Геометрическая волновая инженерия

Экваториально локализованные моды удержания в открытых псевдогиперболоидных полостях

Форма границы как механизм подавления хаотического выхода

Хаустов Владимир Игоревич

ORCID: 0009-0007-3657-2309

Лаборатория геометрической волновой инженерии https://vihrihaosa.ru/

Лицензия: CC BY 4.0

Дата публикации: 1 мая 2026 года

DOI: 10.5281/zenodo.20022183

Научно-технический перевод с английского языка.

Редакция, адаптированная для русскоязычного инженера-исследователя.

Оригинал: Khaustov, V. Geometric Wave Engineering of Ring-Localized States in Open Pseudo-Hyperbolic Cavities. https://doi.org/10.5281/zenodo.19944381

Аннотация

Для открытых макроскопических полостей характерны переходный хаос и хаотический выход траекторий [1, 2], которые ограничивают локальную интенсивность и могут способствовать тепловому разрушению в мощных оптических системах и устройствах удержания плазмы. В работе исследуется возможность подавления такого выхода за счёт геометрии в классе псевдогиперболических резонаторов, образованных вращением вокруг смещённой оси [3]. Вращение канонической гиперболы вокруг такой оси формирует открытую трёхмерную полость с пространственно изменяющимся радиусом и парой кольцевых фокальных зон над экваториальным зазором. Все длины выражены в безразмерных единицах, нормированных на опорный масштаб ξ; переход к физическим размерам осуществляется при фиксированном произведении $k_0\xi$ для рабочей длины волны. Для оптимальной топологии, найденной при сканировании параметров ($R = 20{,}0$; $a = 0{,}05$; $b = 0{,}50$), нестандартное стохастическое трассирование лучей без заданной последовательности отражений даёт глобальное удержание энергии 88,9 % и локальную концентрацию энергии $15{,}22 \pm 0{,}25$ % в области зазора. Указанная неопределённость обусловлена преимущественно систематическими факторами, а не статистикой Монте-Карло. Для интерпретации локализации за пределами геометрической оптики выведена эффективная одномерная модель Гельмгольца [4, 5] в адиабатических областях полости с граничными условиями Дирихле, соответствующими TM-поляризованным модам идеально проводящей полости. В главном порядке геометрически обусловленный потенциал масштабируется как $V_{eff} \propto 1/r(x)^2$ [4], создавая резко возрастающий барьер в рупорных областях и область низкого потенциала вблизи экватора. Редуцированная волновая модель предсказывает одномерную долю удержания около 14,5 %, то есть величину того же порядка, что и стохастическая лучевая модель. Эти показатели описывают разные наблюдаемые величины, поэтому близость их значений рассматривается как качественная согласованность, а не количественное совпадение. В пределах применимости редуцированной волновой модели и макроскопического лучевого приближения результаты указывают на механизм локализации, определяемый геометрией открытой пустой полости, и обосновывают дальнейшие полно-волновые электромагнитные расчёты и эксперименты.

Ключевые слова: открытые резонаторы; лучево-волновое соответствие; осесимметричные полости; редукция уравнения Гельмгольца; геометрически обусловленный потенциал; псевдогиперболоид; кольцевая локализация.

Содержание

Аннотация 2
1. Введение 4
2. Геометрия псевдогиперболоида второго порядка 4
3. Стохастическая лучевая динамика и подавление хаотического выхода 6
4. Эффективная волновая модель и геометрически обусловленный потенциал 7
5. Восстановление поля и избирательное удержание по поперечному порядку 9
6. Производные геометрические параметры управления и чувствительность к параметрам 10
7. Перспективы реализации на уровне устройств 12
8. Обсуждение 13
Литература 15

1. Введение

Управляемая локализация волновой энергии в открытых системах давно остаётся актуальной задачей физики волн, нелинейной оптики, резонаторной техники и управления плазменными волнами. В открытых макроскопических структурах, где длина волны мала относительно основных геометрических размеров, лучевая динамика обычно определяется переходным хаосом и хаотическим рассеянием [1, 2]. Без специально сформированных геометрических ограничений траектории исследуют доступное фазовое пространство и в конечном счёте выходят из полости, что ограничивает время пребывания энергии и достижимую локальную интенсивность.

Большинство известных способов локализации опирается на структурирование материала либо на почти замкнутые резонансные границы. Примерами служат резонаторы мод шепчущей галереи и фотонные платформы [6]. Несмотря на эффективность в соответствующих режимах, такие решения обычно зависят от дисперсии материалов, наномасштабного изготовления или граничных условий, существенно подавляющих радиационную открытость. Локализация за счёт одной лишь геометрии в открытых пустых объёмах исследована сравнительно слабо [3, 4], особенно в макроскопических полостях со сложным взаимодействием кривизны, апертуры и топологии каналов выхода.

Исследуется семейство резонаторов, полученных неосевым вращением канонической гиперболы вокруг смещённой оси. В результате возникает открытая псевдогиперболическая полость конечной продольной протяжённости с особыми точками замыкания и двумя кольцевыми геометрическими фокальными зонами над экваториальным зазором. Термин «геометрически управляемое удержание волн» означает создание структур, удерживающих волны, только посредством макроскопической формы границы — без структурирования материала и элементов масштаба длины волны. Основной результат состоит в том, что такая геометрия способна подавлять хаотический выход и формировать выраженные кольцевые локализованные состояния вблизи экватора. Это показано двумя взаимодополняющими подходами: нестандартным стохастическим трассированием лучей в макроскопическом пределе [7] и эффективной редуцированной волновой моделью на основе скалярного уравнения Гельмгольца [5]. В пределах применимости, подробно рассматриваемых в разделах 3 и 4, результаты свидетельствуют о возможности длительного существования локализованных состояний в открытой рассеивающей системе благодаря специально выбранной макроскопической геометрии.

