Геометрическая волновая инженерия

Конструктивный принцип геометрической волновой инженерии

Двойное наследование фокального свойства при вращении вокруг смещённой оси

Хаустов Владимир Игоревич

ORCID: 0009-0007-3657-2309

Лаборатория геометрической волновой инженерии https://vihrihaosa.ru/

Лицензия: CC BY 4.0

Дата публикации: 23 мая 2026 года

DOI: 10.5281/zenodo.20357894

Научно-технический перевод с английского языка.

Редакция, адаптированная для русскоязычного инженера-исследователя.

Оригинал: Khaustov, V. Double Inheritance of the Focal Property under Offset Rotation. https://doi.org/10.5281/zenodo.20357894

Аннотация

В настоящей работе выделен и дано физическое объяснение одному из конструктивных принципов исследовательской программы «Геометрическая волновая инженерия» (ГВИ). Этот принцип, названный двойным наследованием фокального свойства, описывает перенос плоского фокального закона классического конического сечения на трёхмерную поверхность, образованную вращением данного сечения вокруг оси, параллельной его собственной оси симметрии, но смещённой относительно неё. В случае гиперболической образующей получаемая поверхность — псевдогиперболоид второго порядка в терминологии ГВИ — характеризуется упорядоченной лучевой динамикой, которая не сводится ни к фокусировке в точке, свойственной классическим квадрикам вращения, ни к эргодическому поведению рассеивающих бильярдов. Вместо этого траектории разделяются по сохраняющемуся азимутальному инварианту $J = \rho v\varphi$. Мы последовательно выводим физический механизм такого поведения из элементарного переноса фокального свойства: (i) фокальный закон отражения гиперболы, восходящий к Аполлонию, сохраняется как локальное правило отражения в каждой меридиональной полуплоскости; (ii) два точечных фокуса, удалённых от оси вращения на расстояние $R > 0$, при вращении образуют два фокальных кольца, выступающих виртуальными внешними ориентирами, которых внутренние лучи не достигают; (iii) плоский закон отражения, связывающий два фокуса, обобщается до однопараметрического семейства трёхмерных законов отражения, параметризованного J, вследствие чего возникают две сосуществующие, топологически различные структуры концентрации — осевая и тороидальная. Предлагается рассматривать сочетание двойного наследования и стратификации по J как самостоятельный физический конструктивный принцип программы ГВИ. Все утверждения ограничены приближением геометрической оптики $\lambda \to 0$; количественная лучевая проверка на той же геометрии рассматривается в отдельной сопроводительной работе.

Содержание

Аннотация 2
1. Введение 4
1.1. Место работы в программе геометрической волновой инженерии 4
1.2. Предмет и задачи работы 4
1.3. Что не входит в предмет настоящей работы 4
2. Построение: псевдогиперболоид второго порядка 4
3. Физический механизм: перенос фокального свойства 7
3.1. Этап 1 — Почему выбрана гиперболическая образующая 7
3.2. Этап 2 — Зачем необходимо вращение вокруг смещённой оси: топологическое преобразование фокусов 7
3.3. Этап 3 — Виртуальные внешние фокусы и отражательный маятник 7
3.4. Этап 4 — Локальное наследование и механизм осевой концентрации 8
3.5. Этап 5 — Глобальное наследование и механизм тороидальной стратификации 8
3.6. Этап 6 — Двойное наследование как расщепление плоского закона в семейство пространственных законов 9
4. Организация фазового пространства по сохраняющемуся инварианту J 10
5. Соотношение со смежными научными направлениями 11
6. Геометрическая волновая инженерия: принцип и его место в программе 12
6.1. Общая структура программы 12
6.2. Принцип и проектная координата 13
6.3. План развития программы 13
6.4. Связь с кольцевыми локализованными состояниями 14
6.5. Связь с операцией Merge 14
7. Проверяемые и опровержимые прогнозы 14
8. Ограничения и область применимости 15
9. Заключение 15
Литература 16
Приложение А. Словарь терминов 17
Приложение В. Физический каталог лучевых режимов, прогнозируемых двойным наследованием 18

1. Введение

1.1. Место работы в программе геометрической волновой инженерии

Настоящее исследование выполнено в рамках программы «Геометрическая волновая инженерия» (ГВИ). В нём вводится один из физических конструктивных принципов программы — двойное наследование фокального свойства — и раскрывается механизм, посредством которого этот принцип определяет характерную лучевую динамику псевдогиперболоидов. Таким образом, данная статья посвящена физическому механизму и дополняет работы по конструктивному описанию соответствующей геометрии.

Сопроводительное численное исследование лучевой динамики (далее — сопроводительная работа), проверяющее качественные предсказания настоящей статьи для базового псевдогиперболоида второго порядка, анонсируется как отдельная публикация.

1.2. Предмет и задачи работы

Настоящий текст представляет собой концептуальный теоретический препринт, ограниченный пределом геометрической оптики $\lambda \to 0$. Работа преследует три цели:

(a) вывести физический механизм переноса фокального закона образующего конического сечения — исходно двумерного правила отражения — на трёхмерную псевдоповерхность, полученную вращением вокруг смещённой оси, и изложить этот вывод в форме, доступной читателю, не знакомому с программой ГВИ;

(b) сформулировать двойное наследование как самостоятельный конструктивный принцип ГВИ и определить сохраняющийся азимутальный момент $J = \rho\, v\varphi$ как естественный параметр разделения семейств лучевых траекторий;

(c) установить границы теоретического статуса предложенного принципа и указать, какие утверждения остаются гипотезами, требующими количественной лучевой проверки.

1.3. Что не входит в предмет настоящей работы

В работе не приводятся новые численные данные и результаты решения волновых уравнений; не выдвигаются утверждения о модах, добротности, дифракции, поляризации либо о сравнительных характеристиках конкретных устройств. Все положения сформулированы в приближении геометрической оптики и относятся к структурной организации лучевых траекторий, а не к их количественной статистике. Численная проверка рассматривается в сопроводительной работе; соответствие между лучевым и волновым описаниями в общем случае остаётся открытым вопросом и здесь не исследуется.

