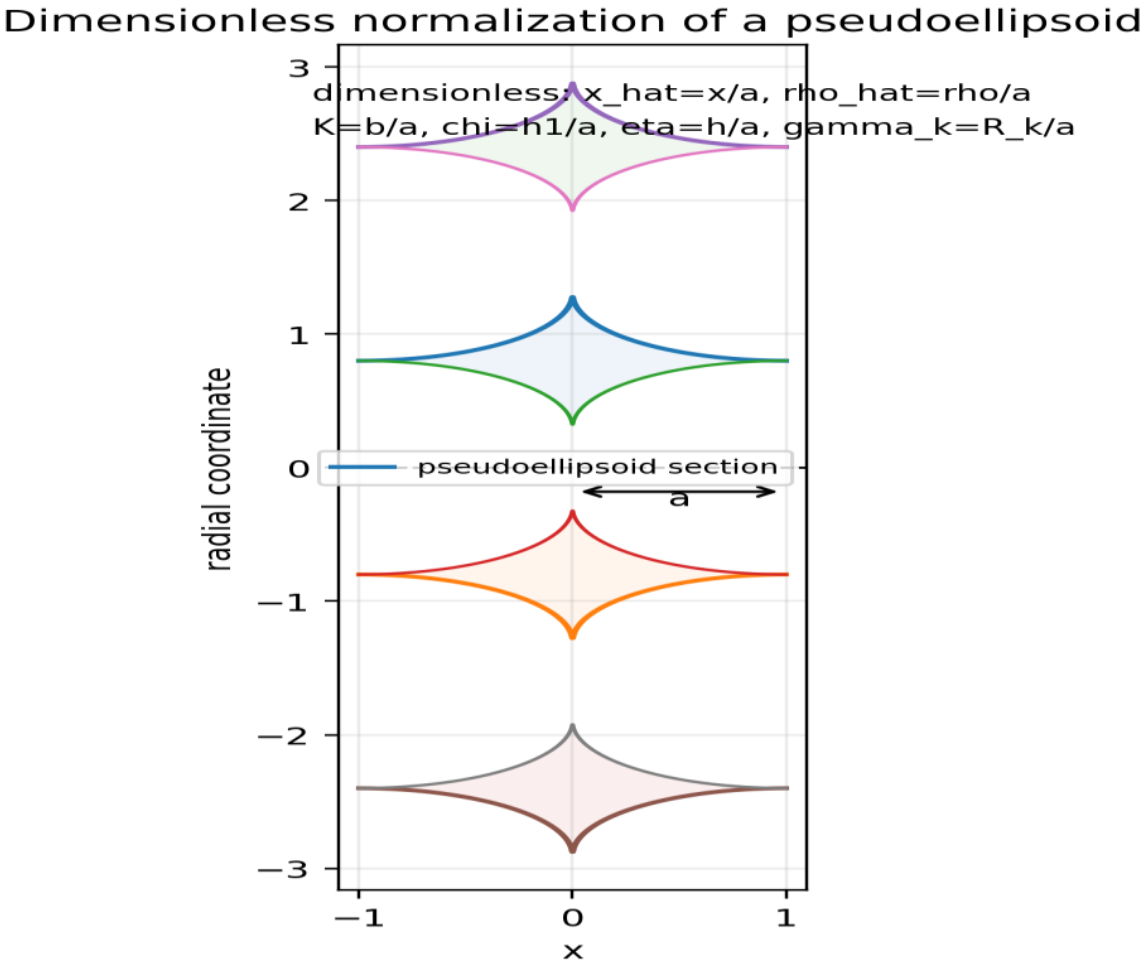

Рисунок 10.1. Безразмерная нормировка псевдоэллипсоида. Размерные параметры переводятся в отношения K = b/a, χ = h₁/a, η = h/a и γ_k = R_k/a.

10.3. Безразмерные интервальные состояния

Если $I_n(x)$ — размерное интервальное состояние, его безразмерная форма получается делением всех радиальных границ на a:

$\hat{I}_n(\hat{x}) = \{\hat{\rho}: a\hat{\rho} \in I_n(a\hat{x})\}$.

Для второго порядка:

$\hat{I}_2(\hat{x}) = [0, \hat{d}(\hat{x})], \quad \hat{d}(\hat{x}) = d(a\hat{x})/a$.

Поскольку нормированная исходная образующая зависит только от K, χ и η, вся начальная часть геометрии становится функцией безразмерных параметров. При этом стыки, зазоры, перекрытия и активное отсечение не исчезают, а переходят в соответствующие безразмерные страты.

10.4. Безразмерная форма рекурсивного оператора

Пусть γ_k — нормированное смещение:

$\gamma_k = R_k/a$.

Тогда оператор C_R в нормированных радиальных координатах принимает вид:

C_γ([α̂, β̂]) = [max(γ − β̂, 0), max(γ − α̂, 0)] ∪ [γ + α̂, γ + β̂].

Запись приводит формулу к единому математическому виду и показывает, что рекурсия зависит не от абсолютных R_k, а от их отношения к базовому масштабу a.

Безразмерный рекурсивный шаг:

Î_{k+1}(x̂) = Merge(⋃_{[α̂,β̂]∈Î_k(x̂)} C_{γ_{k−1}}([α̂,β̂])).

Следовательно, если два размерных объекта имеют одинаковые K, χ, η и все γ_k, их интервальная рекурсия в нормированных координатах совпадает.

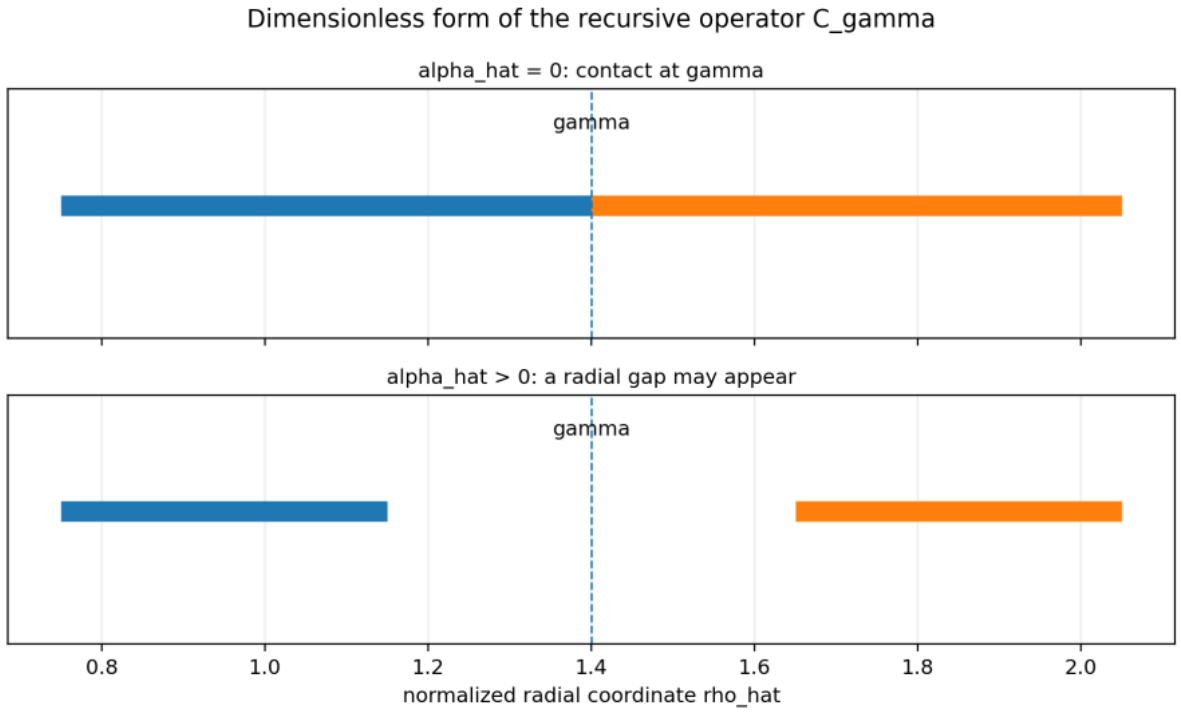

Рисунок 10.2. Безразмерная форма рекурсивного оператора C_γ. Разностная и суммарная зоны строятся в нормированных радиальных координатах, после чего выполняется Merge.