2. Геометрия псевдогиперболоида второго порядка

Все величины далее безразмерны. Длины нормированы на опорный масштаб ξ; переход к физическим размерностям соответствует замене $\xi \to \xi_phys$ при сохранении безразмерного произведения $k_0\xi$ на выбранной рабочей длине волны. Например, ξ можно связать с физическим экваториальным радиусом как R_phys/R, где в работе принято R = 20,0.

Образующая представляет собой каноническую гиперболу в плоскости Oxy:

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1,$$

которая допускает параметризацию:

$$y(x) = b \cdot \sqrt{(x^2/a^2 - 1)}, \quad |x| \geq a.$$

Интервал (−a, a) исключён из образующей и физически образует экваториальный зазор шириной 2a. Определяющая особенность полости состоит в том, что образующая вращается не вокруг

собственной оси симметрии, а вокруг смещённой прямой y = R. Поэтому локальный радиус вращения равен:

$$r(x) = |R - y(x)| = |R - b \cdot \sqrt{(x^2/a^2 - 1)}|.$$

Поскольку ветви гиперболы асимптотически расходятся, вращаемая структура замыкается при конечной продольной координате x = ±L, где профиль пересекает ось вращения и локальный радиус обращается в нуль:

$$L = a \cdot \sqrt{(1 + (R/b)^2)}.$$

Следовательно, физическая область полости по координате x задаётся множеством $x \in [-L, -a] \cup [a, L]$. Геометрические фокусы исходной гиперболы имеют координаты:

$$x = \pm c, \quad c = \sqrt{(a^2 + b^2)}.$$

При неосевом вращении эти две фокальные точки порождают два пространственных кольца постоянного радиуса r_foc = R. Они называются геометрическими фокальными кольцами: их построение наследуется от двумерных фокусов гиперболы, однако в общем случае они не являются волновыми фокусами вращённой полости, поскольку традиционное оптическое фокальное свойство не сохраняется при неосевом вращении образующей. В настоящей работе эти кольца используются исключительно как геометрические ориентиры экваториальной зоны концентрации.

Для исследуемой оптимальной топологии R = 20,0; a = 0,05; b = 0,50 получаем k = b/a = 10, c ≈ 0,5025 и L ≈ 2,0006. Геометрия представлена на рис. 1, а вычисленные параметры — в таблице 2.

Таблица 1. Перекрёстная проверка оптимальной топологии резонатора

Ранг	Экваториальный радиус R	Полуширина зазора a	Параметр формы b	Удержание энергии (%)	Плотность в зазоре (%)
9	20,0	0,05	0,50	88,9	15,22

Таблица 2. Производные геометрические и волновые параметры оптимальной топологии (безразмерные)

Параметр	Обозначение	Значение
Экваториальный радиус	R	20,0
Полуширина зазора	a	0,05
Параметр формы	b	0,50
Асимптотическое отношение	k = b/a	10,0
Фокальная координата	$c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$	0,5025
Координата замыкания	$L = a \cdot \sqrt{(1 + (R/b)^2)}$	2,0006
Радиус геометрического фокального кольца	r_foc	20,0
Первый корень функции Бесселя (TM_{01}, Дирихле)	$\mu_{0,1}$	2,4048
Минимальный эффективный потенциал	$V_{min} = (\mu_{0,1}/R)^2$	0,01446

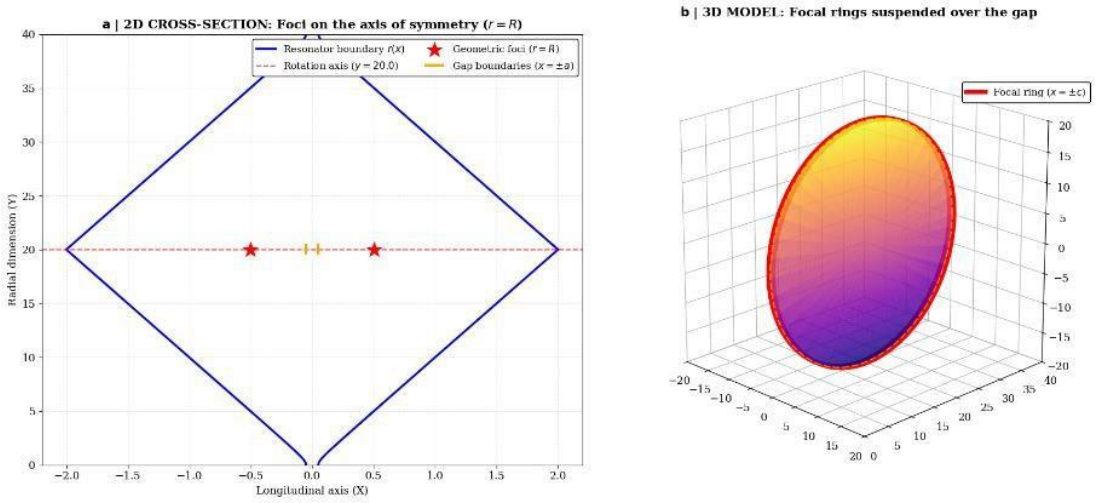

Рис. 1. Геометрия псевдогиперболоида второго порядка.