2. Построение: псевдогиперболоид второго порядка

Рассмотрим гиперболу с полуосями $a, b > 0$, заданную в меридиональной плоскости (x, ρ) уравнением

$$x^2/a^2 - (\rho - R)^2/b^2 = 1, \quad R > 0,$$

с фокусами

$$F_{1,2} = (\mp c, R), \quad c = \sqrt{(a^2 + b^2)}.$$

Параметр R задаёт смещение центра гиперболы относительно будущей оси вращения (оси x). Собственная ось симметрии гиперболы — прямая ρ = R, параллельная оси вращения и отстоящая от неё на расстояние R.

The parameter R is the offset of the hyperbola's centre from the future axis of rotation (the x-axis). The symmetry axis of the hyperbola itself is the line ρ=R, which lies parallel to the rotation axis at distance R.

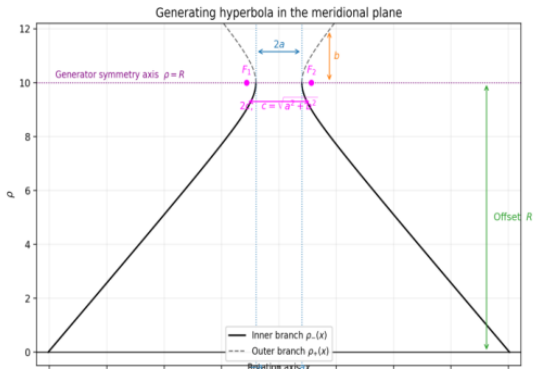

Рисунок 1. Образующая гипербола в меридиональной плоскости (x, ρ): внутренняя и внешняя ветви, фокальное полурасстояние $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, полуось a, параметр b и смещение R.

Вращение гиперболы вокруг оси x образует поверхность вращения, меридиональное сечение которой в каждой полуплоскости φ = const в точности воспроизводит исходную коническую кривую. Поверхность состоит из двух симметричных рупоров, соответствующих областям $x \le -a$ и $x \ge a$. В каждом рупоре образующая разделяется относительно прямой ρ = R на две ветви, различающиеся знаком:

$$\rho_{\pm}(x) = R \pm b\sqrt{((x/a)^2 - 1)}, \qquad |x| \ge a.$$

Внутренняя ветвь $\rho_{-}(x)$ обращена к оси вращения и служит физической отражающей границей внутренней полости. Внутренняя полость представляет собой осесимметричную область, радиально ограниченную условием $\rho < \rho_{-}(x)$ на участках $|x| \ge a$ и замкнутую вблизи $|x| = a$ подходящими крышками — плоскими, сферическими или полутороидальными. Конкретный вариант замыкания рассматривается как конструктивный параметр и не влияет на качественное содержание настоящего анализа.

В терминологии программы ГВИ эта поверхность называется псевдогиперболоидом второго порядка — простейшим представителем класса, получаемого однократным применением операции Merge, введённой в исходном изложении. Обозначение «второй порядок» относится к топологии меридиональной образующей: двум рупорам на двух непересекающихся интервалах координаты x. Более высокие порядки формируются рекурсивным объединением и выходят за рамки настоящей работы.

Для дальнейшего анализа принципиальны два элементарных геометрических факта:

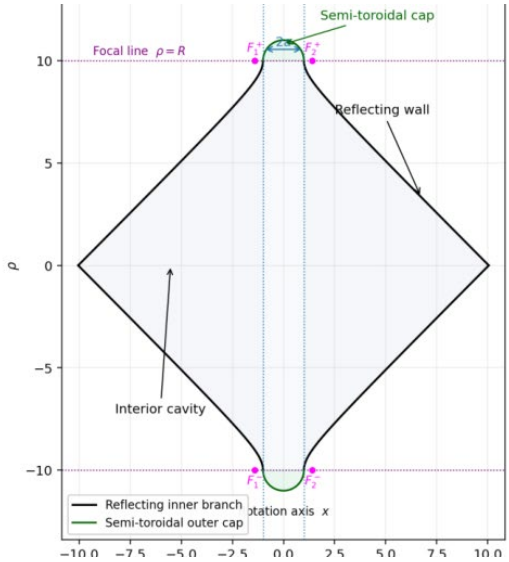

Рисунок 2. Меридиональное построение псевдогиперболоида второго порядка путём вращения образующей гиперболы вокруг смещённой оси. Отражающей границей служит внутренняя ветвь $\rho^{-}(x)$; полутороидальная крышка показана как один из допустимых вариантов замыкания.

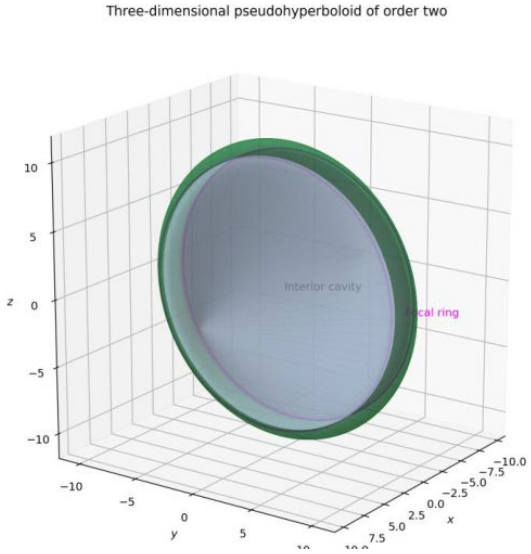

Рисунок 3. Трёхмерный вид псевдогиперболоида второго порядка. Фокальные кольца при $x = \pm c$ и радиусе R расположены вне внутренней полости.

(F_1) В каждой меридиональной полуплоскости точно воспроизводится исходная плоская коническая кривая с двумя фокусами $F_{1,2}$.

(F_2) При вращении каждый точечный фокус описывает окружность радиуса R в плоскости $x = \mp c$. Эти окружности далее называются фокальными кольцами конструкции.