10.5. Безразмерная рядная компоновка

Рядная система также нормируется по a. Если h_row обозначает знаковый промежуток, контакт или перекрытие между соседними экземплярами, то:

η_row = h_row/a.

Если W — осевая ширина одного экземпляра, step = W + h_row — шаг ряда, то:

Ŵ = W/a, stêp = Ŵ + η_row.

Рядная компоновка не вводит нового абсолютного масштаба. Она добавляет безразмерный параметр η_row, задающий режим разделения, контакта или перекрытия копий. Внутренний порядок n каждого экземпляра не меняется.

10.6. Теорема 10.1. Масштабная инвариантность псевдоэллипсоидов высших порядков

Теорема 10.1. Пусть все линейные параметры псевдоэллипсоида высшего порядка умножены на один и тот же коэффициент s > 0:

$(a,b,h_1,h,R_1,\ldots,R_{n-2},h_row) \to s(a,b,h_1,h,R_1,\ldots,R_{n-2},h_row)$.

Тогда безразмерные параметры K, χ, η, γ_k и η_row не меняются, а безразмерные области Ω_n и $\Omega_{n,m}$ сохраняют форму, интервальную структуру, число компонент и морфологический паспорт.

Доказательство. При равномерном масштабировании все линейные величины умножаются на s. Поэтому отношения b/a, h_1/a, h/a, R_k/a и h_row/a сохраняются. Нормированные координаты $\hat{x} = x/a$ и $\hat{\rho} = \rho/a$ также сохраняют координатную конструкцию формы. Следовательно, исходный профиль $\hat{d}$ не меняется.

Безразмерный рекурсивный оператор зависит только от γ_k. Поскольку все γ_k инвариантны, сохраняется вся последовательность $\hat{I}_2, \hat{I}_3, \ldots, \hat{I}_n$. Merge зависит лишь от пересечений и касаний интервалов в безразмерных координатах и даёт тот же канонический результат. Рядная компоновка определяется η_row и $\hat{W}$, которые тоже неизменны. Следовательно, Ω_n, $\Omega_{n,m}$ и их морфологические свойства сохраняются. Теорема доказана.

На рис. 10.3 приведён один и тот же псевдоэллипсоид четвёртого порядка в двух масштабах.

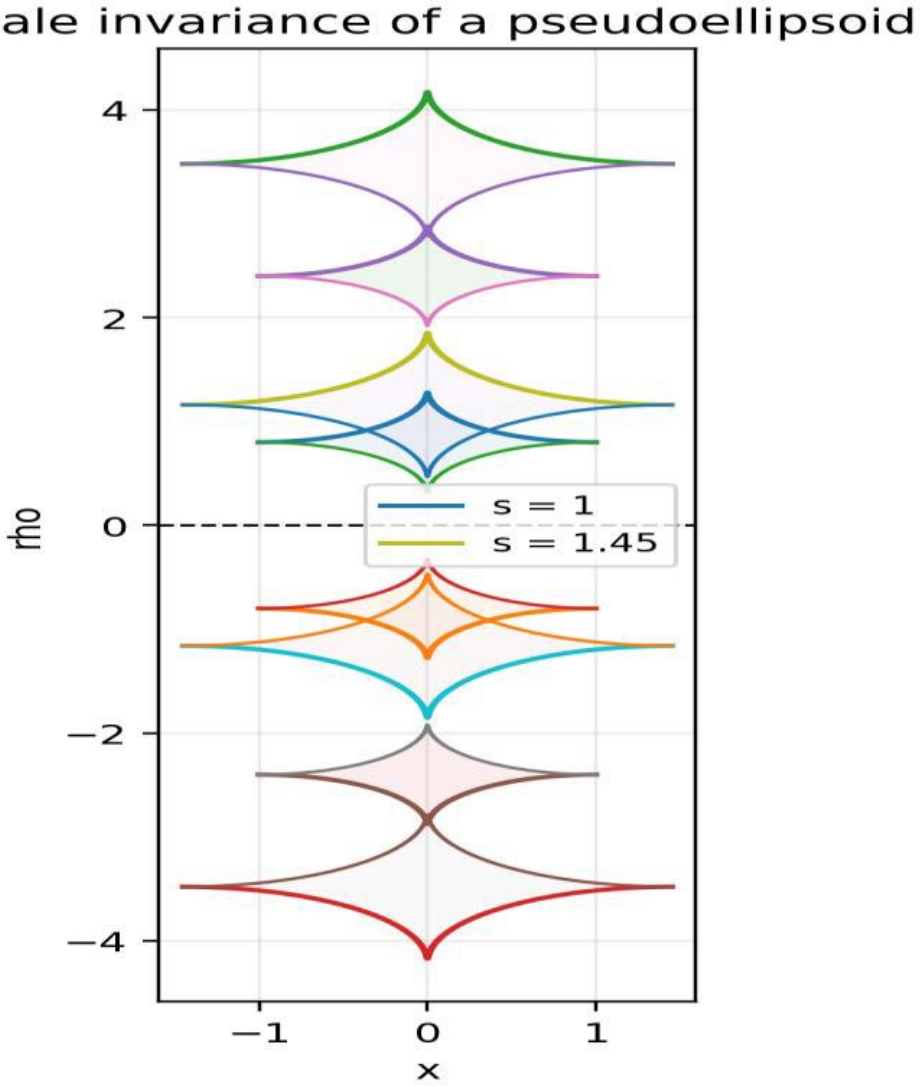

Рисунок 10.3. Масштабная инвариантность. Равномерное увеличение всех линейных параметров изменяет абсолютные длины, но не форму.

10.7. Явный перечень безразмерных инвариантов

Для исключения разрозненных обозначений вводится единый список инвариантов псевдоэллипсоида высшего порядка. Геометрический паспорт включает:

$K = b/a$ — инвариант формы исходных четвертей эллипсов;

$\chi = h_1/a$ — инвариант смещения правой четверти;

$\eta = h/a$ — инвариант положения оси вращения;

$\gamma_k = R_k/a$ — инварианты рекурсивных смещений;

$\eta_{row} = h_{row}/a$ — инвариант рядного размещения;

n — внутренний порядок;

m — число экземпляров ряда.

Для перехода к волновым задачам одного геометрического паспорта недостаточно. Потребуются дополнительные безразмерные волновые параметры:

$ka = (2\pi/\lambda)a$, kR_k, $k \cdot d_{tip}$, $k \cdot w_{eq}$, $k \cdot r_{throat}$.

Здесь $d_{tip} = \max(h, 0)$ — действительный концевой радиус, $w_{eq} = \max(h_1, 0)$ — ширина экваториального промежутка, а r_{throat} — радиус горловины в трёхфокальном подсемействе, если она геометрически существует.

Две конфигурации с одинаковыми геометрическими инвариантами геометрически подобны. Две волновые постановки можно считать сопоставимыми только при совпадении также волновых инвариантов, типа уравнения, материала, граничных условий и способа возбуждения. Поэтому выражение «одинаковые инварианты означают одинаковую физику» без этих условий некорректно.