3. Стохастическая лучевая динамика и подавление хаотического выхода

Для исследования макроскопического предела полость анализируется методом стохастического трассирования лучей без заранее заданной последовательности отражений, с зеркальным отражением от границы [7]. Лучевое описание справедливо, когда длина волны мала по сравнению со всеми существенными геометрическими масштабами. Для рассматриваемой конфигурации наиболее строгое условие имеет вид:

$$\lambda \ll a \quad (\text{в размерных единицах } k_0 \cdot a \gg 1).$$

Оно строже глобального условия $\lambda \ll R$, поскольку полуширина зазора a является наименьшим геометрическим масштабом полости. Все приведённые ниже результаты лучевой динамики следует интерпретировать именно в этом режиме.

Характерной геометрической особенностью псевдогиперболоида является расходимость наклона границы у краёв экваториального зазора:

$$|r'(x)| \to \infty \text{ при } |x| \to a^{+}.$$

На этих краях граница подходит к экваториальной плоскости по нормали, что подавляет касательные каналы выхода и способствует перенаправлению скользящих лучей обратно в объём полости. Подчеркнём: это не подлинный сингулярный барьер в волново-механическом смысле, а следствие ориентации границы, влияющее лишь на кинематику скользящих лучей.

Для оптимальной геометрии (R = 20,0; a = 0,05; b = 0,50) моделирование Монте-Карло с 10^6 лучей показывает выраженную долгоживущую локализацию вблизи экваториальной кольцевой области. Вместо быстрого выхода через рупорообразные отверстия многие траектории многократно возвращаются в окрестность зазора и формируют долгоживущие структуры в фазовом пространстве. На соответствующем сечении Пуанкаре они выглядят как компактные островки на фоне более широкой хаотической области, указывая на неоднородное распределение времени выживания, организуемое геометрией полости.

Для количественного описания используются две взаимодополняющие наблюдаемые величины на фиксированном интервале наблюдения: глобальное удержание энергии η_{global} — доля

траекторий, остающихся внутри полости; локальная плотность в зазоре η_ray — нормированная доля плотности траекторий, накопленная в экваториальной области зазора.

Для оптимальной топологии получены соответственно 88,9 % и 15,22 ± 0,25 % (табл. 1). Неопределённость ±0,25 % определяется главным образом систематическими факторами (выбором интервала наблюдения, исходного распределения углов ввода, определением области зазора) и существенно превосходит чисто статистическую погрешность Монте-Карло $\sqrt{(p(1-p)/N)} \approx 0{,}04$ % при $N = 10^6$. По сравнению с почти однородным фоном открытого рассеяния значение η_ray соответствует значительному усилению пространственной концентрации в зазоре.

Механизм лучевой динамики обобщён на рис. 2: показаны наклон границы, локализованные структуры фазового пространства и результирующий показатель концентрации. Производные геометрические параметры, определяющие такое поведение, подробнее рассматриваются на рис. 5.

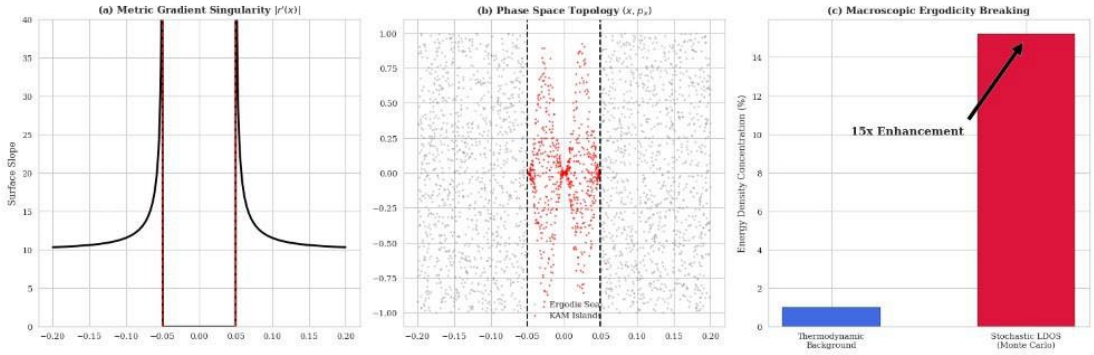

Рис. 2. Лучевая динамика и кольцевая локализация в открытом псевдогиперболоиде.

4. Эффективная волновая модель и геометрически обусловленный потенциал

Для интерпретации наблюдаемой локализации за пределами геометрической оптики рассматривается скалярное уравнение Гельмгольца [4, 5]:

$$\nabla^2\Psi + k_0^2\,\Psi = 0,$$

где k_0 — безразмерное волновое число, связанное с выбранным масштабом ξ. Приняты граничные условия Дирихле $\Psi|_{\partial\Omega} = 0$, соответствующие TM-поляризованным модам идеально проводящей полости. В этой постановке наименьшее поперечное собственное значение локального цилиндрического сечения определяется первым нулём J_0: $\mu_{0,1} \approx 2{,}4048$ [9]. Аналогичный анализ TE-поляризации потребовал бы замены $\mu_{0,1}$ первым нулём производной J'_0, не изменяя качественной картины.