Здесь необходимо подчеркнуть пространственное обстоятельство, которое легко упустить при первом чтении: фокусы $F_{1,2}$ лежат на прямой $\rho = R$. В продольных сечениях $x = \mp c$ радиальная координата внутренней ветви равна

$$\rho_-(\mp c) = R - b\sqrt{((c/a)^2 - 1)} = R - b^2/a < R.$$

Следовательно, фокусы, а вместе с ними и фокальные кольца, расположены за пределами внутренней полости, внутри области, ограниченной отражающей стенкой. Ни один луч, испущенный внутри полости, не может непосредственно достичь фокального кольца. Как показано в следующем разделе, это свойство не является недостатком конструкции: именно оно позволяет преобразовать фокальный закон образующей конической кривой из закона схождения в закон направляющего действия.

Во всей работе предполагается $R > b^2/a$. Это условие обеспечивает $\rho_-(\mp c) > 0$ и тем самым гарантирует, что фокальные кольца строго находятся вне внутренней полости, за отражающей стенкой.

3. Физический механизм: перенос фокального свойства

Этот раздел составляет физическую основу статьи. Поведение лучей в псевдогиперболоиде второго порядка выводится из элементарного фокального свойства образующей гиперболы в шесть явно выделенных этапов.

3.1. Этап 1 — Почему выбрана гиперболическая образующая

Гиперболическая образующая выбрана потому, что её фокальный закон не предполагает ни схождения лучей в одну точку, ни их коллимации: информация о направлении сохраняется при разделении и переориентации лучей между двумя несовпадающими геометрическими ориентирами. Именно это структурное свойство гиперболической образующей создаёт предпосылки для нетривиального сосуществования осевой и тороидальной топологий концентрации в геометрии, полученной вращением.

3.2. Этап 2 — Зачем необходимо вращение вокруг смещённой оси: топологическое преобразование фокусов

При отсутствии смещения ($R = 0$) фокусы лежат на оси вращения. Вращение оставляет их точками и даёт классический однополостный гиперболоид вращения, фокальная структура которого сводится к плоскому фокальному свойству вдоль оси вращения и не содержит нового физического содержания по сравнению с классическими квадриками.

При любом $R > 0$ фокусы находятся вне оси, и вращение переводит каждый из них в окружность радиуса R. Таким образом, переход от $R = 0$ к $R > 0$ представляет собой не просто количественную деформацию, а топологическое преобразование фокального множества: нульмерные точечные фокусы превращаются в одномерные фокальные кольца. Это изменение размерности фокального множества рассматривается как структурный источник последующих явлений; в частности, оно придаёт сохраняющемуся азимутальному моменту J смысл нетривиального конструктивного параметра, а не только следствия осевой симметрии.

В этом смысле смещение R — не геометрический параметр, равноправный a и b, а параметр топологического управления: семейство псевдогиперболоидов следует рассматривать при $R > 0$, тогда как $R = 0$ образует его вырожденный предельный случай.

3.3. Этап 3 — Виртуальные внешние фокусы и отражательный маятник

Из свойства (F_2) и установленного в конце раздела 2 расположения фокусов $F_{1,2}$ вне внутренней полости следует, что никакой внутренний луч не может достичь фокальных колец. Они

выступают виртуальными внешними ориентирами: геометрическими множествами, заданными построением, которые траектории никогда не посещают, но которые определяют их направление посредством закона отражения, унаследованного от плоского фокального свойства.

Плоский фокальный закон гиперболы утверждает, что касательная в любой точке P гиперболы делит пополам угол между отрезками PF_1 и PF_2. Эквивалентно: луч, направленный из внутренней точки к одному из фокусов и пересекающий кривую в точке P, отражается в полупрямую PF_1 (или PF_2), направленную к сопряжённому фокусу. Поскольку фокусы являются виртуальными внешними ориентирами, отражённый луч не достигает сопряжённого фокуса. Вместо этого он пересекает внутреннюю полость в направлении данного фокуса, попадает на противоположную ветвь внутренней поверхности и отражается обратно — теперь в направлении исходного фокуса.

Так возникает отражательный маятник: последовательность меридиональных отражений, каждое из которых подчиняется плоскому фокальному закону Аполлония. Ни одно отражение не заканчивается в фокусе, однако вся последовательность детерминированно направляется парой виртуальных внешних ориентиров.

3.4. Этап 4 — Локальное наследование и механизм осевой концентрации

Рассмотрим строго меридиональный луч ($J = 0$), участвующий в отражательном маятнике. Между двумя последовательными отражениями он может пересекать узкий продольный участок $|x| \le a$, где внутренняя ветвь $\rho^-(x)$ достигает предельного значения $\rho^-(\pm a) = R$ на вершинах раструбов. В соответствующей замкнутой полости, в зависимости от геометрии замыкающих элементов, луч может проходить через области с малыми значениями ρ. Гиперболическая геометрия внутренней ветви сама по себе не означает сходимости лучей в точку (внутри полости нет точечного фокуса). Вместо этого она позволяет сформулировать гипотезу, требующую численной проверки: при подходящем ансамбле начальных условий и допустимой геометрии замыкающих элементов меридиональные траектории могут проводить повышенную долю времени внутри тонкой осевой трубки $\rho < \delta$, формируя статистически повышенную осевую плотность вдоль отрезка $x \in [-c, c]$ вблизи оси $\rho = 0$.

Именно в этом состоит предполагаемое физическое содержание локального наследования: речь идёт не о точечном фокусе, а об ожидаемой зоне осевой концентрации на участке между двумя раструбами, возникающей при проекции отражательного маятника на продольное направление. Концентрация имеет статистический характер и зависит от выбранного ансамбля начальных условий и геометрии замыкающих элементов; её количественная оценка относится к предмету сопроводительной работы.

3.5. Этап 5 — Глобальное наследование и механизм тороидальной стратификации

Для осесимметричной отражающей поверхности азимутальный момент импульса $J = \rho v\varphi$ сохраняется вдоль каждой лучевой траектории. Это элементарное следствие осевой симметрии само по себе не составляет содержания глобального наследования. Существо глобального наследования заключается во взаимодействии данного закона сохранения с локальным наследованием, выведенным на этапе 4.