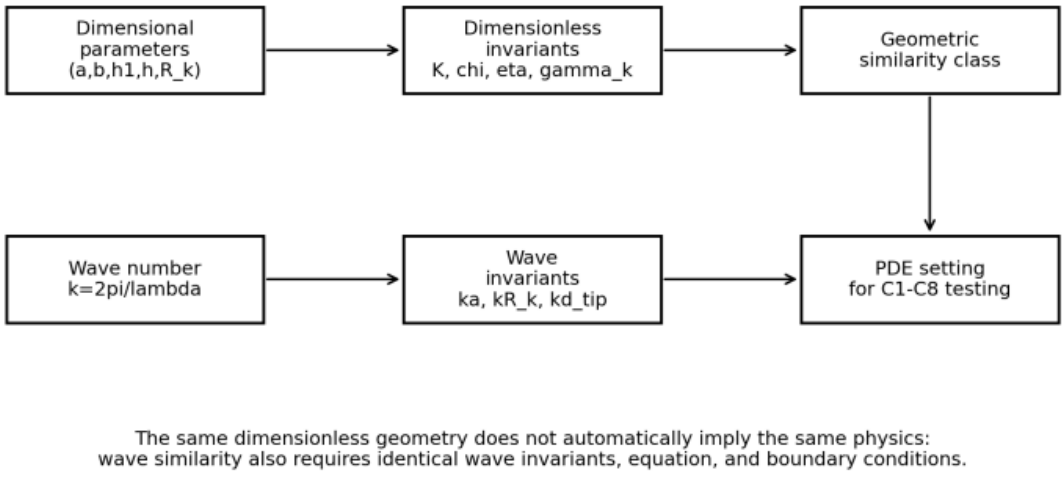

Рисунок 10.4. Безразмерный паспорт конфигурации. Геометрические инварианты определяют класс подобия, а волновые потребуются лишь при последующей верификации дифференциальных уравнений в частных производных.

10.8. Следствия для геометрических функционалов

Из теоремы 10.1 вытекает масштабирование основных геометрических функционалов. Если все линейные размеры умножены на s, длины умножаются на s, площади поперечных сечений и граничных поверхностей — на s^2, объёмы — на s^3:

$M_n \to sM_n$, $A_n \to s^2A_n$, $S_n \to s^2S_n$, $V_n \to s^3V_n$.

Закон распространяется и на рядную систему как конечное объединение перенесённых копий. Дефект объёмного перекрытия также масштабируется как объём:

$\Delta V_{n,m} \rightarrow s^3 \Delta V_{n,m}$.

Это геометрические следствия. Они не означают аналогичного масштабирования коэффициента прохождения, добротности или диаграммы направленности, зависящих от волновой постановки.

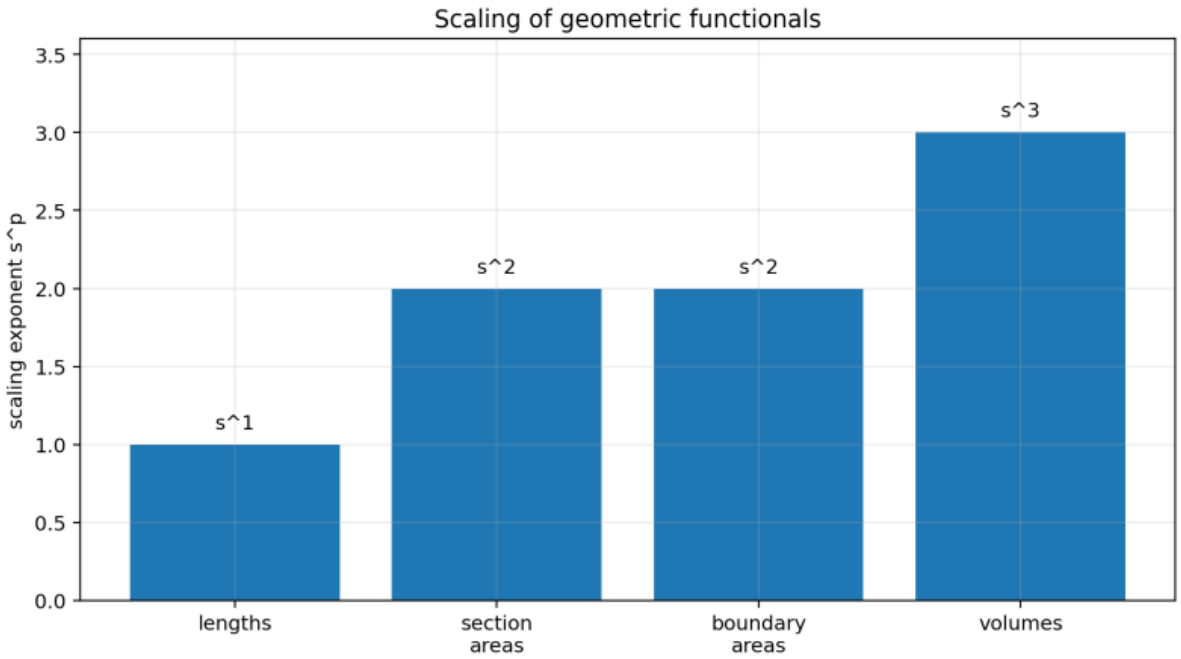

Рисунок 10.5. Масштабирование геометрических функционалов: длины изменяются как s, площади — как s^2, объёмы — как s^3.

10.9. Масштабная инвариантность и будущая волновая верификация

Для будущей волновой задачи важны не только K, χ, η, γ_k и η_row, но также спектральные параметры: ka, kR, kR_k, отношение ширины окна к длине волны, отношение радиуса горловины к длине волны и другие сочетания геометрии с волновым масштабом:

ka, kR, kR_k, d_tip/λ, w_eq/λ, r_throat/λ.

Поэтому итог главы следует формулировать строго: геометрическая часть масштабно-инвариантна. Однако локализация, спектральные окна, направленный вывод, высокая добротность и универсальность по физическим типам волн автоматически из неё не следуют. Эти свойства относятся к программе C1–C8 и требуют независимой проверки.

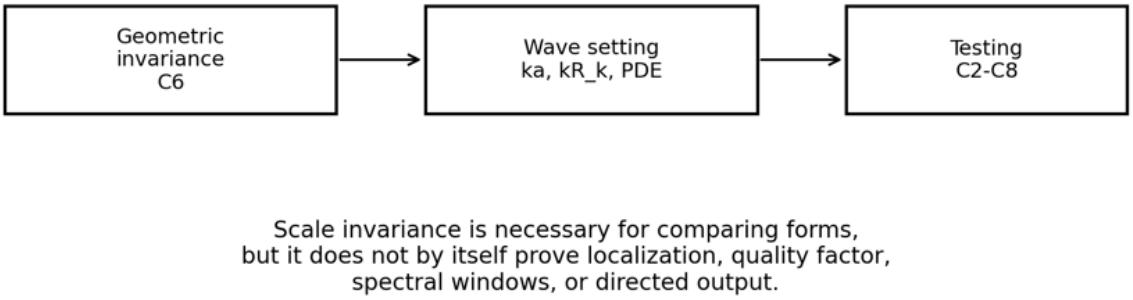

Рисунок 10.6. Безразмерная геометрия как основа будущей волновой верификации. Масштабная инвариантность необходима для критерия C6, но сама по себе не подтверждает критерии C2–C8.

10.10. Выводы

Теория псевдоэллипсоидов высших порядков приведена к единой безразмерной форме. Оператор C_γ записан математически, а масштабная инвариантность сформулирована как теорема 10.1.

Введён явный перечень геометрических инвариантов K, χ, η, γ_k, η_row, n и m и дополнительных параметров ka, kR_k, k·d_tip, k·w_eq, k·r_throat для будущих волновых задач. Это устраняет разрозненность обозначений и обеспечивает сопоставимость конфигураций.

Доказано, что при равномерном масштабировании линейных параметров безразмерная форма, рекурсивная структура, канонизация Merge, компонентная структура и морфологический паспорт не изменяются. Размерные длины, площади и объёмы изменяются соответственно как s, s^2 и s^3.

11. Связь псевдоэллипсоидов с псевдогиперболоидами и псевдопараболоидами

В сравнительно-теоретической главе показано, что псевдоэллипсоиды высших порядков представляют собой не изолированное авторское семейство, а эллиптическую ветвь общей интервально-рекурсивной теории псевдоповерхностей. Волновые свойства не объявляются доказанными. Устанавливаются лишь геометрические связи между тремя классами исходных профилей и границы будущей верификации.