В адиабатических областях, где локальный радиус вращения r(x) меняется медленно относительно поперечного модового масштаба, используется разделённое приближение:

$$\Psi(x, \rho, \varphi) \approx \Phi(x) \cdot J_0(\mu_{0,1}\,\rho / r(x)),$$

удовлетворяющее условию Дирихле на границе ρ = r(x). Подстановка в уравнение Гельмгольца и проекция на поперечную моду в главном порядке медленного изменения r(x) дают эффективное одномерное уравнение:

$$d^2\Phi(x)/dx^2 + [k_0^2 - V_{eff}(x)]\,\Phi(x) = 0,$$

с геометрически обусловленным эффективным потенциалом [4]:

$$V_eff(x) = (\mu_{0,1} / r(x))^2.$$

Это выражение является адиабатической оценкой главного порядка. Поправки следующих порядков, связанные с продольным изменением поперечной моды (слагаемые порядка $|r'(x)|^2/r(x)^2$ и $r''(x)/r(x)$, а также диагональные поправки типа Борна—Оппенгеймера), не учитываются. Они малы в экваториальной области, где $r(x) \approx R$ и $|r'(x)|$ умеренны, но приближение нарушается около краёв зазора $x = \pm a$, где $|r'(x)| \to \infty$, и точек замыкания $x = \pm L$, где $r(x) \to 0$. Поэтому редуцированная модель не применяется непосредственно на сингулярных интерфейсах.

Для применимости анзаца поперечной моды дополнительно необходимо, чтобы локальное цилиндрическое сечение поддерживало основную TM-моду:

$$k_0 \cdot r(x) \gtrsim \mu_{0,1} \approx 2{,}4.$$

В экваториальной области условие выполняется с запасом ($k_0 R \gg \mu_{0,1}$ при разумной рабочей длине волны), однако нарушается в конечной окрестности точек замыкания $x = \pm L$, где радиус становится слишком мал. Поэтому вводится радиус регуляризации r_min, ниже которого редуцированная модель не применяется, а соответствующий продольный интервал рассматривается как классически запрещённая область с затухающим полем. Проверено, что рассчитанная доля удержания устойчива к изменению r_min в физически разумных пределах; точная зависимость приведена в дополнительных материалах.

В экваториальной области при $r(x) \approx R$ потенциал минимален:

$$V_min = (\mu_{0,1} / R)^2 \approx 0{,}01446,$$

тогда как в рупорных областях при уменьшении $r(x)$ эффективный потенциал возрастает. Следовательно, в пределах адиабатического приближения главного порядка псевдогиперболоид действует как геометрически обусловленная ловушка с низкопотенциальной экваториальной зоной и сильно отталкивающими внешними рупорами. Эта цепочка геометрического управления показана на рис. 5 через зависимости $r(x)$, $|r'(x)|$, $V_eff(x)$ и кривизну образующей.

Глобальная волновая огибающая строится посредством явного численного согласования граничных условий: на интерфейсах $x = \pm a$ обеспечивается непрерывность Φ и $d\Phi/dx$; приближение ВКБ [8] применяется только в медленно меняющихся адиабатических областях рупоров, но не на сингулярном интерфейсе зазора.

В результате модель даёт одномерную долю удержания:

$$\eta_wave = \int_{-a}^{a} |\Phi(x)|^2 \, dx \,/\, \int_{-L}^{L} |\Phi(x)|^2 \, dx \approx 0{,}145.$$

Принципиально важно, что η_wave и η_ray характеризуют разные физические наблюдаемые величины: η_ray представляет трёхмерную долю плотности траекторий в фазовом пространстве геометрической оптики, тогда как η_wave — одномерный интеграл продольной огибающей редуцированной волновой модели. Строгое соответствие требует дополнительных предположений (гладкая структура каустик, эргодический ввод, эквивалентность фазово-пространственных и модовых мер), не установленных в настоящей работе. Поэтому близость $\eta_ray \approx 0{,}152$ и $\eta_wave \approx 0{,}145$ трактуется как качественная согласованность двух независимых описаний одного геометрического механизма, а не как количественное совпадение. Строгое сопоставление оставлено для последующего полно-волнового электромагнитного моделирования. На рис. 3 показаны профиль эффективного потенциала и соответствующая удерживаемая волновая огибающая.

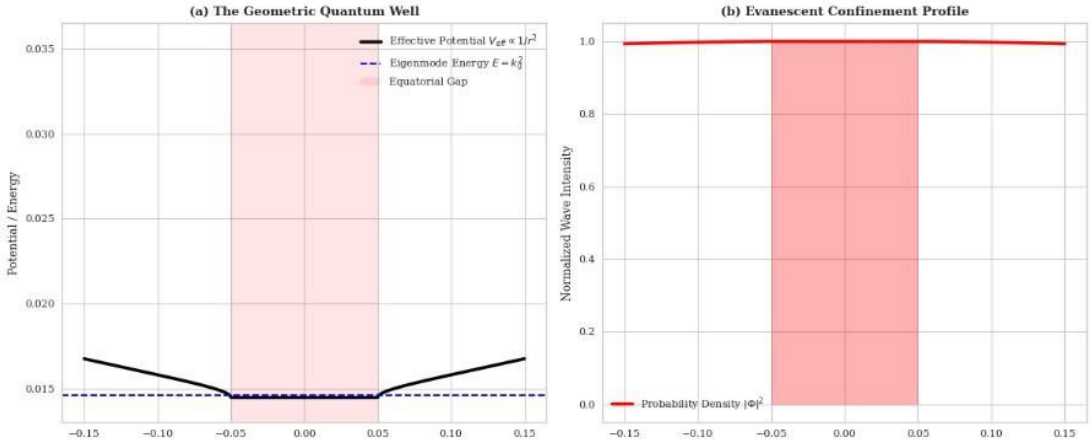

Рис. 3. Редуцированная волновая модель и геометрически обусловленное удержание.