Рассмотрим луч с фиксированным $|J| > 0$. Из сохранения J следует $v\varphi = J/\rho$; следовательно, приближение к оси $\rho \to 0$ потребовало бы неограниченного роста азимутальной составляющей скорости. Если полная скорость ограничена (например, законом сохранения энергии в физической реализации), луч не может проникнуть внутрь центробежного радиуса

$\rho_{min}(J) = |J| / v_{max}$,

где v_{max} — модуль скорости. При |J|, близком к геометрически допустимому максимуму, центробежный радиус приближается к R, и луч оказывается ограничен узкой окрестностью фокального кольца. При малом |J| центробежный радиус стремится к нулю, и луч может приближаться к осевой зоне концентрации, рассмотренной на этапе 4.

Принципиально важно, что на каждом слое фазового пространства с фиксированным J меридиональная составляющая динамики по-прежнему подчиняется отражательному маятнику этапа 3: локальное наследование не зависит от значения J, меняется лишь доступная радиальная область. Таким образом, при вращении вокруг смещённой оси плоский двухфокусный закон отражения переносится на однопараметрическое семейство пространственных законов отражения, параметризованных J. В этом семействе выделяются два предельных режима и непрерывный спектр промежуточных состояний:

при J → 0 — преимущественно осевая концентрация (этап 4);

при |J|, близком к максимуму, — выраженное тороидальное удержание вблизи фокального кольца;

при промежуточном |J| — винтовые траектории на промежуточных радиусах, сочетающие повторные осевые проходы с азимутальным дрейфом.

Этот перенос мы называем глобальным (вращательным) наследованием фокального свойства. Его содержание заключается не просто в сохранении J, а в стратификации перенесённого фокального закона по значению J.

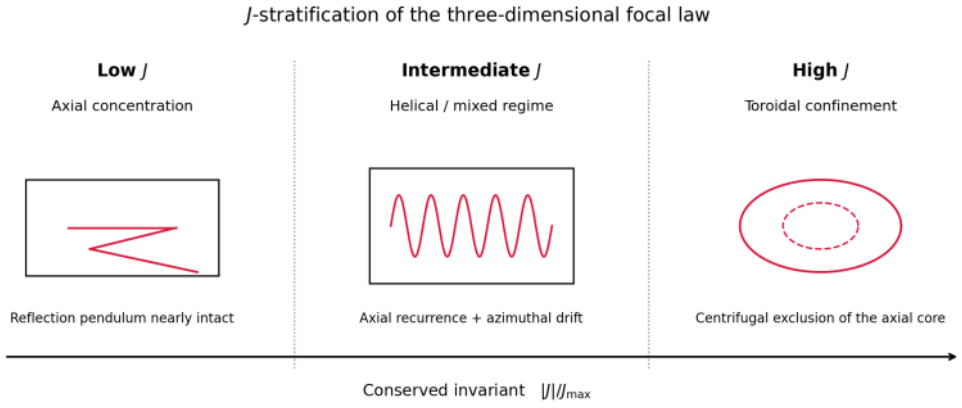

Рисунок 5. Стратификация трёхмерного фокального закона по J. Малые J соответствуют осевой концентрации, промежуточные J — смешанным винтовым траекториям, большие J — тороидальному удержанию вблизи фокального кольца.

3.6. Этап 6 — Двойное наследование как расщепление плоского закона в семейство пространственных законов

Локальное и глобальное наследование, рассмотренные на этапах 3–5, представляют собой не два независимых утверждения, а две стороны единого механизма, который далее формулируется как центральный конструктивный принцип ГВИ.

Двойное наследование фокального свойства. При вращении конической образующей вокруг оси, параллельной её оси симметрии, но не совпадающей с ней, плоский фокальный закон образующей сохраняется в каждой меридиональной полуплоскости как локальное правило отражения (локальное наследование) и одновременно переносится в пространстве на однопараметрическое семейство трёхмерных законов отражения, индексируемых азимутальным моментом $J = \rho v \varphi$, сохраняющимся вследствие вращательной симметрии (глобальное наследование). Оба вида наследования являются сопряжёнными проявлениями единого механизма: добавление осевой симметрии преобразует двумерный фокальный закон в непрерывное семейство пространственных законов, каждый из которых действует на слое фазового пространства с фиксированным J.

Такая формулировка согласуется с общим принципом теоретической механики: введение непрерывной симметрии приводит к появлению сохраняющейся величины (теорема Нётер) и расслоению динамики по её значениям. Новизна здесь заключается не в самом принципе, а в его применении: объектом стратификации выступает фокальный закон, а не уравнения движения; J задаёт координату параметризации семейств лучевых траекторий. В терминологии ГВИ J является не препятствием для локализации, а переменной, через которую описывается локализация.

Для предотвращения чрезмерно широкого толкования необходимы три оговорки:

(i) Локальный закон отражения Аполлония в полной мере применим только к меридиональным проекциям лучевых траекторий. Пространственные лучи общего положения удовлетворяют этому закону в меридиональной проекции каждого события отражения, тогда как их азимутальная составляющая определяется сохранением J. Поэтому фокальное кольцо следует рассматривать как область возможного повышения плотности меридиональных проекций для широких классов начальных ансамблей, а не как доказанный аттрактор или место точечной фокусировки в трёхмерном пространстве.

(ii) На участках раструбов $|x| > a$ гауссова кривизна внутренней ветви удовлетворяет $K < 0$. Стандартная интуиция, основанная на рассеивающих бильярдах, могла бы предполагать общую эргодичность. Однако здесь такой вывод не является обязательным: осевая симметрия сводит динамику при фиксированном J к одномерной задаче по x с эффективным центробежным ограничением. Для этой редуцированной структуры можно ожидать преимущественно регулярного либо смешанного поведения, но его количественный спектр должен быть исследован в сопроводительной работе.