11.1. Назначение сравнительной главы

После построения исходной эллиптической образующей, рекурсии высших порядков, операции Merge, осевой рядной компоновки, кривизны и безразмерной инвариантности остаётся принципиальный вопрос: какое место теория псевдоэллипсоидов занимает в общей серии исследований псевдоповерхностей? Если оставить ответ только для заключения, том может восприниматься как независимое построение, лишь внешне напоминающее предыдущие книги. На уровне монографии требуется отдельная глава, научно связывающая эллиптическую ветвь с гиперболической и параболической.

Связь необходимо формулировать строго. Недостаточно утверждать, что три семейства «похожи» либо одинаковым образом управляют волнами. Их геометрическое родство состоит в общем способе перехода от исходного профиля к интервальному состоянию, общем рекурсивном операторе, операции Merge, понятии эффективной области и переходе к рядным системам. Различаются исходный закон образующей, фокальные ориентиры, тип носителя, кромки, сингулярности кривизны и морфологические режимы.

Поэтому триада «псевдогиперболоиды — псевдопараболоиды — псевдоэллипсоиды» рассматривается как три ветви единого конструктивного аппарата, но не как три уже доказанно физически эквивалентные системы.

11.2. Общий интервально-рекурсивный аппарат трёх семейств

Общая часть теории начинается с выбора исходного профиля d(x). Для гиперболической, параболической и эллиптической ветвей профиль различен, но дальнейшая схема едина:

$I_2(x) = [0, d(x)]$;

$I_{k+1}(x) = \mathrm{Merge}(\bigcup_{[\alpha,\beta]\in I_k(x)} C_{R_{k-1}}([\alpha,\beta]))$;

$\Omega_n = \{(x,\rho,\varphi): \rho \in I_n(x),\ 0 \le \varphi < 2\pi\}$.

Главная конструктивная единица — не линия образующей и не отдельная оболочка, а радиальное интервальное состояние, задающее внутреннюю область для последующих геометрических и волновых задач. Merge преобразует формальное ветвление в эффективную область, устраняя дублирование и сохраняя только реальные радиальные компоненты.

Таким образом, триада обладает общим вычислительным и математическим каркасом. Различие возникает не в Merge и не в определении Ω_n, а в исходном профиле, из которого получается d(x).

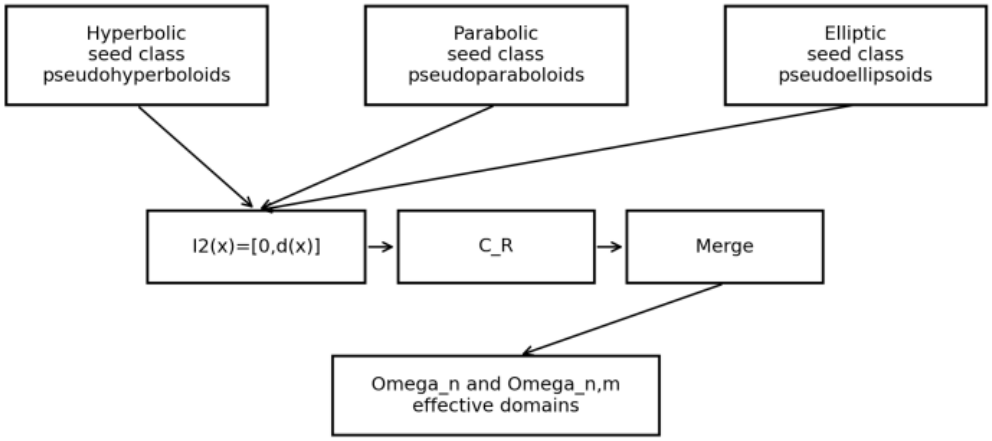

Рисунок 11.1. Общая архитектура триады псевдоповерхностей. Гиперболический, параболический и эллиптический исходные классы различны, но после выбора d(x) входят в общую схему $I_2 \to C_R \to Merge \to \Omega_n$.

11.3. Эллиптическая ветвь как компактная рекурсивная область

Псевдоэллипсоиды отличаются тем, что их исходная база строится из двух четвертьэллиптических сегментов, а не одной гладкой классической эллиптической оболочки. Составной характер приводит к появлению параметра h_1, который не является вторичной поправкой, а задаёт отдельный морфологический канал: стык, окно либо перекрытие.

В настоящем вычислительном аппарате горизонтальный тип соответствует $K < 1$, вертикальный — $K > 1$, а предельный случай $K = 1$ рассматривается как контрольная граница. Одна и та же рекурсивная процедура применяется к горизонтальным и вертикальным псевдоэллипсоидам; различие возникает из распределения d(x), а не из изменения Merge.

Ниже показаны реальные сечения псевдоэллипсоидов четвёртого порядка после применения смещений и Merge.

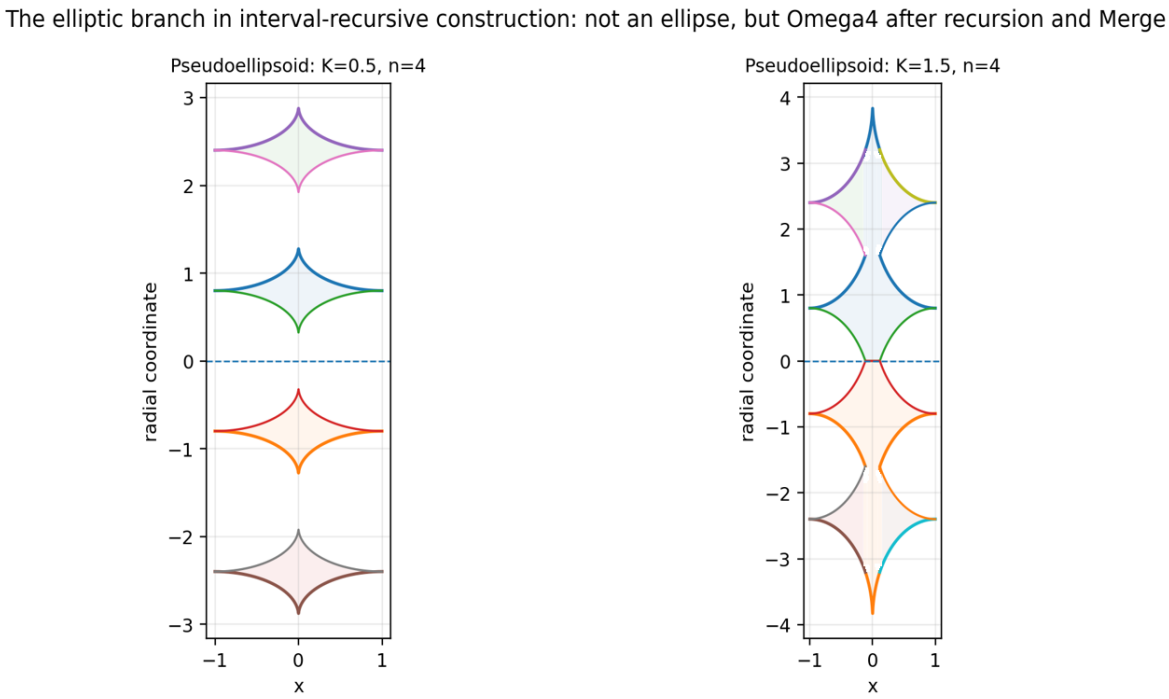

Рисунок 11.2. Эллиптическая ветвь в интервально-рекурсивном построении: горизонтальные и вертикальные псевдоэллипсоиды четвёртого порядка. Показаны области Ω_4 после рекурсии и Merge, а не классические эллипсы.

11.4. Специальный параметр h_1 и отличие псевдоэллипсоидов от других ветвей

Параметр h_1 — одна из основных причин, по которым теория псевдоэллипсоидов не сводится к повторению теории псевдогиперболоидов или псевдопараболоидов. Он определяет взаимное расположение двух исходных четвертьэллиптических сегментов. При $h_1 = 0$ возникает стык. При $h_1 > 0$ образуется промежуток, который можно впоследствии трактовать как зону экваториальной апертуры лишь при явно заданной граничной постановке. При $h_1 < 0$ сегменты перекрываются, а активная образующая определяется огибающей.