5. Восстановление поля и избирательное удержание по поперечному порядку

Для визуализации локализованных состояний в физическом пространстве по эффективной волновой модели восстанавливается двумерное распределение интенсивности поля. Полученные карты демонстрируют выраженную концентрацию в экваториальной области для основного состояния типа TM_{01} и быстрое затухание в рупорных областях.

Для радиальных состояний более высокого порядка того же семейства с условиями Дирихле соответствующий корень функции Бесселя $\mu_{0,n}$ возрастает (например, $\mu_{0,2} \approx 5{,}52$; $\mu_{0,3} \approx 8{,}65$ [9]), поэтому потенциал главного порядка $V_eff \propto \mu_{0,n}^2/r(x)^2$ становится круче. В пределах применимости редуцированной модели это означает более высокий продольный барьер для старших радиальных состояний и избирательное удержание по поперечному порядку: более сильно удерживаемые состояния не обязательно возбуждаются преимущественно, но при наличии быстрее затухают за пределами экваториальной зоны. Количественные результаты для старших радиальных порядков в работе не приводятся; подробное исследование отложено до полно-волновых расчётов.

Перекрёстная проверка исследованных топологий показывает качественную согласованность стохастической лучевой картины и редуцированной волновой модели. Оптимальная геометрия из таблицы 1 относится к области высоких значений удержания и локализации. Соответствующие восстановления поля и тенденции перекрёстной проверки представлены на рис. 4.

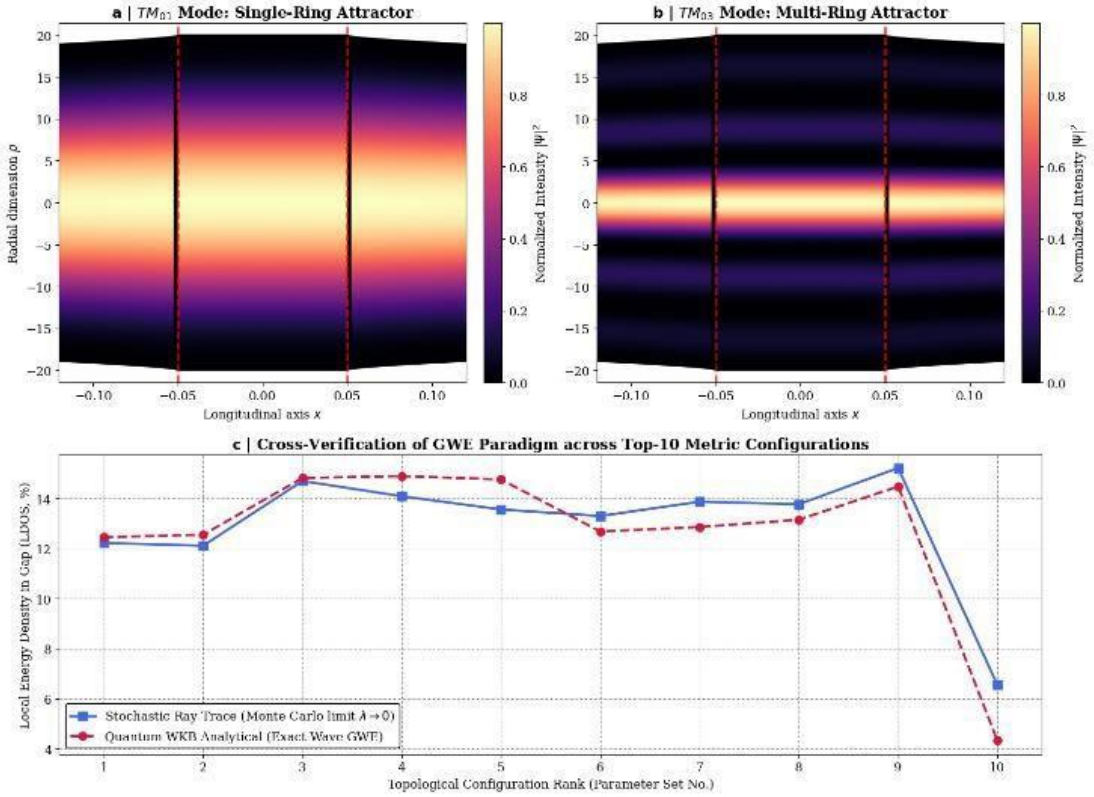

Рис. 4. Восстановление поля и геометрическая фильтрация мод.

6. Производные геометрические параметры управления и чувствительность к параметрам

Выявленный механизм локализации определяется не единственным геометрическим показателем, а последовательностью взаимосвязанных факторов, соединяющих исходную гиперболу с эффективным волновым барьером [3, 4]:

$$y(x) \rightarrow r(x) \rightarrow |r'(x)| \rightarrow V_eff(x) \rightarrow \text{кольцевая локализация.}$$

Для оптимальной топологии (R = 20,0; a = 0,05; b = 0,50) большой экваториальный радиус сочетается с узким центральным зазором и крутым гиперболическим сужением при k = b/a = 10. Одновременно формируются три благоприятных условия: широкая низкопотенциальная область около экватора; геометрия границы с нормальным подходом к краям зазора; резко возрастающие барьеры рупоров в приближении главного порядка по мере уменьшения r(x) к точкам замыкания x = ±L. Эти факторы подробно представлены на рис. 5.