(iii) Рассматриваемая конструкция не является универсальной ловушкой для лучей. В ранних исследовательских вариантах автор использовал более сильную формулировку, от которой здесь прямо отказывается. Физически корректное описание состоит в том, что геометрия сохраняет инвариант J и тем самым задаёт инвариантные слои фазового пространства для семейств лучей, обусловленные значением J, но не ловушку, собирающую все лучи в одной области.

4. Организация фазового пространства по сохраняющемуся инварианту J

В разделе 3 двойное наследование выведено как структурное утверждение: плоский фокальный закон переносится на семейство трёхмерных законов, индексируемое J. Теперь уточним, что это означает для организации фазового пространства. Рассмотрение носит качественный характер; количественные характеристики относятся к сопроводительной работе.

Динамика внутри псевдогиперболоида второго порядка инвариантна относительно вращений вокруг оси x, вследствие чего допускает симплектическую редукцию при фиксированном J. Каждый слой с фиксированным J представляет собой двумерное симплектическое многообразие, параметризуемое, например, координатами (x, v_x) на выбранном сечении Пуанкаре в меридиональной плоскости. Выделяются три качественных класса, задаваемых безразмерным отношением $|J|/J_{max}$, где J_{max} — максимальный азимутальный момент, кинематически допустимый при геометрическом масштабе полости.

Класс	Диапазон $\lvert J\rvert/J_{max}$	Меридиональная динамика	Топология концентрации
Малый J	$\lesssim 0{,}2$	Отражательный маятник почти не нарушен; повторные проходы через осевую трубку	Осевая концентрация вдоль $x \in [-c,c]$, $\rho \to 0$
Промежуточный J	0,2–0,6	Маятниковая динамика со значительным азимутальным дрейфом; спиральная меридиональная проекция	Смешанный режим; винтовые орбиты на промежуточных радиусах
Большой J	$\gtrsim 0{,}6$	Скользящее, преимущественно азимутальное движение около $\rho \simeq \rho_{min}(J)$	Тороидальное удержание около фокальных колец; аналог мод шепчущей галереи

Численные пороги приведены для иллюстрации; их количественная калибровка относится к сопроводительной работе. Структурное утверждение не зависит от этой калибровки: геометрия сохраняет J, а лучевой отклик зависит от распределения J в исходном ансамбле. Поэтому выражение «селектор, обусловленный J», используемое далее, следует понимать операционно: геометрия не сортирует лучи активно, а задаёт различные инвариантные слои, в пределах которых развиваются различные семейства траекторий.

Ожидается, что два предельных режима — осевая концентрация при малом J и тороидальное удержание при большом J — сосуществуют, а не конкурируют. Одна геометрия может поддерживать оба режима, индексируемых одной и той же сохраняющейся величиной. Непосредственное следствие, важное для сопроводительной работы и последующего волнового расширения (раздел 6.3), состоит в необходимости проверить статистику лучей в псевдогиперболоиде второго порядка относительно контрольных геометрий — цилиндра и эллипсоида вращения — на одновременное превышение заселённости осевой трубки и окрестности фокального кольца с плавным переходом между ними при промежуточных J.

5. Соотношение со смежными научными направлениями

Псевдогиперболоид второго порядка не является изолированным геометрическим объектом: его исследование соприкасается с рядом развитых математических и физических направлений. Ниже кратко рассматриваются эти связи и точно очерчиваются границы заявляемой новизны.

Циклиды Дюпена и тороидальные квадрики. Рассматриваемая в разделе 2 поверхность геометрически принадлежит классическому семейству циклид Дюпена, дифференциально-геометрические свойства которого изучены ещё в XIX веке. Мы не претендуем на получение

новых геометрических результатов относительно самого семейства. Вклад ГВИ состоит в выделении в нём поверхностей, для которых фокальное свойство образующей структурно переносится на поверхность вращения, и в использовании такого переноса в качестве конструктивного правила.

Конфокальные бильярды (Якоби—Шаль). Для бильярдов в квадриках наряду с энергией существуют семейства конфокальных каустик, выступающие интегралами движения и обусловливающие интегрируемую либо близкую к интегрируемой динамику. Совпадает ли описанная в разделе 4 стратификация по J для псевдогиперболоида второго порядка с классической структурой конфокальных каустик семейства Дюпена, нам неизвестно. Этот вопрос оставлен для теоретического исследования в сопроводительной работе и при рассмотрении параболических и эллиптических аналогов.

Рассеивающие бильярды и переменная отрицательная кривизна. На участках раструбов внутренняя ветвь имеет $K < 0$. Стандартные представления, основанные на бильярдах Синая—Бунимовича, позволяют ожидать эргодичность гиперболического типа. Однако, как обсуждалось на этапе 6, осевая симметрия ограничивает такое ожидание, сводя динамику при фиксированном J к одномерной задаче с эффективным центробежным ограничением движения. Сосуществование отрицательной кривизны и неэргодического поведения лучей делает псевдогиперболоид второго порядка показательным объектом между двумя крайними случаями: интегрируемыми квадриками с точечной фокусировкой и эргодическими рассеивающими бильярдами. Его положение определяется унаследованным фокальным законом.

Моды шепчущей галереи и асимметричные оптические микрорезонаторы. Режим больших J из раздела 4 структурно близок к динамике шепчущей галереи, а режим промежуточных J — к областям фазового пространства, исследуемым в деформированных оптических микрорезонаторах. Новизна заключается не в существовании этих режимов, а в их объединении в одно семейство, индексируемое J и порождаемое единым геометрическим принципом.

Профилированные рупорные антенны. Меридиональный профиль напоминает гладкостенные рупоры со сплайновым профилем, применяемые в СВЧ-технике. Новым элементом является явное использование фокального наследования и стратификации по J как проектных параметров, а не только как последующего описания.