В гиперболической и параболической ветвях также имеются параметры открытости, смещения и рядного размещения. Однако h_1 формирует собственную эллиптическую морфологию: два исходных четвертьсегмента способны изменять не только масштаб, но и режим взаимной сборки. Это влияет на кромки, горловину, центральные зоны и характер будущих граничных условий.

Изменение h_1 является геометрическим механизмом задания нового сценария для последующего анализа.

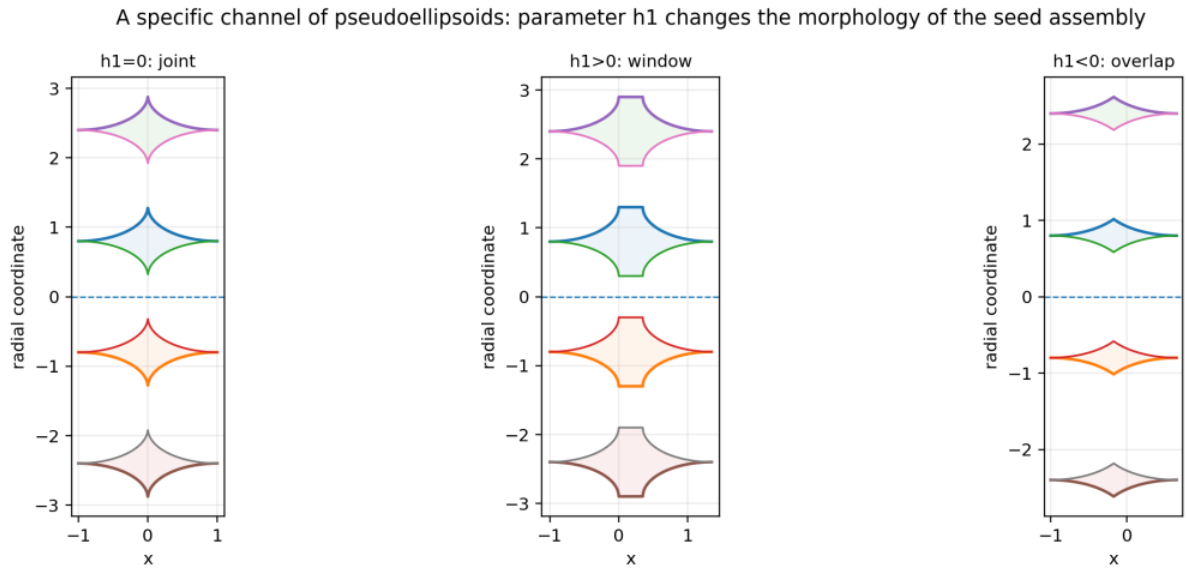

Рисунок 11.3. Параметр h_1 как особый морфологический канал эллиптической ветви. Все три сечения построены интервальной рекурсией и показывают области после Merge.

11.5. Связь с псевдопараболоидами: локальный параболический предел

Связь эллиптической и параболической ветвей наиболее корректно формулировать локально. Гладкая дуга эллиптического происхождения в достаточно малой окрестности регулярной точки допускает квадратичную аппроксимацию. Поэтому после подходящей нормировки и локального увеличения часть эллиптического исходного профиля можно описывать параболическим законом второго порядка.

Это не означает, что целый псевдоэллипсоид превращается в псевдопараболоид. Псевдоэллипсоид имеет компактную составную исходную систему, параметр h_1, характерные кромки и конечный осевой носитель. Псевдопараболоид обладает собственной параболической логикой фокуса, раскрытия и носителя. Общим остаётся переход к одной интервальной рекурсии после выбора исходного профиля.

На асимптотическом уровне локальный вид гладкой дуги записывается:

$$d(x_0 + u) = d(x_0) + d'(x_0)u + \tfrac{1}{2}d''(x_0)u^2 + o(u^2).$$

После перехода к локальным координатам и устранения линейного члена посредством нормировки по касательной ведущий нелинейный вклад становится квадратичным. Именно это создаёт геометрическую связь с параболическим исходным классом. Связь является локальной и не должна превращаться в утверждение о полном тождестве двух семейств.

11.6. Связь с псевдогиперболоидами: компактная и открытая логика исходных профилей

Связь с псевдогиперболоидами следует формулировать ещё осторожнее. Эллиптическая и гиперболическая геометрии формально родственны благодаря различию знака квадратичной формы: компактная эллиптическая дуга и открытая гиперболическая ветвь принадлежат общему семейству конических зависимостей. Но в конструктивной теории псевдоповерхностей это формальное родство не означает, что псевдоэллипсоид является предельным случаем псевдогиперболоида или наоборот.

Гораздо важнее следующее различие. Псевдогиперболоидная ветвь обладает логикой открытых рупоров и центральных кольцевых зон, связанных с гиперболическим исходным профилем. Псевдоэллипсоидная ветвь имеет компактную составную основу с параметром h_1. Поэтому обе используют C_R и Merge, но порождают различные морфологические паспорта.

Если в будущих работах будет введён строгий предельный переход между гиперболической и эллиптической ветвями, его следует оформить отдельной теоремой с явной нормировкой и контролем области определения. Здесь корректно ограничиться более скромным утверждением: это разные реализации исходных профилей в рамках одного интервально-рекурсивного аппарата.

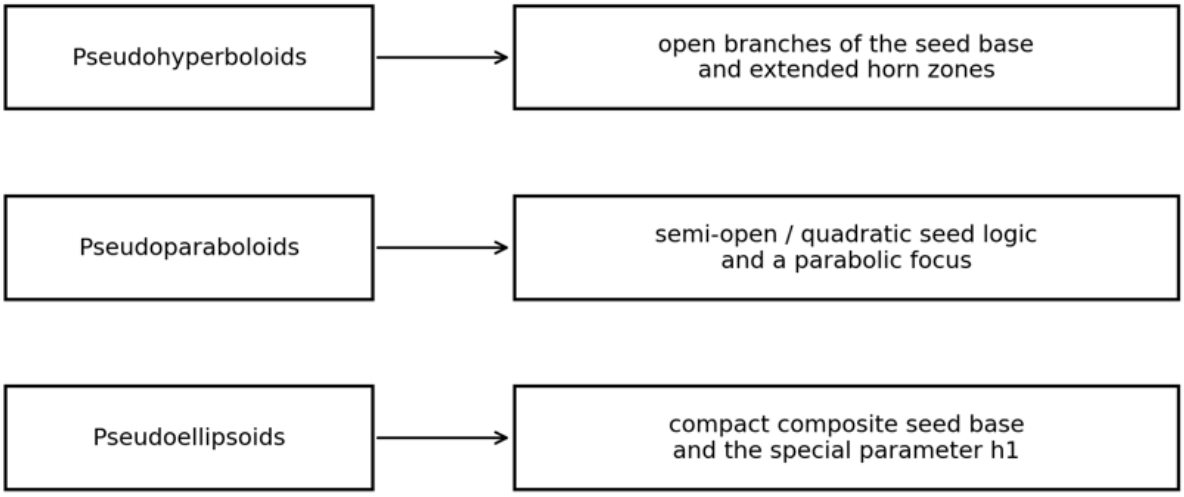

Рисунок 11.5. Различия трёх логик исходных профилей. Общий аппарат сохраняется, но носители, фокальные ориентиры и морфологические признаки различаются.

11.7. Общие черты трёх ветвей

Общей прежде всего является конструктивная последовательность: выбирается d(x), строится второй порядок $I_2(x) = [0, d(x)]$, смещения применяются через C_R, после каждого шага выполняется Merge, результатом становится Ω_n, а при рядной компоновке — $\Omega_{n,m}$.

Другое общее свойство — необходимость различать формальные ветви и эффективные компоненты Merge. Во всех трёх семействах формальное дерево может содержать больше ветвей, чем остаётся компонент после объединения. Поэтому физическую или волновую постановку следует строить на эффективной области, а не на формальном дереве.

Общей является и безразмерная логика: для каждой ветви выделяются параметры исходной формы, нормированные смещения, рядные параметры и волновые инварианты. Это позволяет сравнивать разные масштабы и подготавливать критерий C6 будущей верификации.