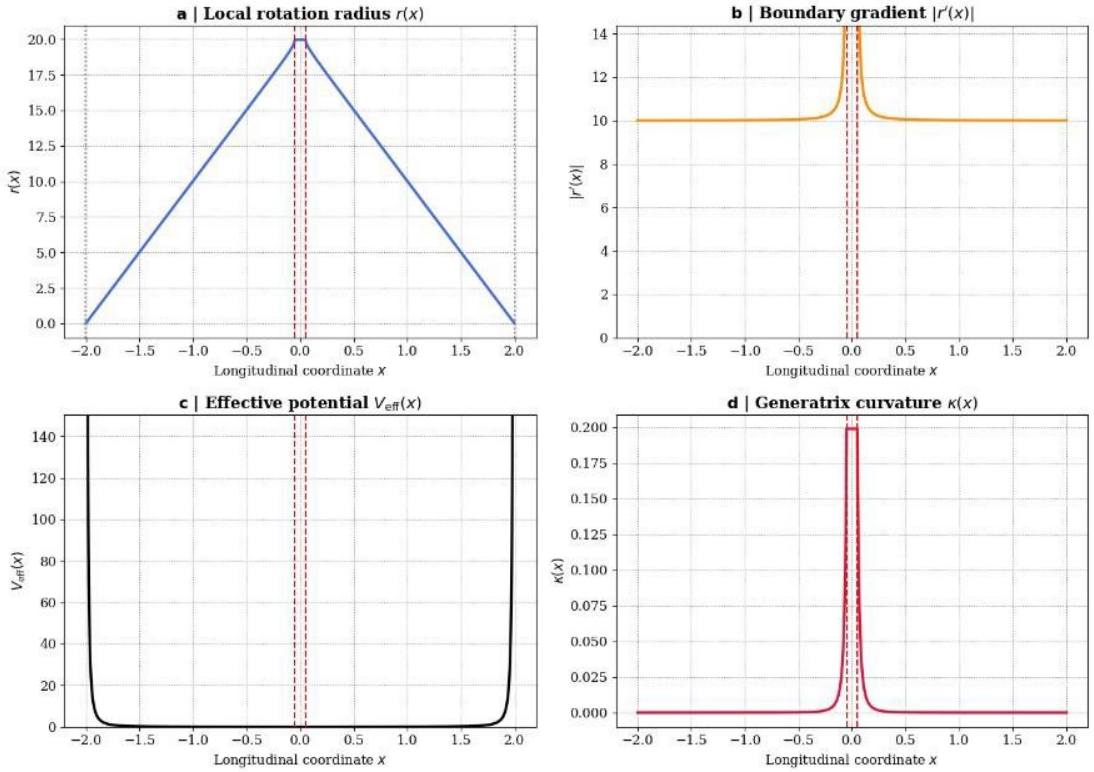

Рис. 5. Производные геометрические параметры управления псевдогиперболоида.

Чтобы определить, является ли наблюдаемая локализация тонко настроенным сингулярным случаем либо более устойчивым свойством псевдогиперболического семейства, исследуется чувствительность редуцированной волновой модели к изменениям основных геометрических параметров. Поскольку рис. 6 получен из одномерной редуцированной модели, его следует интерпретировать как карту чувствительности эффективного механизма локализации, а не как полную стохастическую или электродинамическую фазовую диаграмму.

Вводится показатель локализации редуцированной модели:

$$\eta_gap = \int_{-a}^{a} |\Phi(x)|^2 \, dx \, / \int_{-LL}^{LL} |\Phi(x)|^2 \, dx.$$

Результаты сканирования параметров представлены на рис. 6. Зависимость η_gap от a и b немонотонна: чрезмерно узкий зазор уменьшает доступный экваториальный объём, тогда как слишком широкий ослабляет удерживающее действие окружающих рупорных барьеров. Карта локализации в плоскости (a, b) показывает, что выбранная оптимальная геометрия находится внутри более широкой области локализации, а не в изолированной численной сингулярности. В пределах редуцированной модели это свидетельствует о структурной устойчивости механизма и целесообразности последующих полно-волновых исследований.