Подчеркнём границы новизны: ни класс поверхностей, ни закон сохранения J, ни переменная отрицательная кривизна, ни фокальное свойство плоского конического сечения сами по себе не являются новыми. Заявляемый вклад данной работы — выделение двойного наследования в качестве единого конструктивного принципа и физический вывод, связывающий этот принцип с прогнозируемым сосуществованием осевой и тороидальной топологий концентрации, стратифицированных по J.

6. Геометрическая волновая инженерия: принцип и его место в программе

6.1. Общая структура программы

Под геометрической волновой инженерией здесь понимается систематическое исследование того, как макроскопические геометрические принципы — фокальное наследование при управляемом вращении, сохраняющиеся инварианты симметричных конфигураций, специально заданные профили кривизны и операция объединения базовых поверхностей в псевдоповерхности более высоких порядков — могут сочетаться для построения пассивных

семейств лучевых траекторий, обусловленных геометрией, а в перспективе и волновых мод. Программа включает следующие направления:

- Операционная основа — операция Merge (объединение).
- Общая концептуальная работа — формулировка геометрической волновой инженерии.
- Три классификационные основы — псевдопараболоиды, псевдогиперболоиды и псевдоэллипсоиды.
- Первое физическое применение — кольцевые локализованные состояния в открытых псевдогиперболических полостях.

Настоящая работа вводит именованный физический принцип программы — двойное наследование фокального свойства — и излагает физический механизм, объясняющий качественное поведение псевдогиперболоидов.

6.2. Принцип и проектная координата

Вклад настоящей работы в ГВИ имеет два конкретных аспекта:

(a) Двойное наследование выделено как самостоятельный конструктивный принцип: одна геометрическая операция (вращение конического сечения вокруг смещённой оси) обеспечивает структурно закономерный перенос плоского фокального закона на трёхмерную псевдоповерхность.

(b) Сохраняющийся азимутальный момент J определён как координата стратификации, по которой этот принцип разделяет инвариантные семейства лучей, предоставляя переменную для параметризации пространства проектирования псевдоповерхностей, получаемых данным способом.

Сочетание (a) и (b) составляет предложенную здесь физическую основу для гиперболического случая второго порядка. Ожидается, что более высокие порядки, получаемые рекурсивным объединением, привнесут дополнительные эффекты, связанные с самой операцией Merge; их исследование относится к будущим работам.

6.3. План развития программы

Современное состояние и намеченные направления развития ГВИ представлены пятью этапами без обращения к неопубликованной или авторской внутренней нумерации.

(a) Конструктивная геометрия трёх классов. Конструктивное описание каждого семейства псевдоповерхностей образует геометрическую основу программы.

(b) Операционное объединение посредством Merge. Операция Merge служит механизмом построения более высоких порядков из базовых элементов.

(c) Физический механизм фокального переноса. В данной работе этот механизм сформулирован для гиперболического случая.

(d) Количественная проверка лучевой динамики. Сопроводительная работа предназначена для проверки сформулированных здесь качественных прогнозов для гиперболического случая.

(e) Соответствие волновой механике. Общее полуклассическое соответствие между семействами лучей, стратифицированными по J, и резонансными волновыми модами остаётся открытым вопросом программы.

Этап (e) методологически наиболее сложен: переход от геометрооптического принципа настоящей работы к реальной волновой физике не является следствием двойного наследования. Он требует либо явного полуклассического построения (ВКБ) на каждом листе фиксированного J редуцированного фазового пространства, либо прямого численного решения волнового уравнения на тех же геометриях. В данной работе такой переход не утверждается.

6.4. Связь с кольцевыми локализованными состояниями

Кольцевые локализованные состояния в открытых псевдогиперболических полостях допускают естественную интерпретацию в терминах настоящей работы. Глобальное наследование переводит плоские точечные фокусы образующей гиперболы во внешние по отношению к полости фокальные кольца; стратификация по J ограничивает семейства лучей с большими |J| узкими окрестностями этих колец. В полуклассическом пределе ожидается, что при квантовании такие семейства будут соответствовать волновым модам, локализованным на тех же кольцах. Эта связь качественная; для её количественного установления необходимо ВКБ-построение, предусмотренное этапом (e).

6.5. Связь с операцией Merge

Псевдогиперболоид второго порядка — простейший представитель семейства: он образован одним объединением двух базовых элементов. Более высокие порядки, получаемые рекурсивным объединением, увеличивают число раструбов, а вместе с ними и число фокальных колец. Предполагается, что двойное наследование композиционно сохраняет структурную закономерность при Merge: каждое элементарное объединение добавляет одно фокальное кольцо и соответствующую доступную тороидальную зону удержания, тогда как осевая зона концентрации ветви с наименьшим J сохраняется. Количественный анализ такой композиции остаётся задачей будущих исследований.

7. Проверяемые и опровержимые прогнозы

Принцип, сформулированный в разделе 3, задаёт структурные условия количественного поведения псевдогиперболоидов второго порядка. Ниже перечислены условия, нарушение которых опровергло бы роль двойного наследования как конструктивного принципа в его нынешней формулировке.

(E1) В лучевом режиме следует проверить, возникает ли в псевдогиперболоиде второго порядка одновременное превышение интегральной плотности лучей относительно контрольных геометрий с нулевой гипотезой (цилиндр вращения, эллипсоид вращения, гладко возмущённый вариант того же псевдогиперболоида) в осевой трубке $x \in [-c, c]$, $\rho < \delta$ (класс малых J) и в окрестности фокального кольца $\rho \simeq \rho_{min}(J)$ при $x \simeq \pm c$ (класс больших J), с плавным переходом при промежуточных J.

(E2) Превышение из (E1) должно плавно зависеть от параметров образующего конического сечения. Предполагается, что малые гладкие возмущения меридионального профиля качественно сохраняют превышение, тогда как большие возмущения постепенно ослабляют его. Такая устойчивость класса — структурное ожидание, вытекающее из принципа, а не утверждение об оптимальности каждой отдельной формы.