Наконец, совпадает эпистемологический статус первого тома каждой ветви: геометрию можно построить и доказать, тогда как волновые эффекты необходимо проверять отдельно.

11.8. Отличия трёх ветвей

Различия начинаются с исходного профиля: гиперболическая, параболическая и эллиптическая ветви задают разные радиальные законы. Общий оператор C_R не делает объекты тождественными; он лишь задаёт единый способ рекурсивного развития уже выбранной исходной функции.

Фокальные ориентиры также различны. Для псевдогиперболоидов естественны гиперболические фокальные структуры и экваториальные кольцевые зоны. Для псевдопараболоидов важны параболический фокус и раскрытие параболической геометрии. В псевдоэллипсоидах существенны пары фокусов исходных четвертьэллиптических сегментов, их возможные совпадения, трёхфокальное подсемейство и параметр h_1.

Различаются и сингулярности границы. Эллиптическая ветвь имеет особые режимы стыка, окна и перекрытия, которые после вращения создают круговые кромки, горловины, края апертур и страты, не встречающиеся в той же форме в других ветвях.

Будущие волновые постановки также могут различаться. Даже при построении общим аппаратом поля в трёх геометриях способны вести себя по-разному. Это вопрос последующей численной и экспериментальной проверки, а не терминологии.

11.9. Научный статус сравнительной связи

Сравнительная связь трёх семейств доказательна только на геометрическом уровне. Показано, что все ветви описываются общим аппаратом: исходный профиль, I_2, C_R, Merge, Ω_n и $\Omega_{n,m}$. Одновременно установлено, что псевдоэллипсоидная ветвь имеет собственную исходную специфику и не является классическим эллипсоидом.

На данном этапе эта связь геометрическая. Волновая эквивалентность ветвей, локализация, направленность и перенос спектральных свойств между ними не утверждаются и относятся к будущей программе C1–C8.

Такое разграничение укрепляет архитектуру серии и предотвращает превращение геометрии в неподтверждённую физическую декларацию.

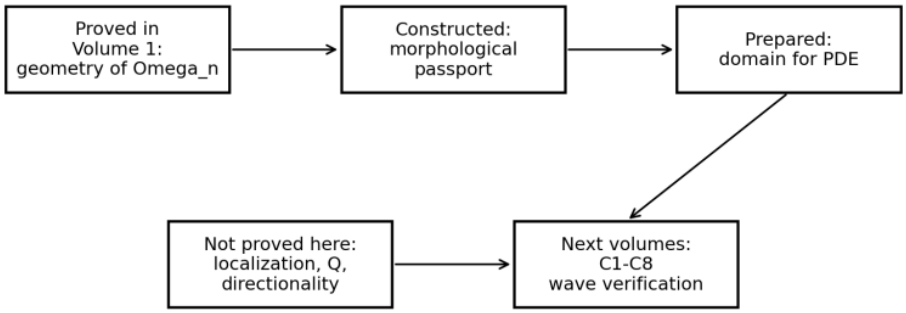

Рисунок 11.6. Граница между доказанной геометрической связью триады и будущими волновыми гипотезами. Первый том строит области; программа C1–C8 должна проверить физические эффекты.

11.10. Выводы

Псевдоэллипсоиды высших порядков занимают место эллиптической ветви общей интервально-рекурсивной теории псевдоповерхностей. Их родство с псевдогиперболоидами и псевдопараболоидами определяется не внешним сходством изображений, а общим аппаратом $I_2 \to C_R \to \text{Merge} \to \Omega_n$.

Эллиптическая ветвь сохраняет собственную специфику: составную исходную геометрию из двух четвертьэллиптических сегментов, параметр h_1, компактный осевой носитель, особые режимы стыка, окна и перекрытия, характерные кромки и граничные страты.

Связь с псевдопараболоидами следует понимать как локальную параболическую аппроксимацию гладких участков, а не тождество полных областей. Связь с псевдогиперболоидами — как родство исходных конических классов и общего рекурсивного аппарата, а не доказанную физическую или спектральную эквивалентность.

Главный результат состоит в том, что три монографии серии можно представить как ветви единой конструктивной геометрии. Теория псевдоэллипсоидов завершает первичную геометрическую триаду, подготовленную к дальнейшей волновой верификации C1–C8.

12. Заключение

12.1. Геометрическая основа псевдоэллипсоидной ветви завершена

Настоящий том завершает формирование фундаментальной геометрической основы программы «Геометрическая волновая инженерия», вводя псевдоэллипсоиды высших порядков в качестве третьей, заключительной ветви первичной конструктивной триады псевдоповерхностей.

Триада теперь представлена псевдогиперболоидами, псевдопараболоидами и псевдоэллипсоидами. Они различаются исходными профилями, фокальными ориентирами, режимами носителей, граничными стратами и геометрической морфологией, но объединены общим конструктивным путём: от базовой образующей к радиальному интервальному состоянию, от него — к рекурсии, а затем через Merge — к эффективной области.

В отличие от классического проектирования резонаторов, где инженер обычно оптимизирует размеры уже заданной гладкой формы, разработанная теория формулирует алгоритмическую геометрию внутренних областей. Осесимметричные области Ω_n и $\Omega_{n,m}$ порождаются не простым вращением одной гладкой кривой, а конечным правилом рекурсивной интервальной алгебры.

12.2. Создан аппарат интервально-рекурсивной геометрии

Теория переведена с языка визуальных ветвей на более строгий язык интервальных состояний $I_n(x)$. Определён рекурсивный оператор C_R и формализована канонизирующая операция Merge:

$I_2(x) = [0,d(x)]$;

I_{k+1}(x) = Merge(⋃ C_R(I_k(x))).

Существенный результат состоит в том, что Merge обеспечивает математическую корректность эффективной расчётной области. Экспоненциально растущее формальное дерево ветвей превращается в конечное семейство реальных радиальных зон, попарно разделённых после канонизации.

Различение формальных ветвей и эффективных интервалов — один из методологических центров тома. Формальные ветви сохраняют историю построения; интервальное состояние после Merge задаёт действительную внутреннюю область. Поэтому объект дальнейших вычислений — не декоративное дерево формул и не внешний силуэт, а эффективная область Ω_n.

12.3. Установлены основные свойства псевдоэллипсоидных областей

В томе установлены базовые математические свойства построенного класса. Merge определена как каноническая операция на конечных объединениях замкнутых интервалов. Зафиксированы неотрицательность и ограниченность радиальных состояний. Показана конечность числа компонент при любом конечном рекурсивном шаге. Для конечных исходных параметров установлены компактность и ограниченность пространственных областей Ω_n и $\Omega_{n,m}$.

Доказательную основу теории образуют следующие результаты: рекурсивное построение $I_n(x)$ корректно определено для каждого конечного n; число формальных ветвей ограничено 2^{n-2}; число эффективных компонент Merge не превышает число формальных ветвей; радиальный размер удовлетворяет оценке $M_n \le M_2 + \Sigma R_k$; рядные области остаются ограниченными при конечных m и h_row.

Эти результаты принадлежат конструктивной геометрии. Они не зависят от того, подтвердит ли последующая акустическая, электромагнитная, оптическая или квантово-волновая проверка определённые полевые эффекты. Они гарантируют, что передаваемый в такую проверку объект математически корректно определён, конечен, воспроизводим и пригоден для дискретизации.

12.4. Формализовано независимое пространство параметров

Показано, что псевдоэллипсоиды имеют собственный набор независимых управляющих параметров, не сводимый к гиперболической либо параболической ветви теории.

Параметр K = b/a задаёт тип исходной эллиптической геометрии: горизонтальный, вертикальный или предельный круговой (сферический) случай. Параметр h_1 управляет топологией соединения двух четвертьэллиптических дуг, создавая центральный стык, экваториальное окно либо перекрытие с верхней огибающей. Параметр h определяет уровень оси вращения и реальный радиус концевого раскрытия. Смещения R_k управляют формированием рекурсивной многозонной архитектуры. Параметры m и h_row определяют осевое размещение и возможную связность рядной системы $\Omega_{n,m}$.