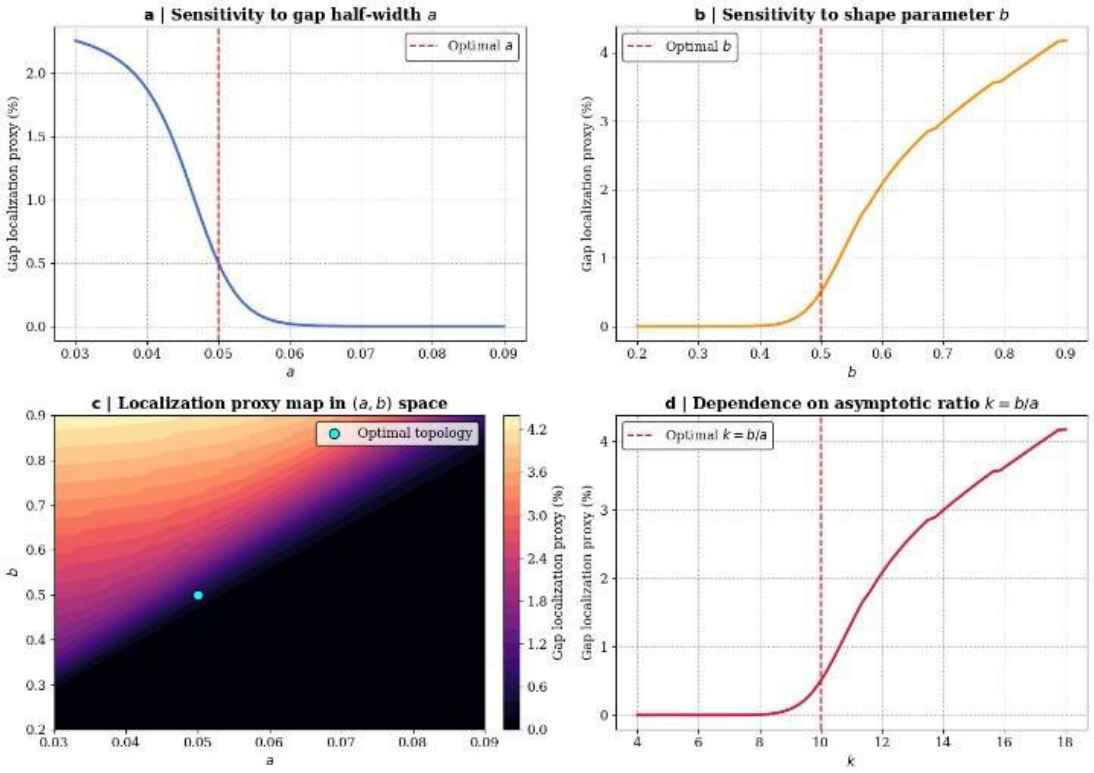

Рис. 6. Чувствительность к параметрам в окрестности оптимальной топологии.

7. Перспективы реализации на уровне устройств

Псевдогиперболическая архитектура допускает несколько физически мотивированных вариантов реализации. Ниже они рассматриваются как качественные концепции, требующие количественной проверки полно-волновым электромагнитным моделированием [10] и экспериментом.

(i) Возбуждение через один рупор. Сингулярные точки замыкания x = ±L заменяются небольшими срезами, образующими узкие рупорообразные входные горловины. Внешнее излучение, введённое через один рупор, многократно отражается в сужающемся псевдогиперболическом объёме и постепенно перенаправляется к экваториальной области. Длина среза должна быть мала по сравнению с L − c, чтобы сохранить отражающее сужение рупора.

(ii) Двусторонняя накачка через рупоры. Оба конца срезаются, что позволяет осуществлять симметричный ввод. Такая схема представляет потенциальный интерес для накачки активной среды, накапливающейся в экваториальной области максимального удержания. Поскольку локализованное состояние распределено вдоль одномерного кольца, а не сосредоточено в точке, архитектура может быть полезна там, где ограничивающим фактором является тепловая нагрузка в точечном фокусе [6].

(iii) Асимметричный вывод. Контролируемое нарушение двусторонней симметрии окружающих псевдогиперболических стенок — например, локальный срез одной ветви около экваториальной плоскости — способно прервать одну сторону удерживающего барьера и открыть предпочтительный канал вывода накопленного поля. Направленность такого вывода в принципе

определяется геометрией среза. Подробный электромагнитный анализ диаграммы излучения выходит за рамки работы и отнесён к полно-волновым исследованиям.

Все три варианта являются не готовыми инженерными проектами, а качественными геометрическими следствиями конструкции. Для их количественного подтверждения необходимы полно-волновые расчёты [10] и специализированные эксперименты.

8. Обсуждение

Представленные результаты указывают, что открытая макроскопическая полость может поддерживать долгоживущие кольцевые локализованные состояния только благодаря геометрии — без структурирования материала, почти замкнутых границ и элементов масштаба длины волны. Механизм основан на трёх согласованных геометрических факторах: (i) широкой экваториальной области пребывания с большим радиусом вращения $r(x) \approx R$; (ii) ориентации границы по нормали к краям зазора $x = \pm a$, подавляющей касательные каналы выхода скользящих лучей; (iii) постепенно сужающихся рупорных областях, заканчивающихся сингулярными точками $x = \pm L$ и формирующих в редуцированной модели главного порядка эффективный барьер для продольного распространения.

Неосевое вращение превращает два двумерных фокуса образующей гиперболы в два трёхмерных геометрических фокальных кольца радиуса R. Подчеркнём, что эти кольца наследуют только геометрическую конструкцию исходных двумерных фокусов и не выполняют функцию обычных волновых фокусов вращённой полости.

Волновой анализ дополняет лучевую картину. Редуцированная одномерная модель Гельмгольца с потенциалом главного порядка $V_{eff}(x) \propto 1/r(x)^2$ [4] объясняет предпочтительное расположение долгоживущих состояний вблизи экватора. Она даёт $\eta_{wave} \approx 14{,}5$ %, что сопоставимо по порядку величины со стохастическим лучевым результатом $\eta_{ray} = 15{,}22 \pm 0{,}25$ %. Как подчёркнуто в разделе 4, показатели относятся к разным наблюдаемым величинам, поэтому их численная близость рассматривается лишь как качественная согласованность двух независимых геометрических описаний. Для строгого количественного соответствия требуется полно-волновое электромагнитное моделирование.

Анализ чувствительности (рис. 6) также показывает, что оптимальная конфигурация лежит внутри структурно устойчивой области локализации, а не в изолированной численной сингулярности, в пределах применимости редуцированной модели. Для старших радиальных состояний то же приближение предсказывает более крутые эффективные барьеры и избирательное удержание по поперечному порядку.