(E3) В полуклассическом волновом режиме ожидается, что семейства лучей с большими |J| будут соответствовать волновым модам, локализованным вблизи фокальных колец (аналогично модам

шепчущей галереи), а семейства с малыми |J| — модам, структурированным вдоль осевого отрезка $x \in [-c, c]$. Для промежуточных J ожидаются смешанные модовые структуры, чувствительные к дифракции в области раструбов. Это полуклассическая гипотеза, выходящая за пределы геометрооптического принципа настоящей работы; она включена для обеспечения проверяемости программы в волновом режиме.

Прогнозы (E1)–(E3) являются гипотезами, требующими количественной проверки; настоящая концептуальная работа их не доказывает.

8. Ограничения и область применимости

Настоящая работа носит концептуально-теоретический характер. Она не устанавливает и не претендует на установление следующего:

1. Уникальности какой-либо отдельной геометрической формы внутри класса псевдогиперболоидов. Принцип определяет класс; заявляется устойчивость класса, но не точечная оптимальность.

2. Отсутствия хаотических областей в фазовом пространстве. Оговорка (ii) раздела 3.6 означает, что осевая симметрия способна редуцировать эффективную динамику на листах фиксированного J и поддерживать регулярные или смешанные структуры; это не исключает хаотических областей при больших J или в возмущённых окрестностях семейства.

3. Каких-либо количественных волново-механических результатов. Добротности, эффективности дифракции, поляризационные эффекты, времена жизни мод и аналогичные величины не рассматриваются.

4. Непосредственной применимости к конкретной физической реализации (акустика, электромагнетизм, квантовая механика, теория упругости) за пределами геометрооптической аналогии. Принцип не зависит от реализации; его физическое воплощение представляет отдельную задачу.

5. Превосходства псевдогиперболоидов над существующими семействами отражателей или резонаторов. Назначение принципа — организовать пространство проектирования, а не заявлять преимущество внутри него.

Пункты 1–5 представляют открытые вопросы заявленной программы, а не оставленные без внимания пробелы.

9. Заключение

В работе выделен и физически выведен самостоятельный конструктивный принцип геометрической волновой инженерии — двойное наследование фокального свойства при вращении образующего конического сечения вокруг смещённой оси. Для рассматриваемого гиперболического случая принцип означает, что плоский фокальный закон Аполлония сохраняется в каждом меридиональном полупространстве как локальное правило отражения и благодаря осевой симметрии переносится в однопараметрическое семейство трёхмерных законов отражения, индексируемых сохраняющимся азимутальным моментом J. Этот вывод подробно сформулирован в разделе 3.6.

Ожидается, что полученный псевдогиперболоид второго порядка будет поддерживать две топологически различные сосуществующие структуры концентрации: осевую при малых J и

тороидальную вблизи фокальных колец при больших J, с непрерывным спектром переходных режимов при промежуточных J. В операционном смысле, уточнённом в разделе 4, геометрия обеспечивает стратификацию семейств лучей, обусловленную J. Конструкция занимает промежуточное положение между интегрируемыми квадриками с точечной фокусировкой и эргодическими рассеивающими бильярдами; это положение определяется унаследованным фокальным законом и служит структурным основанием для выделения объекта в самостоятельную исследовательскую программу.

Установлено место принципа в программе ГВИ, определена его связь с операцией Merge и кольцевыми локализованными состояниями, а также разграничены концептуальные положения и утверждения, требующие количественной проверки. Количественная проверка лучевой динамики в гиперболическом случае относится к сопроводительной работе; полуклассическое волновое соответствие в общем случае остаётся открытым вопросом программы.

Предлагаемый текст представляет концептуальный этап, а не окончательный результат: опорную точку, от которой физическое содержание ГВИ может развиваться параллельно с конструктивной геометрией и количественной верификацией.

Литература

[1] Dupin C. Applications de géométrie et de méchanique. Bachelier, Paris, 1822.

[2] Maxwell J. C. On the cyclide. Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, 1868.

[3] Hilbert D., Cohn-Vossen S. Geometry and the Imagination. Chelsea, 1952.

[4] Arnold V. I. Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer, 1989.

[5] Jacobi C. G. J. Vorlesungen über Dynamik. Reimer, Berlin, 1866.

[6] Veselov A. P. Confocal surfaces and integrable billiards on the sphere and in the Lobachevsky space. Journal of Geometry and Physics, 1990.

[7] Lazutkin V. F. KAM Theory and Semiclassical Approximations to Eigenfunctions. Springer, 1993.

[8] Rayleigh, Lord. The problem of the whispering gallery. Philosophical Magazine, 1910.

[9] Nöckel J. U., Stone A. D. Ray and wave chaos in asymmetric resonant optical cavities. Nature, 1997.

[10] Pottmann H., Wallner J. Computational Line Geometry. Springer, 2001.

[11] Vahala K. J. Optical microcavities. Nature, 2003.

[12] Granet C., James G. L., Bolton R., Moorey G. A smooth-walled spline-profile horn as an alternative to the corrugated horn. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2004.

[13] Tabachnikov S. Geometry and Billiards. American Mathematical Society, 2005.

[14] Chernov N., Markarian R. Chaotic Billiards. American Mathematical Society, 2006.

[15] Matsko A. B., Ilchenko V. S. Optical resonators with whispering-gallery modes. IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics, 2006.

[16] Cao H., Wiersig J. Dielectric microcavities: model systems for wave chaos and non-Hermitian physics. Reviews of Modern Physics, 2015.

[17] Sinai Ya. G. Dynamical systems with elastic reflections. Russian Mathematical Surveys, 1970.

[18] Bunimovich L. A. On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards. Communications in Mathematical Physics, 1979.

[19] Wojtkowski M. P. Principles for the design of billiards with nonvanishing Lyapunov exponents. Communications in Mathematical Physics, 1986.

Приложение А. Словарь терминов

Вращение вокруг смещённой оси. Операция построения поверхности вращения, при которой образующая кривая вращается вокруг оси, отличной от её собственной оси симметрии. Расстояние между двумя параллельными осями задаётся параметром смещения R.

Псевдогиперболоид второго порядка. Поверхность вращения, полученная вращением гиперболы вокруг смещённой оси; простейший представитель семейства псевдогиперболоидов ГВИ, образуемый одним объединением двух базовых элементов.