Разделение ролей принципиально: K, h_1, h, offsets, m и h_row действуют на разных конструктивных уровнях. При их смешении исходный тип путают с рекурсией, рекурсию — с рядной компоновкой, а рядную компоновку — с порядком. Каноническая формулировка приписывает каждому параметру собственную геометрическую функцию.

12.5. Уточнён дифференциально-геометрический статус

Уточнён статус кривизны границы псевдоэллипсоида. На регулярных гладких фрагментах активной поверхности вращения при $\psi > 0$ и профиле класса C^2 гауссова кривизна определяется:

$$K_G(x) = -\psi''(x)/[\psi(x)(1 + \psi'(x)^2)^2].$$

Для гладких эллиптических фрагментов образующей это выражение даёт отрицательную гауссову кривизну. Вместе с тем граница не рассматривается как глобально гладкая оболочка. Центральные стыки, полюса, экваториальные кромки, кромки огибающей перекрытия, осевые вырождения и швы Merge трактуются как страты эффективной стратифицированной границы.

Это существенное научное уточнение. Формулировка «отрицательная кривизна» не используется как непроверенный лозунг: она относится лишь к участкам применимости дифференциально-геометрической формулы. Там, где гладкость нарушена, применяется стратифицированное описание вместо искусственного приписывания точке или кромке значения кривизны гладкой поверхности.

12.6. Введены рядные системы и дефекты перекрытия

Теория расширена от одиночной области Ω_n к рядным системам $\Omega_{n,m}$. Ряд представляет собой конечное объединение сдвинутых вдоль общей оси копий уже построенного псевдоэллипсоидного объёма:

$$\Omega_{n,m} = \bigcup_{j=0}^{m-1}(\Omega_n + \Delta_j e_x).$$

Знаковый параметр h_row различает раздельные копии, предельный контакт и перекрытие. При $h_{row} < 0$ общий объём обычно меньше суммы объёмов изолированных экземпляров. Это обосновывает введение дефекта:

$$\Delta V_{n,m} = mV_n - V_{n,m}.$$

Рядная конструкция задаёт геометрический класс областей, в которых в дальнейшем можно формулировать и проверять волновую связь, спектральное расщепление и вывод энергии.

12.7. Зафиксированы безразмерные инварианты и масштабная инвариантность

Введено безразмерное построение класса псевдоэллипсоидов. Геометрические инварианты включают K, $\chi = h_1/a$, $\eta = h/a$, $\gamma_k = R_k/a$, $\eta_row = h_row/a$, порядок n и число элементов ряда m. Они определяют безразмерный геометрический паспорт конфигурации.

Теорема масштабной инвариантности утверждает, что умножение всех линейных параметров на общий положительный коэффициент s не изменяет нормированную форму, интервально-рекурсивную структуру, канонизацию Merge, компонентную структуру и морфологический тип. Размерные длины, площади и объёмы масштабируются соответственно как s, s^2 и s^3.

Результат является геометрической основой будущего критерия C6 и позволяет содержательно сравнивать конфигурации разного абсолютного масштаба. Волновое подобие дополнительно требует совпадения волновых инвариантов, уравнений, материальных допущений, граничных условий и способа возбуждения.

12.8. Чего настоящий том не утверждает

Сила работы заключается не только в установленных результатах, но и в сознательном отказе от неподтверждённых заявлений.

Настоящий том не доказывает локализацию волнового поля, существование спектральных окон, высокую добротность, направленный вывод энергии, универсальность для различных физических типов волн, инженерное превосходство над классическими формами либо окончательную применимость какой-либо технологии. Эти положения остаются гипотезами, целями последующих томов или задачами программы C1–C8.

Такое ограничение не является слабостью теории. Оно служит условием её научной устойчивости. Работа строит геометрический объект, рекурсивный аппарат, стратифицированную границу и инвариантную конструкцию, подготавливая область к физическому моделированию, а не заменяя моделирование декларацией.

12.9. Роль тома в серии

После завершения настоящего тома геометрическая часть первичной триады ГВИ сформирована. Псевдогиперболоиды, псевдопараболоиды и псевдоэллипсоиды теперь составляют набор порождённых исходными профилями рекурсивных семейств псевдоповерхностей, описываемых единым языком.

Поэтому настоящий том следует рассматривать не как предварительный эскиз, а как фундаментальную монографию эллиптической ветви. Он вводит третий исходный класс, специфический параметр h_1, рекурсию высших порядков, рядные сборки, уточнённую геометрию кривизны и стратификации, а также безразмерную основу сравнения и масштабного анализа.

Естественное продолжение — не изобретение ещё одной геометрической фигуры, а волновая верификация уже построенной триады. Она предусматривает постановку электромагнитных, акустических, оптических и иных волновых задач на Ω_n и $\Omega_{n,m}$, сопоставление с классическими контрольными геометриями и проверку либо опровержение критериев C1–C8.

12.10. Итоговое положение

Теория псевдоэллипсоидов высших порядков завершает первый геометрический цикл Геометрической волновой инженерии. Она показывает, что эллиптический исходный класс может быть продолжен от псевдоэллипсоида второго порядка до полной иерархии рекурсивных внутренних областей и рядных систем.

Главный научный результат тома — построение воспроизводимого геометрического аппарата: составная эллиптическая исходная образующая, интервальные состояния, рекурсивные смещения, канонизация Merge, эффективные области Ω_n и $\Omega_{n,m}$, стратифицированные границы и безразмерные инварианты.

Том формулирует точное, научно обоснованное утверждение: псевдоэллипсоиды высших порядков представляют собой корректно определённый конструктивно-геометрический класс, подготовленный к строгой волновой верификации.

Независимо от того, подтвердят или опровергнут будущие работы предлагаемые волновые гипотезы в рамках C1–C8, настоящий том останется воспроизводимой геометрической основой такой проверки.

Следовательно, работа завершает конструктивную геометрию псевдоэллипсоидной ветви и открывает следующий этап программы — переход от рекурсивной геометрии к проверенной волновой физике.

Приложения

Приложение A. Обозначения и параметры

A.1. Основные геометрические параметры

a — продольная полуось исходного эллипса; размерная величина, измеряемая в единицах длины. Определяет масштаб базовой образующей.

b — поперечная полуось исходного эллипса; размерная величина, измеряемая в единицах длины. Вычисляется как $b = aK$.

K — безразмерное отношение полуосей $K = b/a$. Ключевой параметр, разделяющий типы псевдоэллипсоидов: при $K < 1$ формируется горизонтальный тип, при $K > 1$ — вертикальный.

h_1 — действительный параметр размерности длины, определяющий взаимное расположение двух четвертьэллиптических ветвей. От него зависят режимы исходной образующей: стык, окно либо перекрытие.

h — неотрицательное число размерности длины, задающее смещение уровня оси вращения. Определяет значение $R = b + h$.

R — положительная размерная величина, уровень оси вращения. Входит в определение радиальной функции $d(x) = \max(R - y(x), 0)$.

x — действительная осевая координата меридионального сечения, измеряемая в единицах длины; используется при двумерном и трёхмерном построении.

r — неотрицательная радиальная координата, расстояние от оси x в меридиональном сечении, измеряемое в единицах длины; определяет интервалы $[\alpha, \beta]$.

φ — угловая координата в радианах, угол вращения вокруг оси x; используется при построении трёхмерной поверхности вращения.

A.2. Типы псевдоэллипсоидов по параметру K

Горизонтальный тип определяется $K < 1$. Геометрически соответствует исходным эллипсам, вытянутым вдоль оси x; является одним из двух основных режимов настоящего тома.

Вертикальный тип определяется $K > 1$. Геометрически соответствует исходным эллипсам, вытянутым поперёк оси x; является вторым основным режимом.

Сферический контрольный случай — предельный режим $K = 1$, когда четверти эллипсов становятся четвертями окружностей. Используется в качестве аналитического предела при сравнении.