Основные ограничения исследования:

• Одномерная редуцированная модель представляет собой адиабатическую оценку главного порядка и не учитывает поправки кривизны следующих порядков, межмодовую связь около краёв зазора $x = \pm a$ и нарушение анзаца поперечной моды у точек замыкания $x = \pm L$. Эти области обрабатываются соответственно численным согласованием границ и введением радиуса регуляризации r_{min}.

• Лучевые результаты предполагают $\lambda \ll a$ — более строгое условие, чем $\lambda \ll R$; волновая модель требует $k_0 r(x) \gtrsim \mu_{0,1}$ в экваториальной области.

• Полно-волновое электромагнитное моделирование в статье не проводилось. Согласованность η_ray и η_wave является лишь качественной перекрёстной проверкой, а не электродинамическим подтверждением.

• Концепции устройств из раздела 7 представляют качественные геометрические следствия построения и не получили количественной проверки.

С учётом этих ограничений открытая псевдогиперболическая полость рассматривается как нетривиальный пример геометрически управляемого удержания волн: тщательно выбранная макроскопическая форма, а не сложность материала или почти замкнутые границы, способствует долгоживущим кольцевым локализованным состояниям. Работа развивает геометрическую конструкцию, введённую в [3]. Предполагается, что подход может стимулировать исследование открытых полостей с нетривиальной топологией границы, включая кольцевые конфигурации усиления и другие резонаторы с протяжёнными фокальными зонами, при условии полно-волнового и экспериментального подтверждения.

Методы

Стохастическое трассирование лучей

Трассирование лучей без заданной последовательности отражений проводилось в трёхмерном псевдогиперболоидальном объёме из раздела 2. Лучи инициализировались согласно равномерному стохастическому распределению ввода и распространялись с зеркальными отражениями от границы [7]. Численная сходимость проверялась сопоставлением расчётов с 10^5, 10^6 и 10^7 лучей. Приведённые значения соответствуют ансамблю из 10^6 лучей. Неопределённость ±0,25 % преимущественно связана с систематическими факторами (интервалом наблюдения, начальным распределением углов ввода и определением области зазора), а не с формальной статистической ошибкой Монте-Карло $\sqrt{(p(1-p)/N)} \approx 0{,}04$ % при $N = 10^6$. Траектории, пересекавшие области замыкания $x = \pm L$, считались вышедшими. Глобальное удержание η_global и локальная плотность η_ray оценивались на фиксированном интервале наблюдения, как принято при анализе открытых хаотических систем [2].

Эффективная волновая модель

Одномерная редуцированная модель Гельмгольца [4, 5] построена в адиабатических областях полости, где радиус вращения $r(x)$ медленно меняется относительно поперечного модового масштаба, по аналогии с геометрически обусловленными потенциалами в ограниченных волновых системах [4]. Использованы условия Дирихле $\Psi|_{\partial\Omega} = 0$ для TM-поляризованных мод идеально проводящей полости. Поперечная мода приближалась основной функцией Бесселя $J_0(\mu_{0,1}\rho/r(x))$ при $\mu_{0,1} \approx 2{,}4048$ [9]. В уравнении продольной огибающей использован потенциал главного порядка $V_{eff}(x) = (\mu_{0,1}/r(x))^2$; поправки порядка $|r'(x)|^2/r(x)^2$, $r''(x)/r(x)$ и диагональные поправки типа Борна—Оппенгеймера отброшены.

Для применимости поперечного анзаца требуется $k_0 r(x) \gtrsim \mu_{0,1} \approx 2{,}4$. Условие выполняется во всей экваториальной области ($k_0 R \gg \mu_{0,1}$), но нарушается в конечной окрестности точек замыкания $x = \pm L$, где $r(x) \to 0$. Введён радиус регуляризации r_min, ниже которого редуцированная модель не применялась, а соответствующий продольный интервал рассматривался как классически запрещённая затухающая область. Проверено, что рассчитанная доля удержания нечувствительна к выбору r_min в физически разумных пределах.

Численное согласование на x = ±a обеспечивало непрерывность Φ и dΦ/dx; приближения ВКБ [8] применялись только в медленно изменяющихся рупорных областях и никогда — непосредственно через сингулярный интерфейс зазора.

Литература

[1] E. Ott, Chaos in Dynamical Systems, 2nd ed., Cambridge University Press (2002).

[2] E. G. Altmann, J. S. E. Portela, and T. Tél, Leaking chaotic systems, Reviews of Modern Physics 85, 869 (2013).

[3] V. Khaustov, Higher-Order Pseudohyperboloids with the Merge Operation: A Geometric Foundation for Programmable Wave Confinement, ZENODO (2026), DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.19926174.

[4] R. C. T. da Costa, Quantum mechanics of a constrained particle, Physical Review A 23, 1982 (1981).

[5] M. Born and E. Wolf, Principles of Optics, 7th ed., Cambridge University Press (1999).

[6] K. J. Vahala, Optical microcavities, Nature 424, 839 (2003).

[7] J. Spanier and E. M. Gelbard, Monte Carlo Principles and Neutron Transport Problems, Addison-Wesley (1969).

[8] C. M. Bender and S. A. Orszag, Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, Springer (1999).

[9] G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd ed., Cambridge University Press (1944); see also F. W. J. Olver et al., NIST Digital Library of Mathematical Functions (DLMF).

[10] A. Taflove and S. C. Hagness, Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method, 3rd ed., Artech House (2005).