Локальное (меридиональное) наследование. Сохранение плоского фокального закона образующего конического сечения как правила отражения в каждом меридиональном полупространстве поверхности вращения.

Глобальное (вращательное) наследование. Перенос плоского фокального закона на однопараметрическое семейство трёхмерных законов отражения, индексируемых сохраняющимся азимутальным моментом $J = \rho\, v\varphi$.

Двойное наследование фокального свойства. При вращении образующего конического сечения вокруг оси, параллельной его оси симметрии, но не совпадающей с ней, плоский фокальный закон образующей сохраняется в каждом меридиональном полупространстве как локальное правило отражения (локальное наследование) и глобально переносится на однопараметрическое семейство трёхмерных законов отражения, индексируемых азимутальным моментом $J = \rho\, v\varphi$, сохраняющимся вследствие вращательной симметрии (глобальное наследование). Оба вида наследования — сопряжённые проявления единого механизма: плоский двумерный фокальный закон при добавлении осевой симметрии разделяется на непрерывное семейство трёхмерных законов, каждый из которых действует на листе фазового пространства с фиксированным J.

Фокальное кольцо. Окружность радиуса R, описываемая точечным фокусом образующего конического сечения при вращении вокруг смещённой оси. В гиперболическом случае оба фокальных кольца находятся вне внутренней полости.

Экваториальное фокальное кольцо. Основной фокальный элемент псевдогиперболоида: кольцевая зона радиуса R и высоты 2a вдоль фокальной линии образующей гиперболы, расположенная между нижней и верхней ветвями, то есть между двумя областями раструбов.

Виртуальный внешний ориентир. Фокальное кольцо, непосредственно недостижимое для внутренних лучей, но выступающее геометрическим ориентиром траекторий благодаря унаследованному закону отражения.

Отражательный маятник. Последовательность меридиональных отражений луча с $J = 0$ (либо малым J), каждое из которых подчиняется плоскому фокальному закону Аполлония и определяет локально наследуемую составляющую динамики.

Центробежный радиус. $\rho_{min}(J) = |J| / v_{max}$ — нижняя граница радиальной координаты, доступной лучу с заданными J и скоростью.

Стратификация по J. Разложение фазового пространства динамики на поверхности вращения на листы фиксированного J, на каждом из которых действует меридиональный отражательный маятник; структурное содержание глобального наследования.

Селектор, обусловленный J. Операционное обозначение геометрии, отклик которой зависит от сохраняющегося значения J в начальном ансамбле; геометрия сохраняет J и стратифицирует динамику, но не сортирует лучи активно без явно заданной меры ансамбля.

Операция Merge. Конструктивная операция объединения базовых элементов в псевдоповерхности более высокого порядка; операционная основа ГВИ.

Осевая зона концентрации. Продольный отрезок $x \in [-c, c]$ вблизи оси вращения, в котором статистически накапливаются лучи отражательного маятника с малыми J.

Тороидальная зона удержания. Узкая окрестность фокального кольца, в которой лучи с большими $|J|$ накапливаются вследствие центробежного ограничения движения в сочетании с унаследованным законом отражения.

Устойчивость класса. Сохранение качественного содержания двойного наследования при малых гладких возмущениях меридионального профиля; структурное свойство принципа, определяющее псевдогиперболоид как класс поверхностей, а не как единственную тонко настроенную форму.

Приложение B. Физический каталог лучевых режимов, прогнозируемых двойным наследованием

Следующие шесть классов режимов представляют структурные прогнозы двойного наследования для псевдогиперболоида второго порядка. Их следует использовать как категории поведения лучей при проверке относительно контрольных геометрий с нулевой гипотезой.

B1. Вертикальный класс малых J. Квазимеридиональные лучи с $|J| / J_{max} \ll 1$. Отражательный маятник практически сохраняется; ожидается статистически повышенная плотность вдоль осевой зоны концентрации. Физическая причина: локальное наследование (раздел 3.4).

B2. Класс осевых челночных траекторий. Подкласс B1 с периодическими или близкими к периодическим перемещениями между вершинами двух раструбов. Физическая причина: сочетание локального наследования с продольной возвратностью меридионального маятника.

B3. Класс удержания у вершин. Лучи, меридиональная проекция которых накапливается вблизи вершин раструбов при $|x| \simeq a$, $\rho \simeq R$. Физическая причина: минимальный меридиональный радиус кривизны у вершин, вызывающий локальное повышение плотности отражений.

B4. Класс промежуточных J с длительным квазирегулярным удержанием. Лучи с промежуточными $|J|$, демонстрирующие продолжительные участки почти регулярного меридионального движения, перемежающиеся азимутальным дрейфом. Физическая причина: неполная стратификация по J при промежуточных значениях; смешанная динамика допускает длительное удержание между регулярными и хаотическими областями.

B5. Класс повышенной плотности LDOS. Лучи, статистическая плотность которых, как ожидается, увеличивается вблизи фокальных колец, достижимых в геометрооптическом пределе лишь асимптотически (поскольку кольца являются виртуальными внешними ориентирами). Физическая причина: глобальное наследование (раздел 3.5); фокальные кольца рассматриваются

как области повышенной плотности меридиональных проекций, но не как доказанные аттракторы в теоретико-мерном смысле.

B6. Класс винтовых траекторий / шепчущей галереи. Лучи с $|J| / J_{max} \gtrsim 0{,}6$, ограниченные областью $\rho \simeq \rho_{min}(J)$ и движущиеся по винтовым траекториям с малой меридиональной амплитудой. Физическая причина: центробежное ограничение движения в сочетании с унаследованным фокальным законом при больших J.

Классы B1–B6 исчерпывают структурное содержание двойного наследования в пределах разрешающей способности геометрооптического описания. Любые дополнительные классы, которые могут быть обнаружены в сопроводительной работе, в рамках того же механизма относятся к одной из шести категорий либо к смешанным промежуточным подрежимам.