A.3. Параметр h_1 и режимы исходной образующей

Общий стык: $h_1 = 0$. Левая и правая четвертьэллиптические ветви сходятся в общей точке $x = 0$ и формируют центральную C^0-страту границы.

Экваториальное окно: $h_1 > 0$. На осевом интервале $[0, h_1]$ верхняя образующая задана как $y = 0$; после вращения формируется цилиндрический пояс.

Перекрытие четвертей: $-2a < h_1 < 0$. В области перекрытия порождающих ветвей используется их верхняя огибающая, после вращения формирующая угловую линию на границе.

Недопустимое сильное перекрытие: $h_1 \le -2a$. Этот режим соответствует чрезмерно сильному взаимному смещению центров четвертей и требует отдельной геометрической постановки. В первом томе не используется.

A.4. Функции исходной образующей

y_L(x) — левая четвертьэллиптическая ветвь, заданная формулой $b\sqrt{(1 - (x + a)^2/a^2)}$ на $x \in [-a, 0]$.

y_R(x) — правая четвертьэллиптическая ветвь, заданная $b\sqrt{(1 - (x - a - h_1)^2/a^2)}$ на $x \in [h_1, a + h_1]$.

y(x) — итоговая верхняя образующая, составленная из y_L(x) и y_R(x) с учётом режима, заданного h_1; её область определения — рабочий осевой интервал.

$\psi(x)$ — профиль поверхности вращения, определяемый на гладких фрагментах как $\psi(x) = R - y(x)$ при $\psi(x) > 0$.

d(x) — радиальная функция второго порядка $d(x) = \max(R - y(x), 0)$, определённая на всей осевой расчётной сетке.

A.5. Интервальная рекурсия

$I_2(x)$ — базовый интервал второго порядка: $I_2(x) = [0, d(x)]$.

R_k — k-е рекурсивное смещение, элемент списка offsets; задаёт величину переноса на соответствующем шаге.

C_R([lo, hi]) — оператор рекурсивного переноса интервала [lo, hi], порождающий два новых интервала: $[\max(R - hi, 0), \max(R - lo, 0)]$ и $[R + lo, R + hi]$.

$I_n(x)$ — семейство интервалов порядка n, полученное последовательным применением C_{R_k} к $I_2(x)$.

N_n — число формальных ветвей до Merge: $N_n = 2^{n-2}$.

M_n — верхняя радиальная оценка интервалов порядка n: $M_n \le M_2 + \Sigma R_k$.

offsets — упорядоченный список рекурсивных смещений $(R_1, \ldots, R_{n-2})$.

n — порядок псевдоэллипсоида: n = len(offsets) + 2.

A.6. Merge и радиальные компоненты

Merge — операция объединения пересекающихся или соприкасающихся интервалов, выполняющая склейку без ручного добавления соединений.

$\alpha_j(x)$, $\beta_j(x)$ — нижняя и верхняя границы j-й реальной компоненты после Merge.

lo_components, hi_components — массивы нижних и верхних границ компонент, используемые при построении двумерной и трёхмерной геометрии.

Формальная ветвь — интервал, полученный из рекурсивного дерева операторов C_R до применения Merge; отражает происхождение геометрической зоны.

Реальная компонента — интервал после Merge, непосредственно задающий пространственную область для последующих вычислений.

ε — численный порог допуска, используемый алгоритмом Merge для корректной обработки соприкасающихся и вырожденных интервалов.

A.7. Параметры рядной компоновки

m — целое число m ≥ 1, количество экземпляров псевдоэллипсоида в ряду.

width — осевая ширина одного экземпляра, вычисляемая как x_max − x_min по базовой сетке.

h_row — параметр межэкземплярного зазора или перекрытия размерности длины; не совпадает с h.

step — шаг между центрами соседних экземпляров: step = width + h_row.

Δ_j — осевое смещение j-го экземпляра: Δ_j = −j·step.

Режимы рядного размещения: h_row > 0 — экземпляры разделены зазором; h_row = 0 — предельный режим касания; h_row < 0 — экземпляры перекрываются с активацией Merge между соседними копиями.

A.8. Пространственные области

Ω_n — одиночная трёхмерная область порядка n, образованная вращением семейства интервалов $I_n(x)$ вокруг оси x.

$\Omega_{n,m}$ — рядная область порядка n из m экземпляров, полученная объединением m сдвинутых копий Ω_n с последующей глобальной Merge.

$\partial\Omega$ — граница области; включает внешние гладкие фрагменты, внутренние границы при наличии полостей, а также линии и поверхности, возникшие после Merge.

$\mathbb{R}^3$ — трёхмерное евклидово пространство, в котором определена геометрическая область.

S — поверхность вращения, представляющая гладкую страту границы либо всю границу.

A.9. Кривизна и стратификация границы

K_G — гауссова кривизна поверхности вращения. На гладких фрагментах при ψ > 0 вычисляется по $K_G = -\psi''/[\psi(1 + \psi'^2)^2]$.

H — средняя кривизна поверхности; упоминается как геометрическая характеристика, но подробно в настоящем томе не используется.

Гладкая дуга — C^2-гладкий фрагмент границы, соответствующий эллиптической части образующей. Для него K_G < 0 при ψ > 0.

Центральный стык — граничная сингулярность при $h_1 = 0$: точка в 2D или линия в 3D с непрерывностью C^0, но без непрерывности C^1.

Полюс — точка касания гладкой дуги с осью вращения при h = 0. При приближении по гладкой дуге |K_G| стремится к бесконечности.

Цилиндрический пояс — участок границы, возникающий при $h_1 > 0$ и характеризуемый нулевой гауссовой кривизной K_G = 0.

Угловая огибающая — граничная страта в режиме $h_1 < 0$, формирующаяся в точке смены активной ветви образующей.

Граница Merge — граница, возникающая после объединения интервалов операцией Merge и принадлежащая классу кусочно-гладких границ.

Приложение B. Литература

B.1. Официальные работы автора

[1] Хаустов В. И. Геометрическая волновая инженерия: псевдоповерхности переменной отрицательной гауссовой кривизны как геометрическая основа программируемого управления волнами. Zenodo, 2026. DOI: 10.5281/zenodo.19983291.

[2] Хаустов В. И. Геометрическая волновая инженерия кольцево-локализованных состояний в открытых псевдогиперболических полостях. Zenodo, 2026. DOI: 10.5281/zenodo.19944381.

[3] Хаустов В. И. Псевдогиперболоиды высших порядков с операцией Merge: геометрическая основа программируемого удержания волн. Zenodo, 2026. DOI: 10.5281/zenodo.19926174.

[4] Хаустов В. И. Геометрическая волновая инженерия. Теория псевдогиперболоидов высших порядков. Том 1. Конструктивная геометрия: рекурсивные построения и вычислительный аппарат. Zenodo, 2026. DOI: 10.5281/zenodo.20058260.

[5] Хаустов В. И. Геометрическая волновая инженерия. Теория псевдопараболоидов высших порядков. Том 1. Конструктивная геометрия: рекурсивные построения и вычислительный аппарат. Zenodo, 2026. DOI: 10.5281/zenodo.20022183.

B.2. Дифференциальная геометрия поверхностей

[6] do Carmo M. P. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, 1976.

[7] Spivak M. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Vols. 2–3. Publish or Perish, 1979.

[8] Gray A. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica. 2nd ed. CRC Press, 1997.

Источники [6]–[8] содержат классические дифференциально-геометрические сведения о гауссовой и средней кривизне, поверхностях вращения, первой и второй фундаментальных формах и описании негладких или сингулярных граничных страт.

B.3. Рекурсивная и фрактальная геометрия

[9] Hutchinson J. E. Fractals and self-similarity. Indiana University Mathematics Journal, 30(5), 713–747, 1981. DOI: 10.1512/iumj.1981.30.30055.

[10] Falconer K. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. 3rd ed. Wiley, 2014.

Источники [9]–[10] используются исключительно как методологический контекст рекурсивных построений и конечных итерационных схем. Настоящий том использует конечную интервальную рекурсию и Merge и не утверждает, что псевдоэллипсоиды являются фракталами в предельном математическом смысле.